Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 15–18

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Sur la compacité des multimesures (II)

On compactness of set-valued measures (II)

Kenny Koffi Siggini

BP 75, Lome, Togo

Reçu le 24 juin 2002 ; accepté après révision 27 novembre 2002

Présenté par Paul Malliavin

Résumé

Ce papier complète l'article de Siggini (C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 334 (2002) 949–952). Nous donnons une autre caractérisation des parties compactes de l'espace des multimesures positives $\mathcal{K}$-régulières muni de la s-topologie. Nous en déduisons celle de Topsøe pour les mesures réelles positives (Stud. Math. XXXVI (1970) 208). ***Pour citer cet article : K.K. Siggini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

This paper completes the article by Siggini (C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 334 (2002) 949–952). We prove another criterion of compactness in the space of positive $\mathcal{K}$-regular set-valued measures endowed with the s-topology. We deduce from this Topsøe's criterion for real nonnegative measures (Stud. Math. XXXVI (1970) 208). ***To cite this article: K.K. Siggini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Notations et définitions. Les notations et terminologies introduites dans [2] seront utilisées ici. On note T un ensemble quelconque, $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ des ensembles de parties de T, $\mathcal{B}$ la σ-algèbre engendrée par l'ensemble des parties A de T telles que pour tout $K \in \mathcal{K}$, $K \cap A \in \mathcal{K}$. On désigne par E un espace de Banach, E' son dual topologique et $\mathrm{ck}(E)$ l'espace des parties convexes compactes non vides de E, muni de la topologie de Hausdorff. Nous notons $\widetilde{M}_+(T, \mathrm{ck}(E))$ l'ensemble des multimesures positives définies sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathrm{ck}(E)$ et $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$ le sous-ensemble de $\widetilde{M}_+(T, \mathrm{ck}(E))$ formé de multimesures $\mathcal{K}$-régulières. L'ensemble des mesures réelles positives (resp. positives $\mathcal{K}$-régulières) définies sur $\mathcal{B}$ est noté $M_+(T)$ (resp. $M_+(T, \mathcal{K})$). Etant donné $M \in \widetilde{M}_+(T, \mathrm{ck}(E))$ et $y \in E'$ on note $\delta^*(y|M(\cdot))$ la mesure réelle positive définie sur $\mathcal{B}$ par $\delta^*(y|M(\cdot))(A) = \delta^*(y|M(A))$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. Pour toute partie X de E, $\delta^*(y|X) = \sup\{y(x);\ x \in X\}$.

Adresse e-mail : ksiggini@hotmail.com (K.K. Siggini).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(02)00027-4

Définition 1 [3]. On appelle topologie de la convergence étroite sur $\widetilde{M}_+(T,\mathrm{ck}(E))$ la moins fine des topologies sur $\widetilde{M}_+(T,\mathrm{ck}(E))$ rendant continue l'application $M \mapsto M(T)$ et semi-continues inférieurement les applications $M \mapsto \delta^*(y|M(G)),\ y \in E',\ G \in \mathcal{G}$.

On dit qu'une suite généralisée $(M_i),\ i \in I$, d'éléments de $\widetilde{M}_+(T,\mathrm{ck}(E))$ converge étroitement vers M si elle converge vers M pour la topologie étroite. Notons que (M_i) converge étroitement vers M si et seulement si $(M_i(T))$ converge vers $M(T)$ dans $\mathrm{ck}(E)$ et pour tout $y \in E'$, pour tout $G \in \mathcal{G}$ $\liminf_i \delta^*(y|M_i(G)) \geqslant \delta^*(y|M(G))$.

La s-topologie sur $\widetilde{M}_+(T,\mathrm{ck}(E))$ est la moins fine des topologies sur $\widetilde{M}_+(T,\mathrm{ck}(E))$ rendant continues les applications $M \mapsto M(A),\ A \in \mathcal{B}$.

L'ensemble $\widetilde{M}_+(T,\mathcal{K},\mathrm{ck}(E))$ sera muni de la topologie induite par celle qui sera considérée sur $\widetilde{M}_+(T,\mathrm{ck}(E))$. La topologie de la convergence étroite et la s-topologie sur $M_+(T)$ (resp. $M_+(T,\mathcal{K})$) sont définies de manière analogue.

