Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 41–46

Comptes Rendus Mathematique

Géométrie algébrique

Modules de cycles et motifs mixtes

Cycle modules and mixed motives

Frédéric Déglise

Institut de mathématique, Université Paris 7, 175, rue du Chevaleret, 75013, Paris, France

Reçu le 8 octobre 2002 ; accepté après révision le 2 décembre 2002

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Pour tout corps parfait k, on établit un lien entre la catégorie des faisceaux avec transferts invariants par homotopie définie par Voevodsky et la catégorie des modules de cycles introduite par Rost. Plus précisément, les modules de cycles sur k sont équivalents à la catégorie obtenue à partir des faisceaux avec transferts invariants par homotopie en inversant le faisceau représenté par $\mathbb{G}_m$ muni de sa structure canonique de faisceau avec transferts. Ceci munit automatiquement la catégorie des modules de cycles d'une structure monoïdale et montre qu'elle est abélienne. ***Pour citer cet article : F. Déglise, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

For a perfect field k, we give a relation between the category of homotopy invariant sheaves with transfers defined by Voevodsky and the category of cycle modules defined by Rost. More precisely, the category of cycle modules over k is equivalent to the category obtained from the homotopy invariant sheaves with transfers by formally inverting the sheaf represented by $\mathbb{G}_m$ with its canonical structure of a presheaf with transfers. This gives a canonical monoidal structure on the category of cycle modules over k, and shows that it is Abelian. ***To cite this article: F. Déglise, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Let k be a perfect field, and let $\mathcal{E}_k$ be the category of finitely generated extensions of k. In this Note, the word scheme means always smooth k-scheme of finite type.

In [5], Rost had set out a theory of functors on this category inspired by Milnor K-theory. To such a functor, he associates a cohomology theory on schemes which behave like the classical Chow groups. In fact, Kato had already proved in [3] that one can recover the classical Chow groups by considering Milnor K-theory and the so-called unramified Milnor K-theory which is its extension to schemes.

Adresse e-mail : deglise@math.jussieu.fr (F. Déglise).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(02)00026-2

We denote by $\mathcal{M}Cycl_k$ the category of cycle modules over k defined in [5] (see the first paragraph for details). To such a cycle module M and to a scheme X is associated a Chow group with coefficients in M, denoted by $A^n(X;M)$, which is the n-th cohomology group of an explicit complex of Gersten type.

Voevodsky has constructed a category of sheaves which plays a central role in his construction of motives, the category of homotopy invariant sheaves with transfers defined in [2], Chapter 5, Paragraph 3. We denote this category by $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$. It is Abelian, symmetric monoidal and there is a functor from schemes to it that we denote by h_0. An important object of this category is obtained by considering the cokernel of the canonical map $h_0[\{1\}] \to h_0[\mathbb{G}_m]$ which is given by the corresponding embedding, and we denote it by S_t^1.

For our purpose we have to stabilize the object S_t^1 in the category $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$. This is done by mimicking the construction of the stable homotopy category in topology. So we define the category $\mathrm{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ to be the category of S_t^1-graded modules F_* such that the adjoint map of the given action of S_t^1 on F_* is an isomorphism (see 3.2). The category thus obtained is Abelian, and by the cancellation theorem of Voevodsky (cf. [7]), it is equipped with a canonical structure of a symmetric monoidal category.

The main Theorem 4.5 of this Note is that the categories $\mathrm{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ and $\mathcal{M}Cycl_k$ are canonically equivalent by two explicitly given quasi-inverse equivalences of categories.

Note that this implies, with the cancellation theorem of Voevodsky, that the category of homotopy invariant sheaves with transfers is a localisation of the category of cycle modules. This is also interesting for the theory of cycle modules because it shows that the latter category is Abelian, and it automatically gives a symmetric monoidal structure on $\mathcal{M}Cycl_k$ such that Milnor K-theory is the neutral object.

1. Modules de cycles

Dans toute cette Note, k désigne un corps parfait, et $\mathcal{E}_k$ est la catégorie des extensions de type fini de k.[1] Les schémas seront toujours supposés séparés et munis d'une structure de k-schéma de type fini. On note alors $\mathcal{L}_k$ la catégorie des schémas lisses.

