C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 317–320

Géométrie analytique/*Analytic Geometry*

Sur le nombre de Milnor d'une singularité semi-quasi-homogène

Joël Briançon [a], Hélène Maynadier-Gervais [b]

[a] Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice-Sophia Antipolis, UMR 6621 associée au CNRS, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France

[b] Laboratoire de mathématiques, Université d'Angers, UMR 6093 associée au CNRS, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

Reçu et accepté le 20 décembre 2001

Note présentée par Bernard Malgrange.

Résumé Soit $f=(f_1,\dots,f_p)$ une famille semi-quasi-homogène de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Nous démontrons que f définit une intersection complète à singularité isolée, et nous exprimons le nombre de Milnor de cette singularité comme la colongueur d'un idéal associé naturellement à f. Ceci généralise une formule de G.M. Greuel. ***Pour citer cet article : J. Briançon, H. Maynadier-Gervais, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 317–320.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

About the Milnor number of a semi-quasi-homogeneous singularity

Abstract Let $f=(f_1,\dots,f_p)$ be a semi-quasi-homogeneous family of holomorphic functions in a neighborhood of the origin in $\mathbf{C}^n$. We prove that f defines an isolated complete intersection singularity, and we express the Milnor number of this singularity as the colength of an ideal naturally associated to f. This generalizes a formula due to G.M. Greuel. ***To cite this article: J. Briançon, H. Maynadier-Gervais, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 317–320.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Enoncés des résultats

On désigne par $\mathcal{O}=\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ l'algèbre des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$; lorsque $f=(f_1,\dots,f_p)$ est une suite régulière de l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ qui définit une singularité isolée d'intersection complète, nous notons $\mu(f)=\mu(f_1,\dots,f_p)$ son nombre de Milnor.

On considère $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ une famille d'entiers naturels premiers entre eux ; étant donné $h=\sum a_I x^I$ un élément non nul de $\mathcal{O}$ (avec la notation classique $I=(i_1,\dots,i_n)$ multi-indice de $\mathbf{N}^n$, $x^I=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$), l'entier $\rho(h)=\inf\{\langle\alpha,I\rangle=\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_n i_n \mid a_I\neq 0\}$ s'appelle le poids de h (pour le système α) ; la partie initiale de h est alors :

$$\mathrm{in}(h)=\sum_{\langle\alpha,I\rangle=\rho(h)} a_I x^I.$$

Adresses e-mail : briancon@math.unice.fr (J. Briançon); hlm@tonton.univ-angers.fr (H. Maynadier-Gervais).

S1631-073X(02)02256-2/FLA

Cette partie initiale est un polynôme quasi-homogène pour le système α, de poids $\rho(h)$ (ou α-homogène de degré $\rho(h)$). Dans tout l'article, α est fixé, et souvent sous-entendu.

DÉFINITION 1.1. – On dit que la famille $f = (f_1, \ldots, f_p)$ est *semi-quasi-homogène* lorsque la famille des formes initiales $\mathrm{in}(f) = (\mathrm{in}(f_1), \ldots, \mathrm{in}(f_p))$ définit une intersection complète à singularité isolée.

Introduisons à présent le champ d'Euler associé à α :

$$\chi = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Pour une famille $f = (f_1, \ldots, f_p)$ de p éléments de $\mathcal{O}$, on note $\mathcal{J}(f)$ l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par les $p \times p$-mineurs extraits de la matrice jacobienne de f.

Enfin, lorsque J est un idéal de $\mathcal{O}$, primaire pour l'idéal maximal et engendré par une famille $(h_1, \ldots, h_l)$ d'éléments de $\mathcal{O}$, on note sa colongueur de la façon suivante : $\mathrm{col}(J) = \mathrm{col}(h_1, \ldots, h_l) = \dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{O}}{J}$.

THÉORÈME 1.1. – *Lorsque la famille* $f = (f_1, \ldots, f_p)$ *est semi-quasi-homogène pour le système* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*, de poids* $\rho(f) = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$*,* f *définit une intersection complète à singularité isolée dont le nombre de Milnor ne dépend que de* α *et* $\rho(f)$*, et vérifie l'égalité* :

$$\mu(f) = \mathrm{col}\big(\chi(f_1), \ldots, \chi(f_p), \mathcal{J}(f)\big). \qquad (\star)$$

Remarques. – Giusti [2] d'une part (dans le cas quasi-homogène), G.M. Greuel et H. Hamm [4], d'autre part, ont donné des formules explicites pour $\mu(f)$ en fonction de α et $\rho(f)$; dans [3], G.M. Greuel démontre le Théorème 1.1 dans le cas quasi-homogène.

