Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 95–100
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse numérique

Estimateur hiérarchique robuste pour un problème de perturbation singulière

Hierarchical robust a posteriori error estimator for a singularly perturbed problem

Boujemaa Achchab [a], Said Achchab [b], Abdellatif Agouzal [c]

[a] *Université Hassan 1er, Faculté des sciences économiques, juridiques et sociales Settat, BP 784 Settat, Maroc*
[b] *LERMA, École Mohammadia d'ingénieurs, avenue Ibn Sina, BP 765, Rabat-Agdal, Maroc*
[c] *U.M.R. 5585-MAPLY, 43, bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex 1, France*

Reçu le 17 juillet 2002 ; accepté après révision 12 novembre 2002

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans cette Note, on montre qu'une version modifiée et simplifiée de l'estimateur de Bank–Weiser permet de définir un estimateur a posteriori robuste pour une approximation conforme d'un problème de perturbation singulière. On démontre, sans hypothèse de saturation ni comparaison avec des estimateurs résiduels, l'équivalence entre l'erreur en norme d'énergie et l'estimateur ainsi que la robustesse de celui-ci par rapport au coefficient de diffusion. ***Pour citer cet article : B. Achchab et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In this Note, we show that a modified and simplified version of the estimator of Bank–Weiser can be used to define a robust a posteriori error estimator for singularly perturbed problem. We prove without comparison with a residual estimator or saturation assumption, the equivalence of the estimator with the error in the energy norm and the robusteness with respect to the diffusion coefficient. ***To cite this article: B. Achchab et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

One of the most popular a posteriori error estimators is the hierarchical estimators introduced by Bank and Weiser [4] for an elliptic and symmetric problem, and generalized by various authors to a familly of elliptic nonsymmetric, nonpositive definite and nonlinear problem [3], for mixed approximations [2], or for augmented formulations [1].

Adresses e-mail : achchab@yahoo.fr (B. Achchab), sachchab@hotmail.com (S. Achchab), agouzal@lan.univ-lyon1.fr (A. Agouzal).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(02)00017-1

In this Note, we will show that a modified and simplified version of this estimator, makes it possible to define an a posteriori error estimator in energy norm for conforming approximation of the singularly perturbed problem. Contrary to previous works, our proof does not use a comparison with residual estimator [6,7], nor a saturation assumption [3,4,1,2]. In [5], we prove that the saturation assumption is intimately related to incorporating a data oscillation term in the error estimate. We consider the following perturbed singular problem:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\varepsilon\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

with Ω is a polygonal open domain of $\mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$, $f \in L^2(\Omega)$ and $0 < \varepsilon < 1$ is a constant.

We consider the following P_1-conforming approximation:

$$(P_h) \qquad \begin{cases} \text{Find } u_h \in V_h \text{ such that:} \\ \forall v_h \in V_h, \quad \int_\Omega (\varepsilon\nabla u_h \cdot \nabla v_h + u_h v_h)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

and the auxilary following problem:

$$\left(P_h^0\right) \qquad \begin{cases} \text{Find } w_h \in V_h^0 \text{ such that:} \\ \forall v_h \in V_h^0, \quad \int_\Omega (\varepsilon\nabla w_h \cdot \nabla v_h + w_h v_h)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = \varepsilon\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

for a judicious choice of the space V_h^0 (V_h^0 is defined below). We denote

$$\text{for all open domain } \omega \subset \Omega; \quad \operatorname{osc}(f,\omega) := \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h, T\subset\omega} \alpha_T^2 \|f - f_T\|_{0,T}^2 \right\}^{1/2},$$

where

$$\forall T \in \mathcal{T}, \quad f_T = \frac{1}{\operatorname{mes}_d(T)} \int_T f\,\mathrm{d}x \quad \text{and} \quad \alpha_T = \min\left\{1, \frac{h_T}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}.$$

We can prove the follwing results:

Theorem. *For u, u_h and w_h respectively solutions of this problems (P), (P_h) and (P_h^0), we have the global upper bound of the error*:

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon,\Omega} \leqslant C\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\|w_h\|_{\varepsilon,T}^2 + \alpha_T^2 \|u_h - f\|_{0,T}^2 \right) \right)^{1/2},$$

and for all $T \in \mathcal{T}_h$ and $E \in \mathcal{E}$, we have the local lower bounds:

$$\alpha_T \|f - u_h\|_{0,T} \leqslant C\left(\|e\|_{\varepsilon,T} + \operatorname{osc}(f,T)\right),$$

and

$$\|w_h\|_{\varepsilon,W(E)} \leqslant C_1\|u - u_h\|_{\varepsilon,T_1\cup T_2} + C_2 \operatorname{osc}(f, T_1 \cup T_2).$$

1. Introduction

L'un des estimateurs d'erreur a posteriori les plus populaires est l'estimateur hiérarchique introduit par Bank et Weiser [4] pour un problème elliptique symétrique, et généralisé plus tard par divers auteurs pour une famille de problèmes elliptiques, non symétriques, non définis positifs, et non linéaires ou pour des formulations mixtes ou augmentées (voir par exemple [3,1] et [2]). Dans cette Note, nous allons montrer qu'une version modifiée et simplifiée de cet estimateur permet de définir un estimateur a posteriori en norme d'énergie pour une approximation conforme d'un problème de perturbation singulière. Cet estimateur est robuste par rapport au coefficient de diffusion (voir [7] pour une définition précise de la robustesse). Contrairement aux travaux classiques, notre démonstration n'utilise pas de comparaison avec un estimateur résiduel [6,7], ni d'hypothèse de saturation [3,4,1,2].

