C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 395–400

Topologie différentielle/*Differential Topology*

Forme harmonique duale à un cycle quasi-fuchsien

Nicolas Bergeron

Laboratoire de mathématiques, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 19 octobre 2001 ; accepté le 30 octobre 2001

Note présentée par Etienne Ghys.

Résumé Suivant l'approche de [2,3], on décrit une construction explicite de la forme harmonique duale à une surface quasifuchsienne dans une variété hyperbolique de dimension 3. ***Pour citer cet article : N. Bergeron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 395–400.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Dual harmonic form to a quasi-Fuchsian cycle

Abstract Following the ideas of [2,3], we describe an explicit construction of the dual harmonic form to a quasi-Fuchsian surface in a hyperbolic 3-manifold. ***To cite this article: N. Bergeron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 395–400.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let M be a hyperbolic 3-manifold. We suppose that M contains an embedded *quasi-Fuchsian* surface S (i.e., $\pi_1 S$ is a quasi-Fuchsian subgroup of $\pi_1 M$). The aim of this Note is to describe an explicit construction of the dual harmonic form to S in M.

We write M as $\mathbb{H}^3/K$ where $\mathbb{H}^3$ is the hyperbolic 3-space and K a torsion-free, Kleinian group. Let δ be the critical exponent of K, let $\Lambda = \pi_1(S)$ and let $N(S)$ be the image of the convex core of $\mathbb{H}^3/\Lambda$ in M by the covering projection.

The limit set $L(\Lambda)$ of Λ in $\mathbb{S}^2_\infty$ (the boundary at infinity of $\mathbb{H}^3$) is a quasi-circle C which separates $\mathbb{S}^2_\infty$ into two topological disks D_1 and D_2. The orientations of $\mathbb{H}^3$ and of a universal cover $\widetilde{S}$ of S give a transversal orientation to $\widetilde{S}$ which we suppose directed from D_1 to D_2. Let then f be the function in $\mathrm{L}^1(\mathbb{S}^2_\infty)$ equal to 0 on D_1 and to 1 on D_2.

In the Euclidean coordinates of the unit ball, the Poisson kernel of $\mathbb{H}^3$ is given by:

$$P(x,u) = \frac{1-||x||^2}{||u-x||^2}.$$

In the coordinates $x = (z, y) \in \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^*_+$ and $u \in \overline{\mathbb{C}}$ of the half-space, the Poisson kernel is given by:

$$P(x,u) = \frac{y(|u|^2+1)}{|z-u|^2+y^2}.$$

We associate to f the function:

$$F(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2_\infty} f(u)P(x,u)^2\,\mathrm{dvol}(u). \tag{1}$$

Adresse e-mail : nicolas.bergeron@math.u-psud.fr (N. Bergeron).

S1631-073X(02)02211-2/FLA

DEFINITION. – *We will say that a square integrable* 1*-form* ω *on* M *is* L^2*-dual to* S (*in* M) *if for every square integrable* 2*-form* α *on* M,

$$\int_M \alpha \wedge \omega = \int_S \alpha.$$

Let's denote:

$$G = \sqrt{1-(2F-1)^2} \quad \text{and} \quad \kappa(s) = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{3}{2})}.$$

In this Note we prove:

THEOREM I. – *The Poincaré series*

$$\omega_s = \frac{1}{\kappa(s)} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash K} \gamma^*\bigl(G^{2s}\,\mathrm{d}F\bigr)$$

is uniformly convergent on compact subsets of $\mathbb{H}^3$ *for* $\mathrm{Re}(s) > \frac{\delta}{2} - 1$, *and gives a* C^∞ *closed form on* M *which is* L^2*-dual to* S. *Moreover, the series* ω_s *can be continuously extended in* $s = 0$ *to give the* L^2*-dual harmonic form to* S *in* M *as* $\lim_{s\to 0}\omega_s$, *limit of convergent series.*

Dans la suite de cette Note, on suppose fixées les notations ci-dessus et on démontre le :