On considère sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ les axiomes suivants :

(I) $\mathcal{K}$ est stable pour les réunions finies, les intersections dénombrables et $\emptyset \in \mathcal{K}$.
(II) $\mathcal{G}$ est stable pour les réunions et les intersections finies, $\emptyset \in \mathcal{G}$.
(III) Pour tout $K \in \mathcal{K}$, pour tout $G \in \mathcal{G}$, $K \backslash G \in \mathcal{K}$.
(IV) $\mathcal{G}$ sépare les éléments de $\mathcal{K}$ c'est-à-dire pour tous $K, K' \in \mathcal{K}$ disjoints, il existe $G,\ G'$ dans $\mathcal{G}$ disjoints tels que $K \subset G$ et $K' \subset G'$.
(V) $\mathcal{K}$ est semi-compact c'est-à-dire toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{K}$ qui possède la propriété de l'intersection finie a une intersection non vide.

Dans toute la suite les lettres majuscules K, G, A avec ou sans indices désigneront les éléments de $\mathcal{K},\ \mathcal{G},\ \mathcal{B}$ respectivement.

Lemme 2. *Soient $(\mu_i), i \in I$, une suite généralisée d'éléments de $M_+(T,\mathcal{K}), \mu \in M_+(T,\mathcal{K})$ et $(G_k), k \in \mathbb{N}^*$, une suite d'éléments de $\mathcal{G}$ mutuellement disjoints tels que $\lim_i \mu_i(G_k) = \mu(G_k)$ pour tout k et $\lim_i \mu_i(\bigcup_j G_j) = \mu(\bigcup_j G_j)$. Alors $\lim_i(\sum_{k=1}^{+\infty} |\mu_i(G_k) - \mu(G_k)|) = 0$.*

Lemme 3. *Soit H une partie de $\widetilde{M}_+(T,\mathcal{K},\mathrm{ck}(E))$ telle que pour tout $G \in \mathcal{G}$ $\{M(G);\ M \in H\}$ soit relativement compact dans $\mathrm{ck}(E)$. Si toute suite généralisée d'éléments de H contient une sous-suite généralisée qui converge étroitement dans $\widetilde{M}_+(T,\mathcal{K},\mathrm{ck}(E))$ alors il en sera de même pour toute suite généralisée d'éléments de $\delta(H) = \{\delta^*(y|M(\cdot));\ M \in H,\ y \in E',\ |y| \leqslant 1\}$ dans $M_+(T,\mathcal{K})$.*

Démonstration. Soit $(\delta^*(y_i|M_i(\cdot))),\ i \in I$, une suite généralisée d'éléments de $\delta(H)$. La suite généralisée $(M_i), i \in I$, contient une sous-suite généralisée qui converge étroitement vers M. La boule unité fermée B' de E' étant une partie compacte de E' muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$, on peut extraire aussi de (y_i) une sous-suite généralisée qui converge vers $y \in B'$. On peut donc trouver deux sous-suites généralisées, l'une de (M_i) l'autre de (y_i) ayant les mêmes indices, qui convergent respectivement vers M et y. Pour alléger la notation ces sous-suites seront notées comme les suites elles-mêmes. Considérons maintenant une ultrasuite généralisée $(M_{i_k}),\ k \in I$, ([2], Définition 6) extraite de la sous-suite généralisée (M_i) si celle-ci n'en était pas une. Prouvons que la sous-suite généralisée $(\delta^*(y_{i_k}|M_{i_k}(\cdot))),\ k \in I$, converge étroitement vers $\delta^*(y|M(\cdot))$. On a :

$$\begin{aligned}&\left|\delta^*\big(y_{i_k}|M_{i_k}(T)\big) - \delta^*\big(y|M(T)\big)\right| \\ &\quad\leqslant \sup_{|y|\leqslant 1}\left(\left|\delta^*\big(y|M_{i_k}(T)\big) - \delta^*\big(y|M(T)\big)\right|\right) + \left|\delta^*\big(y_{i_k}|M(T)\big) - \delta^*\big(y|M(T)\big)\right|.\end{aligned}$$

Comme (M_{i_k}) converge étroitement vers M, la suite $(M_{i_k}(T))$ converge vers $M(T)$ dans $\mathrm{ck}(E)$. D'autre part $(\delta^*(y_{i_k}|M(T)))$ converge vers $\delta^*(y|M(T))$ car l'application $\delta^*(\cdot|M(T)) : B' \to \mathbb{R}(y \mapsto \delta^*(y|M(T)))$ est continue pour la topologie induite sur B' par la topologie $\sigma(E', E)$ de E'. L'inégalité précédente montre que $(\delta^*(y_{i_k}|M_{i_k}(T)))$ converge vers $\delta^*(y|M(T))$. Soit $G \in \mathcal{G}$; comme $\{M(G); M \in H\}$ est relativement compact dans $\mathrm{ck}(E)$ l'ultrasuite généralisée $(M_{i_k}(G))$ converge vers un élément C de $\mathrm{ck}(E)$. En reprenant les arguments développés dans les lignes précédentes, on démontre que $(\delta^*(y_{i_k}|M_{i_k}(G)))$ converge vers $\delta^*(y|C)$. Aussi avons-nous $\lim_k \delta^*(y|M_{i_k}(G)) = \delta^*(y|C)$ et $\liminf_k \delta^*(y|M_{i_k}(G)) \geqslant \delta^*(y|M(G))$ car (M_{i_k}) converge étroitement vers M. D'où $\delta^*(y|C) \geqslant \delta^*(y|M(G))$ et $\liminf_k \delta^*(y_{i_k}|M_{i_k}(G)) \geqslant \delta^*(y|M(G))$. La démonstration est achevée.