2. Préliminaires

On considère une famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ régulière de Ω en triangles ou en tétraèdres. On notera par $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes (faces) internes de $\mathcal{T}_h$, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ par E_T les arêtes (faces) internes de T, par n_T la normale unitaire extérieure à ∂T et par $\Delta(T)$ l'ensemble d'éléments de $\mathcal{T}_h$ ayant une arête (face) commune avec T. Comme il est d'usage, on notera par $[\cdot]_F$ le saut d'une fonction à travers l'arête (face) F et on pose $[\partial u_h/\partial n_T]_F = 0$ si F est une arête (face) de la frontière Γ. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on note par $P_k(T)$ l'espace des polynômes de degré k. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et $E \in E_T$ arête (face) interne de T de sommets $(Q_1, \ldots, Q_d)$ ($(Q_0, Q_1, \ldots, Q_d)$ étant les sommets de T), on introduit le triangle (tétraèdre) T_E de sommets $(P, Q_1, \ldots, Q_d)$ où P est le point de coordonnées barycentriques :

$$\lambda_0(P) = \delta_{E,T} \quad \text{et} \quad \lambda_i(P) = \frac{1-\delta_{E,T}}{d}, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, d,$$

où les $\{\lambda_i\}$ sont les coordonnées barycentriques associées aux points $\{Q_i\}_{i=0}^{d}$ et

$$\delta_{E,T} = \min\left\{\frac{1}{d+1}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h_T}\right\}.$$

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $E \in E_T$, on introduit l'unique fonction $b_{E,T} \in \mathcal{C}^0(T)$ définie par :

$$b_{E,T} \in P_d(T_E),\ b_{E,T} = 0 \quad \text{sur } T/T_E, \quad b_{E,T}(a_E) = 1,$$

où a_E est le milieu (centre de gravité) de l'arête (face) E. On considère l'espace $P_0^d(T)$ engendré par les fonctions $\{b_{E,T}, E \in E_T\}$, et on définit l'espace discret

$$V_h^0 = \left\{w_h \in H_0^1(\Omega),\ \text{tel que } \forall T \in \mathcal{T}_h,\ w_{h|T} \in P_0^d(T)\right\}.$$

Pour toute arêtes (faces) interne $E = \partial T \cap \partial K$ avec $T, K \in \mathcal{T}_h$, on introduit la fonction b_E définie par

$$b_E = b_{E,T} \quad \text{sur } T \quad \text{et} \quad b_E = b_{E,K} \quad \text{sur } K.$$

Dans toute la suite de cette Note, les lettres $C, C_0, C_1, \ldots$ désignent des constantes qui peuvent changer d'une inégalité à une autre, ne dépendant que de l'angle minimal de $\mathcal{T}_h$ et elles sont indépendantes de ε. On notera par $\|\cdot\|_{\varepsilon,\omega}$, (où $\omega \subset \Omega$) la norme définie sur $H^1(\omega)$ par

$$\forall v \in H^1(\omega), \quad \|u\|_{\varepsilon,\omega}^2 = \varepsilon|u|_{1,\omega}^2 + \|u\|_{0,\omega}^2.$$

Soit $u_h \in V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h,\ v_{h|T} \in P_1(T)\}$, l'unique solution du problème discret suivant :

$$(P_h) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \forall v_h \in V_h, \quad \int_\Omega (\varepsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + u_h v_h)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

On considère le problème suivant :

$$(P_h^0) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } w_h \in V_h^0 \text{ tel que :} \\ \forall v_h \in V_h^0, \quad \int_\Omega (\varepsilon \nabla w_h \cdot \nabla v_h + w_h v_h)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = \varepsilon \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Remarque. Le problème (P_h^0) est facile à résoudre : en effet, en remarquant que $V_h^0 = \mathrm{Vect}\{b_E\}_{E\in\mathcal{E}}$ et que pour tout $E, F \in \mathcal{E}$ avec $E \neq F$, les support des fonctions b_E et b_F sont disjoints. Il en découle que :

$$w_h = \sum_{E\in\mathcal{E}} \alpha_E b_E \quad \text{avec } \alpha_E = \beta_d \frac{\mathrm{mes}_{d-1}(E)}{\|b_E\|_{\varepsilon,W(E)}^2}\left[\varepsilon \frac{\partial u_h}{\partial n_E}\right],$$

où $W(E)$ est le support de la fonction b_E, $\beta_2 = 2/3$ et $\beta_3 = 1/540$.