THÉORÈME I. – *La série de Poincaré*

$$\omega_s = \frac{1}{\kappa(s)} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash K} \gamma^*\bigl(G^{2s}\,\mathrm{d}F\bigr)$$

converge pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{\delta}{2} - 1$, *uniformément sur les compacts de* $\mathbb{H}^3$ *et représente une forme fermée* C^∞ *sur* M, L^2*-duale à* S. *De plus, les séries* ω_s *se prolongent continûment en* $s = 0$ *pour donner la forme harmonique* L^2*-duale à* S *dans* M *comme* $\lim_{s\to 0}\omega_s$, *limite de séries convergentes.*

1. Dans la suite, notons $T = \mathbb{H}^3/\Lambda$. D'après un théorème de Stallings [5], la variété T est difféomorphe au produit $S \times]-\infty, +\infty[$. Notons $N_T(S)$ la projection du cœur de Nielsen de Λ dans T. On notera $R = R(x)$ la distance orientée (conformément à l'orientation transverse à $\widetilde{S}$ choisie) d'un point $x \in T$ à $N_T(S)$, chaque $R \neq 0$ définit une hypersurface S_R de T de classe C^1 et difféomorphe à S.

LEMME A. – *Soit* $x \in T$. *Alors, si* $R = R(x) > 0$, $|F(x) - 1|$ *est de l'ordre de* $\mathrm{e}^{-2|R|}$ *et si* $R < 0$, $|F(x)|$ *est de l'ordre de* $\mathrm{e}^{-2|R|}$.

Démonstration. – En effet, cela découle simplement de l'expression (1) de F et du fait que la métrique sur S_R est multipliée par un facteur de l'ordre $\mathrm{e}^{|R|}$. Donc l'élément d'aire est multiplié par un facteur de l'ordre de $\mathrm{e}^{2|R|}$ (*cf.* [4] pour plus de détails).

On déduit facilement du lemme A, de la proposition 18 de [1] et du fait que $\int_{x\times]-\infty,+\infty[} \mathrm{d}F = 1$ (pour tout $x \in S$), la proposition suivante :

PROPOSITION B. – *La différentielle* $\mathrm{d}F$ *définit une* 1*-forme harmonique* L^2 *sur* T, L^2*-duale à* S (*dans* T) *et dont la norme riemannienne en un point* $x \in S_R$ *est de l'ordre de* $\mathrm{e}^{-2|R|}$.

2. D'après le lemme A, en un point $x \in S_R$, $|G(x)|$ est de l'ordre de $\mathrm{e}^{-|R|}$.

Nous allons considérer la forme fermée $\phi_s = G^{2s}\,\mathrm{d}F$ ($s \in \mathbb{C}$) sur T. Rappelons que l'on a une fibration de T sur S. Un calcul d'intégrale classique montre que si $\kappa(s) = \int_{\text{fibre}} \phi_s$ (l'intégrale ne dépend pas du choix de la fibre, d'après la définition de f), alors on a :

$$\kappa(s) = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{3}{2})}.$$

Ainsi $1/\kappa(s)$ n'a de pôles qu'en les points $s=-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},-\frac{7}{2},\ldots$.

On obtient donc le lemme suivant :

LEMME C. – *Pour tout $s\neq-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\ldots$ la forme différentielle $\psi_s:=\frac{1}{\kappa(s)}G^{2s}\,\mathrm{d}F$ est une* 1*-forme fermée* L^2 *sur T,* L^2*-duale à S (et harmonique si $s=0$).*

LEMME D. – *La série de Poincaré*

$$\omega_s=\frac{1}{\kappa(s)}\sum_{\Lambda\backslash K}\gamma^*\big(G^{2s}\,\mathrm{d}F\big)$$

converge pour $\mathrm{Re}(s)>\frac{\delta}{2}-1$*, uniformément sur les compacts de* $\mathbb{H}^3$.

Démonstration. – Nous allons montrer que pour $\mathrm{Re}(s)>\frac{\delta}{2}-1$, la série $\sum_{\Lambda\backslash K}\|\gamma^*(G^{2s}\,\mathrm{d}F)\|$ est convergente. Soit $x\in T$. On doit montrer que la série $\sum_{\Lambda\backslash K}\mathrm{e}^{-2(\sigma+1)|R(\gamma x)|}$ converge (où $\sigma=\mathrm{Re}(s)$).