Théorème 4. *Soient T un ensemble, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ des ensembles de parties de T qui satisfont aux axiomes* (I)–(V). *Soit $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$ l'espace des multimesures positives $\mathcal{K}$-régulières définies sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans* $\mathrm{ck}(E)$ *muni de la s-topologie.*

Pour qu'une partie H de $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$ soit relativement compacte il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites.

(i) *Toute suite généralisée d'éléments de H contient une sous-suite généralisée qui converge étroitement dans $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$.*
(ii) *Pour tout $G \in \mathcal{G}$, $\{M(G);\ M \in H\}$ et $\{M(T);\ M \in H\}$ sont relativement compacts dans* $\mathrm{ck}(E)$.
(iii) *Pour toute suite (G_n) d'éléments de $\mathcal{G}$ mutuellement disjoints* $\lim_{n\to+\infty} M(G_n) = \{O\}$ *uniformément quand M parcourt H.*

Démonstration. Supposons H relativement compact. Alors (i) est évident. La continuité des applications $M \mapsto M(A)$ définies sur $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$ à valeurs dans $\mathrm{ck}(E)$ où A varie dans $\mathcal{B}$, implique (ii). Si (iii) nétait pas vérifié il existerait une suite (G_n) d'éléments de $\mathcal{G}$ mutuellement disjoints, un nombre réel $\varepsilon > 0$, une suite (M_n) d'éléments de H et une suite (y_n) d'éléments de la boule unité fermée B' de E' tels que $\delta^*(y_n|M_n(G_n)) \geqslant \varepsilon$ pour tout n. Posons $\mu_n = \delta^*(y_n|M_n(\cdot))$ pour tout n. Comme H est relativement compact, $\delta(H) = \{\delta^*(y|M(\cdot));\ M \in H, y \in E',\ |y| \leqslant 1\}$ l'est aussi ([2], Théorème 9). La suite (μ_n) admet donc une valeur d'adhérence μ et par suite une sous-suite généralisée (μ_{n_i}) qui converge vers μ dans $M_+(T, \mathcal{K})$ pour la s-topologie ([1], Théorème 6, p. 71). En particulier $(\mu_{n_i}(G_k))$ tend vers $\mu(G_k)$ pour tout $k \geqslant 1$ et $(\mu_{n_i}(\bigcup_j G_j))$ tend vers $\mu(\bigcup_j G_j)$. D'après le Lemme 2 $(\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_{n_i}(G_k) - \mu(G_k)|)$ tend vers 0. Choisissons k_0 tel que $\mu(G_k) < \varepsilon/2$ pour tout $k \geqslant k_0$, ensuite i tel que $n_i \geqslant k_0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_{n_i}(G_k) - \mu(G_k)| < \varepsilon/2$. On a $\mu_{n_i}(G_{n_i}) \leqslant |\mu_{n_i}(G_{n_i}) - \mu(G_{n_i})| + \mu(G_{n_i}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_{n_i}(G_k) - \mu(G_k)| + \mu(G_{n_i}) < \varepsilon$. On aboutit à une contradiction. Prouvons maintenant que les conditions (i)–(iii) sont suffisantes. D'après ([2], Théorème 9) il suffit de montrer qu'elles impliquent $\delta(H) = \{\delta^*(y|M(\cdot));\ M \in H, y \in E',\ |y| \leqslant 1\}$ relativement compact dans $M(T, \mathcal{K})$ pour la s-topologie. Ceci revient à prouver que $\delta(H)$ satisfait aux conditions suivantes ([2], Proposition 8)

(a) $\sup\{\delta^*(y|M(T));\ M \in H, y \in E',\ |y| \leqslant 1\} < \infty$;
(b) Pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\inf_{G \supseteq K}(\sup\{\delta^*(y|M(G \setminus K));\ M \in H, y \in E',\ |y| \leqslant 1\}) = 0$;
(c) Toute suite généralisée d'éléments de $\delta(H)$ contient une sous-suite généralisée qui converge étroitement dans $M_+(T, \mathcal{K})$.