On rappelle que Rost a introduit dans [5] la notion de module de cycles sur k (cf. loc. cit. définition (1.1) et (2.1)). Un pré-module de cycles M est constitué de la donnée, pour toute extension de type fini E/k, d'un groupe abélien gradué $M(E)$, et des morphismes suivants entre ces groupes :

D1. Pour tout k-morphisme $\varphi : E \to L$, un morphisme $\varphi_* : M(E) \to M(L)$ de degré 0.
D2. Pour tout k-morphisme fini $\psi : E \to L$, un morphisme $\psi^* : M(L) \to M(E)$ de degré 0.
D3. Pour toute extension E/k, et pour tout $\sigma \in K_n^M(E)$, un morphisme $\gamma_\sigma : M(E) \to M(E)$ de degré n.
D4. Pour toute valuation v sur E nulle sur k, de corps résiduel κ_v, un morphisme $\partial_v : M(E) \to M(\kappa_v)$ de degré -1.

Ces données sont de plus assujetties à des règles pour lesquelles on se réfère à [5], (1.1). Par ailleurs, un module de cycles est un pré-module de cycles pour lequel les résidus vérifient des propriétés (cf. [5], (2.1)) qui permettent d'écrire un complexe du type complexe de Gersten (cf. [5], Paragraphe 5, pour la définition de ce complexe).

Ces règles et axiomes sont directement inspirés des propriétés que vérifie la K-théorie de Milnor. En particulier, celle-ci forme un module de cycles sur k. Un autre exemple est fourni par la cohomologie galoisienne d'un module de Galois fini sur k.

A partir d'une telle donnée M, et d'un schéma X, Rost a défini un complexe gradué par la codimension (cf. loc. cit., Paragraphe 5) dont on note $A^n(X;M)$ le n-ième groupe de cohomologie. Lorsque X est normal et intègre, de corps des fonctions E, on a par exemple $A^0(X;M) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Ker}(\partial_{v_x})$, où $X^{(1)}$ désigne l'ensemble des points de codimension 1 de X, et pour un tel point x, v_x est la valuation sur E définie par x.

[1] Toutes les démonstrations de cette note se trouveront dans la thèse de l'auteur [1] (version préliminaire à l'adresse www.math.jussieu.fr/\~deglise/these.html).

2. Faisceaux homotopiques avec transferts

On considèrera toujours la catégorie $\mathcal{L}_k$ comme munie de sa topologie de Nisnevich (voir [4]). On notera $\mathcal{N}_k$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathcal{L}_k$ pour cette topologie.

On rappelle que si X et Y sont deux schémas lisses, Voevodsky définit le groupe des correspondances finies de X vers Y comme le sous-groupe des cycles de $X \times_k Y$ engendré par les sous-schémas fermés intègres qui sont finis et surjectifs sur une composante connexe de X. On le note $c(X, Y)$.

Pour ces correspondances, on peut définir un produit de composition par la formule classique (voir [2], Chapitre 5, Paragraphe 2.1) sans avoir besoin de considérer une relation d'équivalence particulière sur les cycles. On note $\mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}$ la catégorie additive ayant mêmes objets que $\mathcal{L}_k$ avec pour morphismes les correspondances finies. L'application graphe définit un foncteur fidèle $\gamma : \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}$.

Définition 2.1 (Voevodsky). On appelle faisceau invariant par homotopie avec transferts la donnée d'un foncteur additif $F : \mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}^{op} \to \mathcal{A}b$ tel que (1) $F \circ \gamma$ est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. (2) Pour tout schéma lisse X, le morphisme $F(X) \to F(\mathbb{A}^1_X)$ induit par la projection canonique est un isomorphisme.

On note $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$ la catégorie des tels foncteurs, avec pour morphismes les transformations naturelles.

Exemple 1. Soit X un schéma lisse. Notons $\mathrm{L}[X]$ le préfaisceau sur $\mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}$ représenté par X. On peut montrer que sa restriction au site $\mathcal{L}_k$ est un faisceau. On peut lui associer de manière canonique un faisceau invariant par homotopie avec transferts, noté $h_0[X]$, caractérisé par les deux propriétés suivantes :

(1) Soit s_0 (resp. s_1) la section nulle (resp. unité) de $\mathbb{A}^1_X$. La suite de morphismes

$$\mathrm{L}\big[\mathbb{A}^1_X\big] \xrightarrow{\mathrm{L}[s_0]-\mathrm{L}[s_1]} \mathrm{L}[X] \to h_0[X] \to 0$$

est exacte dans $\mathcal{N}_k$.