La variété S est compacte, il existe donc un réel $\varepsilon>0$ et un point $x_0\in S$ tels que pour tout $\gamma\in K$ et tout $x\in S$,

$$\big|R(\gamma x)\big|\geqslant d(\gamma x,x_0)-\varepsilon.$$

En particulier, il existe une constante C, indépendante de $x\in S$, telle que

$$\mathrm{e}^{-2(\sigma+1)|R(\gamma x)|}\leqslant C\,\mathrm{e}^{-2(\sigma+1)d(\gamma x,x_0)}.$$

Mais, par définition de δ, la série $\sum_K\mathrm{e}^{-2(\sigma+1)d(\gamma x,x_0)}$ est uniformément convergente (en x) sur tout compact pour $\sigma>\frac{\delta}{2}-1$.

COROLLAIRE. – *Pour* $\mathrm{Re}(s)>\frac{\delta}{2}-1$*, la série de Poincaré ω_s représente une forme fermée* C^∞ *sur M,* L^2*-duale à S.*

3. Avant de prolonger la famille $\{\omega_s\}$ en $s=0$ (lorsque $\delta=2$), nous allons montrer comment cette description explicite d'une forme duale peut permettre d'obtenir des résultats sur la cohomologie de certaines variétés hyperboliques de dimension 3.

Rappelons que l'on a noté $N(S)$ la projection de $N_T(S)$ dans M. Soit $RN(S)$ le *rayon d'injectivité normal* de $N(S)$ dans M (i.e. l'infimum des distances entre deux translatés par K du cœur convexe de Λ dans $\mathbb{H}^3$). On peut montrer le :

THÉORÈME II. – *Supposons K convexe-cocompact et $\delta<2$. Soit $r(K)$ le rayon d'injectivité de $\mathbb{H}^3/K$. Il existe une constante $C=C(\delta,r(K))<+\infty$ telle que si $RN(S)>C$* $\mathrm{diam}(N(S))$*, alors $[S]$ est non triviale dans $H_2(M)$ (et même en homologie* L^2*).*

Esquisse de démonstration. – Puisque $\delta<2$, la forme ω_0 est bien définie et harmonique. Montrons qu'il existe une constante $C=C(\delta,r(K))<+\infty$ telle que si $RN(S)>C\,\mathrm{diam}(N(S))$, alors $\int_S*\omega_0\neq0$. On suppose S simpliciale et contenue dans $N(S)$.

Découpons l'intégrale $\int_S*\omega_0$ en deux :

$$I=\int_S*\psi_0$$

(où ψ_0 est la forme différentielle définie au lemme C) et

$$\Sigma=\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash K-\{e\}}\int_{\gamma\hat{S}}*\psi_0,$$

où $\hat{S}$ est un relevé dans $\mathbb{H}^3$, domaine fondamental de S. On a :

$$\left|\int_{\gamma S}*\psi_0\right|\leqslant\mathrm{const}\,\mathrm{e}^{-2d(S,\gamma S)}\,\mathrm{aire}(\gamma S).$$

Fixons un point x_0 dans $N(S)$ et notons D le diamètre de $N(S)$. Alors :

$$\left|\int_{\gamma S}*\psi_0\right|\leqslant\mathrm{const}\,\mathrm{e}^{-2d(x_0,\gamma x_0)+2D}\,\mathrm{aire}(S).$$

Notons $N(t, x_0, x_0)$ le nombre d'éléments γ dans K tels que $d(x_0, \gamma x_0) \leqslant t$. Puisque K est convexe-cocompact, il admet une densité conforme invariante de dimension δ (*cf.* [6]) et la démonstration du théorème 4.5.1 de [4] implique le :