Comme $\{M(T); M \in H\}$ est relativement compact, $\bigcup\{M(T); M \in H\}$ est borné dans E. Donc (ii) entraîne (a). Les conditions (i) et (ii) impliquent (c) d'après le Lemme 3. Montrons que (iii) implique (b). On suppose que (b) n'est pas vérifiée. Alors il existe $K_0 \in \mathcal{K}$, un réel $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $G \in \mathcal{G}$, $G \supset K_0$ on puisse trouver $M_G \in H$, $y_G \in E'$ qui vérifient $\delta^*(y_G|M_G(G \setminus K_0)) > \varepsilon$. On peut alors construire par récurrence une suite décroissante (G_n), une suite (G'_n) dont les éléments sont mutuellement disjoints, des suites (M_n) dans H et (y_n) dans B' telles que pour tout entier n on ait $K_0 \subset G_n$, $G'_n \subset G_n \setminus G_{n+1}$, $\delta^*(y_n|M_n(G_n \setminus K_0)) > \varepsilon$ et $\delta^*(y_n|M_n(G'_n)) > \varepsilon$. Cette dernière inégalité contredirait (iii). Supposons la construction faite jusqu'au rang n. On passe au rang $n+1$ de la façon suivante. Soit $G_{n+1} \supset K_0$; choisissons $M_{n+1} \in H$, $y_{n+1} \in B'$ tels que $\delta^*(y_{n+1}|M_{n+1}(G_{n+1} \setminus K_0)) > \varepsilon$. Comme M_{n+1} est $\mathcal{K}$-régulière, $\delta^*(y_{n+1}|M_{n+1}(\cdot))$ l'est aussi. Donc il existe

$K_{n+1} \subset G_{n+1} \setminus K_0$ qui vérifie $\delta^*(y_{n+1}|M_{n+1}(K_{n+1})) > \varepsilon$. D'après l'axiome (IV) il existe G_{n+2} et G'_{n+1} tels que $K_0 \subset G_{n+2}$, $K_{n+1} \subset G'_{n+1}$ et $G_{n+2} \cap G'_{n+1} = \emptyset$. Il est clair qu'on peut supposer $G_{n+2} \subset G_{n+1}$ et $G'_{n+1} \subset G_{n+1} \setminus G_{n+2}$; on obtient alors $\delta^*(y_{n+1}|M_{n+1}(G'_{n+1})) > \varepsilon$.

Corollaire 5 ([4], Lemma 4). *Soient T un ensemble, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ des ensembles de parties de T qui satisfont aux axiomes* (I)–(V). *Soit $M_+(T, \mathcal{K})$ l'espace des mesures réelles positives $\mathcal{K}$-régulières définies sur $\mathcal{B}$, muni de la s-topologie. Alors pour qu'une partie H de $M_+(T, \mathcal{K})$ soit relativement compacte il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(i) $\sup\{\mu(T);\ \mu \in H\} < +\infty$.
(ii) *Toute suite généralisée d'éléments de H contient une sous-suite généralisée qui converge étroitement dans $M_+(T, \mathcal{K})$.*
(iii) *Pour toute suite (G_n) d'éléments de $\mathcal{G}$ mutuellement disjoints on a :* $\lim_{n\to+\infty}(\sup\{\mu(G_n);\ \mu \in H\}) = 0$.

Démonstration. Soit $C \in \mathrm{ck}(E)$ tel que $0 \in C$ et $\sup\{\delta^*(y|C);\ y \in E', |y| \leqslant 1\} = 1$. Pour tout $\mu \in M_+(T, \mathcal{K})$ on note $\mu \cdot C$ l'élément de $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$ défini pour tout $A \in \mathcal{B}$ par $\mu \cdot C(A) = \mu(A) \cdot C$. Soit $\widetilde{H} = \{\mu \cdot C;\ \mu \in H\}$ et $M_+(T, \mathcal{K}) \cdot C = \{\mu \cdot C;\ \mu \in M_+(T, \mathcal{K})\}$. L'ensemble $M_+(T, \mathcal{K}) \cdot C$ est une partie fermée de $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \mathrm{ck}(E))$ et homéomorphe à $M_+(T, \mathcal{K})$. D'autre part H vérifie les conditions (i)–(iii) du corollaire si et seulement si $\widetilde{H}$ vérifie celles du Théorème 4.

Références

[1] J.L. Kelley, General Topology, Springer-Verlag, New York, 1955.
[2] K.K. Siggini, Sur la compacité des multimesures (I), C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 334 (2002) 1–4.
[3] K.K. Siggini, Sur les multi-applications tendues (II), J. Rech. Sci. Univ. Bénin 4 (2) (2000) 113–116.
[4] F. Topsøe, Compactness in spaces of measures, Studia Math. XXXVI (1970) 195–212.