(2) Le morphisme $\mathrm{L}[X] \to h_0[X]$ est une transformation naturelle de préfaisceaux sur $\mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}$.

Rappelons que d'après [2], Chapitre 5, 3.1.13, la catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$ est abélienne. De plus, le foncteur d'oubli $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} \to \mathcal{N}_k$ est exact.

On aura particulièrement besoin du fait supplémentaire suivant concernant cette catégorie :

Proposition 2.2. *La catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$ est munie d'une unique structure monoïdale telle que pour tous schémas lisses X et Y, $h_0[X] \otimes h_0[Y] = h_0[X \times_k Y]$.*

Nous pouvons maintenant énoncer notre premier théorème :

Théorème 2.3. *Soit M un module de cycles sur k. Alors, $A^0(\cdot; M)$ est un faisceau invariant par homotopie avec transferts.*

Rost a déjà montré que $A^0(\cdot; M)$ est muni d'une structure de préfaisceau sur $\mathcal{L}_k$ ([5], Paragraphe 12), et que ce préfaisceau est invariant par homotopie ([5], 8.6). La difficulté restante est de montrer qu'il est de plus muni de transferts au sens de Voevodsky, ce que l'on peut faire en considérant l'action du groupe de Chow classique sur $A^0(\cdot; M)$ (cf. [1], Chapitre 4).

On va voir que l'on peut aller plus loin dans les rapports entre les définitions de Rost et celle de Voevodsky que l'on vient d'introduire.

3. Modules homotopiques avec transferts

Définition 3.1. Soit $\mathbb{G}_m$ le schéma en groupes multiplicatif sur k, et $s_1 : \operatorname{Spec} k \to \mathbb{G}_m$ la section unité de $\mathbb{G}_m$. On définit le faisceau invariant par homotopie S^1_t comme le conoyau dans la catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k$ du morphisme $h_0[s_1]$.

Pour tout entier naturel n, on pose par ailleurs $S^n_t = (S^1_t)^{\otimes, n}$.

Si X est un schéma lisse sur k, on obtient $S^1_t(X) = \mathcal{O}^\times_X$. Ainsi S^1_t est égal au foncteur des points du schéma en groupes $\mathbb{G}_m$ sur k, muni canoniquement de transferts.

Remarque 1. Dans la catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_-(k)$ définie par Voevodsky (cf. [2], Chapitre 5, Paragraphe 3) ce faisceau est quasi-isomorphe au complexe $\mathbb{Z}(1)[1]$.

La catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k$ est munie d'un hom interne. Si F est un faisceau invariant par homotopie avec transferts, on posera simplement $F_{-1} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k}(S^1_t, F)$. L'endofoncteur $?_{-1}$ ainsi défini est alors exact. Par ailleurs, pour tout schéma lisse X, on obtient la suite exacte courte $0 \to F(\mathbb{A}^1 \times X) \to F(\mathbb{G}_m \times X) \to \underline{\mathrm{Hom}}(S^1_t, F)(X) \to 0$ en utilisant l'invariance par homotopie de F et l'exactitude à gauche du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, F)$. Ainsi, cette définition coïncide avec la définition de [2], Chapitre 3, Paragraphe 3.

La construction suivante est directement inspirée de la construction des spectres en topologie, et vise à stabiliser la catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k$ par rapport au faisceau S^1_t :

Définition 3.2. On appelle module homotopique avec transferts tout couple (F_*, ε) tel que : (1) F_* est un objet $\mathbb{Z}$-gradué de $\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k$. (2) ε est un morphisme gradué $S^1_t \otimes F_* \to F_*$, de degré 1. (3) Le morphisme $F_* \to \underline{\mathrm{Hom}}(S^1_t, F_*)$ obtenu à partir de ε par adjonction est un isomorphisme.

On note $\mathrm{H}\mathcal{M}^{\mathrm{tr}}_k$ la catégorie dont les objets sont les modules homotopiques, avec pour morphismes les morphismes de S^1_t-modules gradués.

Remarque 2. On reconnaîtra dans cette définition une des deux conditions vérifiées par les Ω-spectres de la topologie algébrique. Plus précisément, on peut aussi décrire cette catégorie comme le coeur de la catégorie triangulée obtenue à partir de $DM^{\mathrm{eff}}_-(k)$ en copiant la construction des spectres en topologie algébrique où la sphère est remplacée par le motif $\mathbb{Z}(1)[1]$, sachant que cette catégorie doit être munie d'une t-structure, appelée t-structure homotopique. Une catégorie de ce type a été construite par Spitzweck dans sa thèse [6] (cf. Paragraphe 14.7).