Dans sa thèse, le second auteur de la présente note a donné une preuve simultanée des formules de M. Giusti et G.M. Greuel dans le cas quasi-homogène [6, théorème I.2.5, p. 29] ; c'est cette preuve que nous allons généraliser au cas semi-quasi-homogène.

Enfin, c'est T. Torrelli qui a eu l'idée d'étudier l'idéal $(\chi(f_1), \ldots, \chi(f_p), \mathcal{J}(f))$, et il a utilisé notre résultat dans [7, section 4].

2. Formule de Greuel–Lê et déformation sur le cône tangent tordu

Lorsque $(g_1, \ldots, g_p)$ et $(g_1, \ldots, g_p, g)$ définissent des intersections complètes à singularité isolée, les nombres de Milnor correspondants sont liés par la formule de Greuel–Lê [3,5] :

$$\mu(g_1, \ldots, g_p) + \mu(g_1, \ldots, g_p, g) = \mathrm{col}\big(g_1, \ldots, g_p, \mathcal{J}(g_1, \ldots, g_p, g)\big).$$

LEMME 2.1. – *On suppose que* $(g_1, \ldots, g_p)$ *et* $(g_1, \ldots, g_p, g)$ *sont semi-quasi-homogènes* ; *alors* :

$$\begin{aligned}\mu(g_1, \ldots, g_p) + \mu(g_1, \ldots, g_p, g) &= \mathrm{col}\big(g_1, \ldots, g_p, \mathcal{J}(g_1, \ldots, g_p, g)\big)\\ &= \mathrm{col}\big(\chi(g_1), \ldots, \chi(g_p), \mathcal{J}(g_1, \ldots, g_p, g)\big)\\ &= \mathrm{col}\big(\mathrm{in}(g_1), \ldots, \mathrm{in}(g_p), \mathcal{J}\big(\mathrm{in}(g_1), \ldots, \mathrm{in}(g_p), \mathrm{in}(g)\big)\big).\end{aligned}$$

Démonstration. – Considérons les déformations à un paramètre suivantes : $G_j(t) = t^{-\rho_j} g_j(t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n)$, $j = 1, \ldots, p$, et $G(t) = t^{-\rho} g(t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n)$ où, pour $j = 1, \ldots, p$, ρ_j est le poids de g_j, et ρ le poids de g.

En spécialisant t, on obtient dans $\mathcal{O}$: $G_j(0) = \mathrm{in}(g_j)$, $G(0) = \mathrm{in}(g)$, $G_j(1) = g_j$ et $G(1) = g$. En fait, dès que t est fixé non nul, on passe de $G_j(t)$ à g_j par changement de coordonnées.

Les idéaux $I_1 = (G_1, \ldots, G_p, \mathcal{J}(G_1, \ldots, G_p, G))$ et $I_2 = (\chi(G_1), \ldots, \chi(G_p), \mathcal{J}(G_1, \ldots, G_p, G))$ de $\mathcal{O}\{t\}$ sont deux déformations de l'idéal :

$$I = I_1(0) = I_2(0) = \big(\mathrm{in}(g_1), \ldots, \mathrm{in}(g_p), \mathcal{J}\big(\mathrm{in}(g_1), \ldots, \mathrm{in}(g_p), \mathrm{in}(g)\big)\big)$$

de $\mathcal{O}$ (précisons que nous notons ici $\mathcal{J}(G_1, \ldots, G_p, G)$ l'idéal engendré par les $(p+1) \times (p+1)$-mineurs de la matrice jacobienne, où n'interviennent que les dérivations par rapport aux variables x_i).

Les idéaux I_1 et I_2 définissent l'axe des t dans $\mathbf{C}^{n+1}$ (au voisinage de l'origine) : en effet, les idéaux initiaux $\mathrm{in}(I_1)$ et $\mathrm{in}(I_2)$ engendrés respectivement par les formes initiales des éléments de I_1 et I_2, lorsque l'on donne à t le poids 0, contiennent l'idéal $I \cdot \mathcal{O}\{t\}$. Or I contient une puissance de l'idéal maximal $\mathcal{M} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{O}$; on en déduit facilement que I_1 et I_2 contiennent une (la même !) puissance de $\mathcal{M} \cdot \mathcal{O}\{t\}$.