Fait. – Il existe une constante A ne dépendant que du rayon d'injectivité de K, $r(K)$, telle que

$$N(t, x_0, x_0) < A\,\mathrm{e}^{t\delta}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} |\Sigma| &\leqslant \mathrm{const}\,\mathrm{e}^{2D} \sum_{\gamma \neq e} \mathrm{e}^{-2d(x_0,\gamma x_0)}\,\mathrm{aire}(S) \leqslant \mathrm{const}\,\mathrm{e}^{2D} \int_{RN(S)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}N(t, x_0, x_0)\,\mathrm{aire}(S) \\ &\leqslant \mathrm{const}\,\mathrm{e}^{2D} \left\{ \left[\mathrm{e}^{-2t} N(t, x_0, x_0)\right]_{RN(S)}^{+\infty} + 2\int_{RN(S)}^{+\infty} N(t, x_0, x_0)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{aire}(S) \\ &\leqslant \mathrm{const}\,A\,\mathrm{e}^{2D}\,\mathrm{e}^{(\delta-2)RN(S)}\,\mathrm{aire}(S). \end{aligned}$$

Enfin, la description explicite de ψ_0 donnée par l'équation (1) permet de montrer que :

$$|I| = \int_T ||\psi_0||^2 \geqslant C(\delta)\,\mathrm{aire}(S).$$

Ainsi pour que la classe d'homologie $[S]$ soit non triviale, il suffit que $|I|$ soit strictement supérieure à $|\Sigma|$. Ce qui permet de conclure la démonstration du théorème.

4. Traitons le cas où l'exposant critique est 2.

À l'aide de l'écriture (1) de F, on obtient facilement le :

LEMME E. – *La fonction F est harmonique et* L^2 *au voisinage de tout point de D_1. Plus précisemment, dans les coordonnées (z, y) du demi-espace et dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point de D_1, la fonction F, vue comme une famille de fonctions F_y en z dépendante du paramètre y, s'écrit, lorsque y tend vers* 0,

$$F_y = a(z)y^2 + \mathcal{O}\big(y^3\big).$$

Soit :

$$H(x) = \log\left(\frac{2F(x)}{G(x)}\right).$$

On vérifie facilement que

$$G^{2s}\,\mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}H}{2\cosh^{2s+2}(H)}.$$

Notons Δ le laplacien sur les 1-formes de M. Un calcul simple donne le :

LEMME F. –

$$\begin{aligned} \Delta\big(G^{2s}\,\mathrm{d}F\big) &= \mathrm{d}\left[s\tanh(H)\left(\frac{1}{\cosh^2(H)}\right)^{s-1}\left\|\frac{dH}{\cosh^2(H)}\right\|^2\right] \\ &= -2s(s+1)\frac{\|\mathrm{d}H\|^2}{\cosh^{2s+2}(H)}\,\mathrm{d}H + s(2s+3)\frac{\|\mathrm{d}H\|^2}{\cosh^{2s+4}(H)}\,\mathrm{d}H \\ &\quad + s\frac{\sinh(H)}{\cosh^{2s+3}(H)}\mathrm{d}\big(\|dH\|^2\big). \end{aligned}$$

Grâce au lemme E, on peut montrer la :

PROPOSITION G. – *Dans les coordonnées (z, y) du demi-espace et au voisinage $\mathcal{U}$ d'un point de $D_1 \cup D_2$, la fonction $\Delta(G^{2s}\,\mathrm{d}F) + 2s(s+1)G^{2s}\,\mathrm{d}F$, vue comme une famille de formes différentielles sur le bord à l'infini, dépendante du paramètre y, est un $\mathcal{O}(y^{2(s+1)+1})$ lorsque y tend vers* 0.

Démonstration. – Il suffit de montrer la proposition au voisinage d'un point de D_1.
Remarquons que $\tanh(H) = 2F - 1$ et que $G^2 = 4F(1-F)$. Alors, le lemme F implique :

$$\begin{aligned}\Delta\left(G^{2s}\,\mathrm{d}F\right) &= \mathrm{d}\left[s(2F-1)\left(4F(1-F)\right)^{s-1}\|2\,\mathrm{d}F\|^2\right]\\ &= 2^{2s+1}s\left(F(1-F)\right)^{s-1}\|\mathrm{d}F\|^2\,\mathrm{d}F - 2^{2s}s(s-1)(1-2F)^2\left(F(1-F)\right)^{s-2}\|\mathrm{d}F\|^2\,\mathrm{d}F\\ &\quad + 2^{2s}s(2F-1)\left(F(1-F)\right)^{s-1}\mathrm{d}\left(\|\mathrm{d}F\|^2\right).\end{aligned}$$