On peut alors vérifier les propriétés suivantes :

Proposition 3.3. *La catégorie $\mathrm{H}\mathcal{M}^{\mathrm{tr}}_k$ est abélienne et le foncteur d'oubli de $\mathrm{H}\mathcal{M}^{\mathrm{tr}}_k$ dans la catégorie des objets $\mathbb{Z}$-gradués de $\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k$ est exact.*

Cette proposition résulte du fait que $?_{-1}$ est exact et du fait que la catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k$ est abélienne.

D'après le théorème de simplification de Voevodsky (voir [7], 4.10), pour tout couple de faisceaux invariants par homotopie avec transferts (F, G), le morphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k}(F, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}_k}(S^1_t \otimes F, S^1_t \otimes G)$ est un isomorphisme. Cela nous permet de faire la construction suivante :

Définition 3.4. Soit F un faisceau invariant par homotopie avec transferts. On définit le module homotopique des suspensions infinies de F, noté $\Sigma^\infty F$, par la formule

$$\left(\Sigma^\infty F\right)_n = \begin{cases} S^n_t \otimes F & \text{si } n \geqslant 0, \\ \underline{\mathrm{Hom}}\left(S^{-n}_t, F\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Muni de cette définition, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Le foncteur* $\Sigma^\infty =: \mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} \to \mathrm{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ *est pleinement fidèle et exact. La catégorie* $\mathrm{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ *est munie d'une structure monoïdale symétrique canonique telle que le foncteur* Σ^∞ *est monoïdal.*

Nous allons maintenant voir comment associer un module de cycles à un module homotopique avec transferts.

4. Motifs génériques

Soit $DM_{gm}(k)$ la catégorie triangulée des motifs mixtes définie par Voevodsky (cf. [2], Chapitre 5, Paragraphe 2).

On va se servir de certains pro-objets de $DM_{gm}(k)$ pour associer à un module homotopique avec transferts un module de cycles.

Définition 4.1. Soit E/k une extension de type fini. On note $\mathcal{M}(E/k)$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-k-algèbres A de E qui sont régulières et de type fini.

L'ensemble $\mathcal{M}(E/k)$ est non vide et filtrant. Puisque k est parfait, pour tout A dans $\mathcal{M}(E/k)$, $\operatorname{Spec} A$ est un schéma lisse sur k. Ceci nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 4.2. Soit E/k une extension de type fini. On appelle motif générique défini par E le pro-objet de $DM_{gm}(k)$, noté $M_{gm}(E)$, égal à

$$M_{gm}(E) = \underset{A \in \mathcal{M}(E/k/k)}{\text{“}\varprojlim\text{”}} M_{gm}(E)\big(\operatorname{Spec}(A)\big).$$

On note $DM_{gm}^{(0)}(k)$ la sous-catégorie pleine de pro-$DM_{gm}(k)$ engendrée par les objets $M_{gm}(E)(n)[n]$ où E/k est une extension de type fini, et n un entier relatif.

Dans [5], 1.10, Rost a introduit une catégorie $\widetilde{\mathfrak{F}}(k)$ dont les objets sont les extensions de type fini de k, et dont les morphismes sont définis par générateurs et relations. Les pré-modules de cycles sont alors les foncteurs additifs gradués sur $\widetilde{\mathfrak{F}}(k)$. Pour des raisons techniques, nous introduisons une variante de cette catégorie : on note $\widetilde{\mathfrak{F}}'(k)$ la catégorie telle que (1) Les objets de $\widetilde{\mathfrak{F}}'(k)$ sont les couples (E, n) où E/k est une extension de type fini, et n un entier relatif. (2) Les morphismes sont engendrés par les quatre types de morphismes des données D1 à D4 qui entrent dans la définition des pré-modules de cycles (cf. partie 1), modulo les groupes de relations R1, R2, R3 de la Définition 1.1 de [5].

Ainsi, les pré-modules de cycles sont simplement les foncteurs additifs de $\widetilde{\mathfrak{F}}'(k)$ dans la catégorie des groupes abéliens.