Un résultat classique permet d'affirmer que les algèbres locales $\mathbf{C}\{x, t\}/I_1$ et $\mathbf{C}\{x, t\}/I_2$ sont de Cohen–Macaulay (*voir* par exemple [1, Lemme 3, p. 128]), et que t est non diviseur de 0 dans ces algèbres. Ces algèbres sont donc des $\mathbf{C}\{t\}$-modules libres, et I_1 et I_2 sont des déformations de I à colongueur constante. $\square$

3. Le lemme d'échange

LEMME 3.1 (Lemme d'échange). – *On suppose que* $(g_1, \ldots, g_p, g)$, $(g_1, \ldots, g_p, h)$ *et* $(g_1, \ldots, g_p, g, h)$ *sont semi-quasi-homogènes.*

Si la formule $(\star)$ *est vérifiée pour* $(g_1, \ldots, g_p, g)$ *et* $(g_1, \ldots, g_p, g, h)$, *elle l'est également pour* $(g_1, \ldots, g_p, h)$.

Enonçons un résultat préliminaire algébrique (dont la preuve est élémentaire) : soit A un anneau commutatif, ϕ et ψ deux éléments de A non diviseurs de 0, L et M deux idéaux de A tels que $\phi L = \psi M$. Soit :

$$\dot{\phi} : \frac{A}{A\psi + L} \longrightarrow \frac{A}{A\psi} \quad \text{et} \quad \dot{\psi} : \frac{A}{A\phi + M} \longrightarrow \frac{A}{A\phi}$$

les multiplications par les classes de ϕ et ψ respectivement.

Alors l'injectivité de $\dot{\phi}$ équivaut à l'injectivité de $\dot{\psi}$.

Démontrons le lemme d'échange ; pour cela appliquons le résultat préliminaire :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mathcal{O}}{(\chi(g_1), \ldots, \chi(g_p), \mathcal{J}(g_1, \ldots, g_p, g, h))}, \\ \phi &= \text{la classe de } \chi(g) \text{ dans } A, \\ \psi &= \text{la classe de } \chi(h) \text{ dans } A, \\ L &= A\mathcal{J}(g_1, \ldots, g_p, h), \\ M &= A\mathcal{J}(g_1, \ldots, g_p, g). \end{aligned}$$

En utilisant le même argument que dans le Lemme 2.1, on montre que A est de Cohen–Macaulay et que $\chi(g)$ (ou $\chi(h)$) est un paramètre, donc non diviseur de 0.

Vérifions maintenant que $\chi(g)L = \chi(h)M$. Notons $(W_1, \ldots, W_n)$ les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne de $(g_1, \ldots, g_p, g, h)$, et W le vecteur colonne :

$$W = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i W_i = \begin{pmatrix} \chi(g_1) \\ \vdots \\ \chi(g_p) \\ \chi(g) \\ \chi(h) \end{pmatrix}.$$

Pour tout multi-indice $\{i_1, \ldots, i_{p+1}\}$, le développement dans A du déterminant $\mathrm{Det}\,(W, W_{i_1}, \ldots, W_{i_{p+1}})$ par rapport à la première colonne W fournit l'égalité dans A :

$$\chi(g)U_{i_1 \ldots i_{p+1}} = \chi(h)V_{i_1 \ldots i_{p+1}},$$

où $U_{i_1 \ldots i_{p+1}}$ (resp. $V_{i_1 \ldots i_{p+1}}$) est le $(p+1) \times (p+1)$-mineur de la matrice jacobienne de $(g_1, \ldots, g_p, h)$ (resp. $(g_1, \ldots, g_p, g)$) construit sur les colonnes d'indice $i_1, \ldots, i_{p+1}$. En faisant varier l'indice des colonnes, on parcourt ainsi les générateurs de L et M.

Le résultat préliminaire est donc applicable.