Mais au voisinage d'un point de D_1, la fonction F s'écrit :

$$F = a(z)y^2 + \mathcal{O}\left(y^3\right).$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= \mathrm{d}a(z)y^2 + 2a(z)y\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^3\right),\\ \|\mathrm{d}F\|^2 &= 4a(z)^2y^4 + \mathcal{O}\left(y^5\right)\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{d}\left(\|\mathrm{d}F\|^2\right) = 8y^4a(z)\,\mathrm{d}a(z) + 16y^3a(z)^2\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^5\right).$$

On obtient donc qu'au voisinage d'un point de D_1 :

$$\begin{aligned}\Delta\left(G^{2s}\mathrm{d}F\right) &= 2^{2s+1}s\left(F(1-F)\right)^{s-1}\left(4a(z)^2y^4 + \mathcal{O}\left(y^5\right)\right)\left(\mathrm{d}a(z)y^2 + 2a(z)y\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^3\right)\right)\\ &\quad - 2^{2s}s(s-1)(1-2F)^2\left(F(1-F)\right)^{s-2}\left(4a(z)^2y^4 + \mathcal{O}\left(y^5\right)\right)\left(\mathrm{d}a(z)y^2 + 2a(z)y\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^3\right)\right)\\ &\quad + 2^{2s}s(2F-1)\left(F(1-F)\right)^{s-1}\left(8y^4a(z)\,\mathrm{d}a(z) + 16y^3a(z)^2\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^5\right)\right)\\ &= 2^{2s}\left(2sF(1-F) - s(s-1)(1-2F)^2\right)\left(F(1-F)\right)^{s-2}\left(4a(z)^2y^6\,\mathrm{d}a(z)\right.\\ &\quad \left. + 8a(z)^3y^5\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^7\right)\right) + 2^{2s}s(2F-1)\left(F(1-F)\right)^{s-1}\left(8y^4a(z)\,\mathrm{d}a(z)\right.\\ &\quad \left. + 16y^3a(z)^2\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^5\right)\right)\\ &= 2^{2s}\left(s(1-s) + \mathcal{O}\left(y^2\right)\right)(1-F)^{s-2}\left(4a(z)^sy^{2(s+1)}\,\mathrm{d}a(z) + 8a(z)^{s+1}y^{2s+1}\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^{2s+3}\right)\right)\\ &\quad + 2^{2s}s\left(-1 + \mathcal{O}\left(y^2\right)\right)(1-F)^{s-1}\left(8y^{2(s+1)}a(z)^s\,\mathrm{d}a(z) + 16y^{2s+1}a(z)^{s+1}\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^{2s+3}\right)\right)\\ &= -2^{2(s+1)}s(s+1)\left(a(z)^sy^{2(s+1)}\,\mathrm{d}a(z) + 2y^{2s+1}a(z)^{s+1}\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^{2s+3}\right)\right).\end{aligned}$$

Or $G^{2s}\,\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cosh^2(H)}\right)^s\frac{\mathrm{d}H}{\cosh^2(H)}$, donc au voisinage d'un point de D_1 :

$$G^{2s}\,\mathrm{d}F = \left(4F(1-F)\right)^s\,\mathrm{d}F = 2^{2s}\left(a(z)^sy^{2(s+1)}\,\mathrm{d}a(z) + 2y^{2s+1}a(z)^{s+1}\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(y^{2s+3}\right)\right).$$

On conclut alors facilement la démonstration de la proposition.

5. Prolongement de la famille $\{\omega_s\}$.

Seul le cas où l'exposant critique δ vaut 2 reste à traiter. Pour simplifier, nous supposerons la variété M compacte (le cas général ne nécessite que quelques détails techniques supplémentaires similaires à ce que l'on peut trouver dans [1]).