Ayant introduit ces deux catégories, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.3. *Il existe un foncteur canonique* $\rho : \widetilde{\mathfrak{F}}'(k)^{\mathrm{op}} \to DM_{gm}^{(0)}(k)$ *qui à un objet* (E, n) *de* $\widetilde{\mathfrak{F}}'(k)$ *associe le motif générique* $M_{gm}(E)(n)[n]$.

Le problème est évidemment de définir ce foncteur sur les morphismes. On renvoie à la thèse de l'auteur pour cette construction.

Soit (F_*, ε) un module homotopique avec tranferts. On en déduit le foncteur suivant sur les pro-objets de $DM_{gm}(k)$:

$$\begin{aligned} \text{pro-}DM_{gm}(k) &\to \mathcal{A}b \\ (\mathcal{M}_i, n_i)_{i\in\mathcal{I}} &\mapsto \varinjlim_{i\in\mathcal{I}^{\mathrm{op}}} \varinjlim_{p\geqslant -n_i} \mathrm{Hom}_{DM_-^{\mathrm{eff}}(k)}\big(\mathcal{M}_i(p+n_i)[p], F_p\big). \end{aligned}$$

On note ϕ_{F_*} la restriction de ce foncteur à $DM_{gm}^{(0)}(k)$.

Définition 4.4. Soit (F_*, ε) un module homotopique avec transferts. On lui associe un pré-module de cycles $\widehat{F}_* := \phi_{F_*} \circ \rho$, qu'on appelle sa tranformée générique.

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour énoncer le théorème final de cette Note :

Théorème 4.5. (1) *Pour tout module de cycles M sur k, le préfaisceau $A^0(\cdot; M)$ est canoniquement muni d'une structure de module homotopique avec transferts.* (2) *Pour tout module homotopique avec transferts (F_*, ε), le pré-module de cycles $\widehat{F}_*$ est un module de cycles sur k.* (3) *Les foncteurs $\mathrm{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}} \to \mathcal{M}Cycl_k$ et $\mathcal{M}Cycl_k \to \mathrm{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ ainsi définis sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.*

On en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 4.6. *Si k est un corps parfait* : (1) *La catégorie $\mathcal{M}Cycl_k$ est abélienne.* (2) *Il existe une structure monoïdale canonique sur $\mathcal{M}Cycl_k$, pour laquelle la K-théorie de Milnor est l'élément neutre.* (3) *La catégorie $\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$ est une localisation de la catégorie $\mathcal{M}Cycl_k$.* (4) *Pour tout module homotopique avec transferts (F_*, ε), pour tout k-schéma lisse X, et pour tout entier naturel p, on a un isomorphisme de degré* 0 : $H^p(X; F_*) \simeq A^p(X; \widehat{F}_*)$.

Exemple 2. On déduit de la deuxième affirmation du théorème 4.5 que, pour tout entier relatif p, les groupes abéliens gradués $M^{(p)}(E) = \bigoplus_{n\geqslant -p} H^n(E; \mathbb{Z}(n+p))$ portent une structure canonique de module de cycles sur k. Pour $p = 0$, ce module de cycles est simplement égal à la K-théorie de Milnor. Par ailleurs, ces modules de cycles sont canoniquement munis d'un « pairing » (cf. [5], Définition 1.2), $M^{(p)} \times M^{(q)} \to M^{(p+q)}$. La détermination de ces modules de cycles a sans doute un rôle à jouer dans la compréhension de la cohomologie motivique.

Remerciements

Je remercie Fabien Morel de m'avoir indiqué le théorème principal de cette note, et de m'avoir aidé tout au long de sa démonstration.

Références

[1] F. Déglise, Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques, Thèse de l'Université Paris VII, 2002.
[2] E.M. Friedlander, A. Suslin, V. Voevodsky, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories, in: Ann. of Math. Stud., Vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.
[3] K. Kato, Milnor K-theory and the Chowgroup of zero cycles, in: Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part I, in: Contemp. Math., Vol. 55, 1986, pp. 241–253.
[4] Y. Nisnevich, The completely decomposed topology on schemes and the associated descent spectral sequence in algebraic K-theory, in: Algebraic K-Theory: Connections with Geometry and Topology, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys Sci., Vol. 279, Kluwer Academic, 1989, pp. 241–342.
[5] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. J. 1 (1996) 319–393.
[6] M. Spitzweck, Operads, algebras and modules in model categories and motives, Ph.D. thesis, Bonn, 2001.
[7] V. Voevodsky, Cancellation theorem, Preprint, 2002.