On a les suites exactes :

$$\frac{A}{A\phi+M}\xrightarrow{\dot\psi}\frac{A}{A\phi}\longrightarrow\frac{A}{A\phi+A\psi}\longrightarrow 0,\quad\text{et}\quad\frac{A}{A\psi+L}\xrightarrow{\dot\phi}\frac{A}{A\psi}\longrightarrow\frac{A}{A\phi+A\psi}\longrightarrow 0.$$

Un calcul élémentaire des colongueurs et l'utilisation du Lemme 2.1 permettent alors de conclure. □

4. Lemme de construction et preuve du théorème

Le lemme de construction suivant nous est fourni par M. Giusti [2, corollaire 2.5] :

LEMME 4.1. – *Soit $(g_1,\dots,g_p,g)$ une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée avec $p\leqslant n-2$, et τ un multiple commun de $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.*

Alors, pour un choix générique de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ dans $\mathbf{C}^n$ et $h=\lambda_1x_1^{\tau/\alpha_1}+\cdots+\lambda_nx_n^{\tau/\alpha_n}$, $(g_1,\dots,g_p,h)$ et $(g_1,\dots,g_p,g,h)$ sont des intersections complètes à singularité isolée.

Il est clair, vu la définition des semi-quasi-homogènes, que l'on peut prendre comme hypothèse du Lemme 4.1 : $(g_1,\dots,g_p,g)$ semi-quasi-homogène, et en conclusion : $(g_1,\dots,g_p,h)$ et $(g_1,\dots,g_p,g,h)$ semi-quasi-homogènes.

Nous pouvons démontrer maintenant le Théorème 1.1 par récurrence sur la dimension $n-p$ de la singularité.

Le cas $p=n$. – Par hypothèse, les formes initiales $\mathrm{in}(f_1),\dots,\mathrm{in}(f_n)$ forment une suite régulière de $\mathcal{O}$, et engendrent l'idéal initial de $(f_1,\dots,f_n)$ et $(\chi(f_1),\dots,\chi(f_n))$. On sait aussi que le jacobien $\mathcal{J}(f_1,\dots,f_n)$ engendre le socle de l'algèbre quotient $\mathcal{O}/(f_1,\dots,f_n)$. On obtient ainsi facilement :

$$\mu(f_1,\dots,f_n)=\mathrm{col}(f_1,\dots,f_n)-1=\mathrm{col}\big(\chi(f_1),\dots,\chi(f_n)\big)-1=\mathrm{col}\big(\chi(f_1),\dots,\chi(f_n),\mathcal{J}(f_1,\dots,f_n)\big).$$

Le cas général $p<n$. – Soit τ un multiple commun des α_i. Etant donné $f=(f_1,\dots,f_p)$ semi-quasi-homogène, on construit par récurrence sur $p-j$, grâce au lemme de construction 4.1, une famille $(h_1,\dots,h_p)$ intersection complète quasi-homogène où chaque fonction h_j $(j=1,\dots,p)$ est une combinaison linéaire générique de $x_1^{\tau/\alpha_1},\dots,x_n^{\tau/\alpha_n}$, telle que $(f_1,\dots,f_j,h_j,\dots,h_p)$ et $(f_1,\dots,f_{j-1},h_j,\dots,h_p)$ soient des germes semi-quasi-homogènes.

Par récurrence, et en appliquant le lemme d'échange, on est alors ramené à établir la formule $(\star)$ pour $(h_1,\dots,h_p)$. Mais ce n'est rien d'autre que la formule de G.M. Greuel. (On peut aussi obtenir ce dernier cas, toujours par le lemme d'échange et l'hypothèse de récurrence, en démontrant la formule pour la famille $(x_1,\dots,x_p)$ [6, p. 30].) □

Références bibliographiques

[1] H. Biosca, J. Briançon, Ph. Maisonobe, H. Maynadier, Espaces conormaux relatifs. II. Modules différentiels, Publ. RIMS Kyoto Univ. 34 (1998) 123–134.

[2] M. Giusti, Intersections complètes quasi-homogènes. I. Calcul d'invariants, Centre de Math. de l'École Polytechnique, 1979.

[3] G.M. Greuel, Der Gauß–Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, Math. Ann. 214 (1975) 235–266.

[4] G.M. Greuel, H. Hamm, Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte, Invent. Math. 49 (1978) 67–86.

[5] D.T. Lê, Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection, Funct. Anal. Appl. 8 (1974) 127–131.

[6] H. Maynadier, Equations fonctionnelles pour une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée et un germe semi-quasi-homogène, Thèse de doctorat de l'Université de Nice–Sophia Antipolis, 1996.

[7] T. Torrelli, Polynômes de Bernstein associés à une fonction sur une intersection complète à singularité isolée, Ann. Inst. Fourier (à paraître).