Pour tout s complexe de partie réelle strictement positive, la série de Poincaré ω_s converge et définit une forme fermée L^2 sur M. Soit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ une base orthonormale de 1-formes propres pour le laplacien Δ sur M. On suppose que $\Delta\nu_n = \lambda_n\nu_n$ avec $0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$. Alors pour $\operatorname{Re} s > 0$ on peut écrire

$$\omega_s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)\nu_n.$$

Remarquons que toutes les formes ω_s étant cohomologues entre elles, $a_n(s)$ ne dépend pas de s lorsque $n \leqslant p$. On a donc :

$$\|\omega_s\|^2 = \sum_n |a_n(s)|^2 = \sum_{n=1}^{p} |a_n|^2 + \sum_{n>p} \frac{1}{\lambda_n^2} |\lambda_n a_n|^2 \leqslant K + \frac{1}{\lambda_{p+1}^2} \|\Delta\omega_s\|^2,$$

où K est une constante. Il existe donc deux constantes A, B telles que

$$\|\omega_s\| \leqslant A||\Delta\omega_s|| + B.$$

En particulier :

$$\|\omega_s\| \leqslant A\big\|\Delta\omega_s + 2s(s+1)\omega_s\big\| + 2As(s+1)\|\omega_s\| + B.$$

Mais d'après la proposition G et la démonstration du lemme D, la série

$$\Delta\omega_s + 2s(s+1)\omega_s = \frac{1}{\kappa(s)} \sum_{\Lambda\backslash K} \gamma^*\big(\Delta\big(G^{2s}\,\mathrm{d}F\big) + 2s(s+1)G^{2s}\,\mathrm{d}F\big)$$

est convergente pour $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$ et elle est donc uniformément bornée au voisinage de $s = 0$ par une constante C. On obtient donc, au voisinage de $s = 0$:

$$\big(1 - 2As(s+1)\big)\|\omega_s\| \leqslant AC.$$

Autrement dit ω_s est uniformément bornée au voisinage de zéro. On conclut alors facilement la démonstration du Théorème I.

6. Question et conclusion.

Question. – Le théorème II reste-t-il vrai lorsque $\delta = 2$?

Cette question peut-être liée à la conjecture de Waldhausen. En effet, cette dernière stipule que toute variété de dimension 3 Haken admet un revêtement fini avec un premier nombre de Betti non nul. Elle reste à démontrer lorsque la variété est hyperbolique compacte et contient une surface quasi-fuchsienne. Une réponse positive à la question ci-dessus donnerait donc un critère de non nullité du premier nombre de Betti d'une telle variété.

Concluons cette Note en remarquant que lorsque S est une sous-variété totalement géodésique de M, un calcul simple montre que dans $T = S \times\,]-\infty, \infty[$ et en notant R la deuxième coordonnée (la distance hyperbolique à S) on a :

$$F = \frac{1}{2}(1 + \tanh R), \quad G = \frac{1}{\cosh R} \quad \text{et} \quad H = R.$$

On retrouve ainsi la construction de la forme harmonique duale telle que présentée dans [2] et [3]. Dans ce cadre le théorème II et le lemme d'effeuillage de [1] permettent de montrer que tout cycle géodésique de codimension 1 dans une variété hyperbolique de dimension 3 convexe-cocompact et non compacte se relève à un revêtement fini en un cycle non homologue à zéro.

Références bibliographiques

[1] Bergeron N., Cycles géodésiques dans les variétés hyperboliques, Thèse de l'ENS Lyon, 2000.

[2] Kudla S.S., Millson J.J., Harmonic differentials and closed geodesics on a Riemann surface, Invent. Math. 54 (3) (1979) 193–211.

[3] Kudla S.S., Millson J.J., Geodesic cyclics and the Weil representation. I. Quotients of hyperbolic space and Siegel modular forms, Compositio Math. 45 (2) (1982) 207–271.

[4] Nicholls P.J., The Ergodic Theory of Discrete Groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 143, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] Stallings J., On Fibering Certain 3-Manifolds, Topology of 3-Manifolds, Prentice-Hall, 1962, 95–100.

[6] Sullivan D., The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. IHES 50 (1979) 171–202.