Nous avons le lemme suivant dont la démonstration est technique mais néanmoins élementaire :

Lemme 2.1. *Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $E \in E_T$, on a* :

$$\|b_{E,T}\|_{\varepsilon,T} \leqslant C\varepsilon^{1/4}\alpha_T^{-1/2}h_T^{(d-1)/2}.$$

Démonstration. Soit T_E le support de la fonction $b_{E,T}$, on a [6] :

$$\mathrm{mes}(T_E) \leqslant C\delta_{E,T} \times \mathrm{mes}(T) \quad \text{et} \quad \rho(T_E) \geqslant Ch_T\delta_{E,T},$$

par suite, on a :

$$\|b_{E,T}\|_{\varepsilon,T} \leqslant C\left\{\delta_{E,T}^{1/2}h_T^{d/2} + \sqrt{\varepsilon}\delta_{E,T}^{-1/2}h_T^{d/2-1}\right\} = C\delta_{E,T}^{1/2}h_T^{d/2}\left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h_T\delta_{E,T}}\right).$$

Or,

$$\delta_{E,T} \leqslant C\frac{\sqrt{\varepsilon}}{h_T}\min\left\{1, \frac{h_T}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} = C\frac{\sqrt{\varepsilon}}{h_T}\alpha_T \quad \text{et} \quad \sqrt{\varepsilon}\alpha_T \leqslant Ch_T\delta_{E,T},$$

d'où

$$\|b_{E,T}\|_{\varepsilon,T} \leqslant C\delta_{E,T}^{1/2}h_T^{d/2}\left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h_T\delta_{E,T}}\right) \leqslant C\varepsilon^{1/4}\alpha_T^{1/2}h_T^{(d-1)/2}\left(1 + \alpha_T^{-1}\right) \leqslant C\varepsilon^{1/4}\alpha_T^{-1/2}h_T^{(d-1)/2}.$$

On a aussi le

Lemme 2.2. *Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe un unique élément $\Pi v \in V_h^0$ vérifiant* :

$$\forall S \in \mathcal{E}, \quad \int_S (v - \Pi v)\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

De plus, on a

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \|\Pi v\|_{\varepsilon,T} \leqslant C\varepsilon^{1/4}\alpha_T^{-1/2}\sum_{E \in E_T}\|v\|_{0,E},$$

et

$$\forall T \in \mathcal{T}_h,\ \forall v_h \in P_1(T), \quad \int_T \nabla v_h \cdot \nabla(v - \Pi v)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Démonstration. Remarquons que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$\Pi v = \sum_{E \in E_T}\frac{1}{\beta_E}b_{E,T}\int_E v\,\mathrm{d}\sigma, \quad \text{sur } T \text{ où } \beta_E = \int_E b_{E,T}\,\mathrm{d}\sigma \geqslant Ch_T^{d-1}.$$

En utilisant le Lemme 2.1, on déduit alors que $\|\Pi v\|_{\varepsilon,T} \leqslant C\varepsilon^{1/4}\alpha_T^{-1/2}\sum_{E \in E_T}\|v\|_{0,E}$. Remarquons aussi que pour tout $v_h \in P_1(T)$, $S \in E_T$: $\Delta v_h = 0$ et $\partial v_h/\partial n_T \in P_0(S)$; en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_T \nabla v_h \cdot \nabla(v - \Pi v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial T}(v - \Pi v)\frac{\partial v_h}{\partial n_T}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. Estimateur hiérarchique robuste

Rappelons tout d'abord le résultat [7] :

Lemme 3.1. *Il existe un opérateur I_h défini de $H_0^1(\Omega)$ à valeurs dans V_h tel que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a* :

$$\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\alpha_T^{-2}\|u-I_hu\|_{0,T}^2+\sum_{e\in E_T}\frac{\varepsilon^{1/2}}{\alpha_T}\|u-I_hu\|_{0,e}^2\right)\right\}^{1/2}\leqslant C\|u\|_{\varepsilon,\Omega}.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Pour u, u_h et w_h solutions respectives des problèmes (P), (P_h) et (P_h^0), on a l'estimation suivante* :

$$\|u-u_h\|_{\varepsilon,\Omega}\leqslant C\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\|w_h\|_{\varepsilon,T}^2+\alpha_T^2\|u_h-f\|_{0,T}^2\right)\right)^{1/2}.$$

Démonstration. On pose $e=u-u_h$, on a :

$$\begin{aligned}\|e\|_{\varepsilon,\Omega}^2&=\int_\Omega(f-u_h)(e-I_he)\,\mathrm{d}x-\varepsilon\int_\Omega\nabla u_h\cdot\nabla(e-I_he)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T(f-u_h)(e-I_he)\,\mathrm{d}x-\varepsilon\int_T\nabla\Pi(e-I_he)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}\|e\|_{\varepsilon,\Omega}^2&=\int_\Omega(f-u_h)(e-I_he)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\varepsilon\nabla u_h\cdot\nabla\Pi(e-I_he)\,\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega(f-u_h)(e-I_he)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\varepsilon\nabla w_h\cdot\nabla\Pi(e-I_he)+w_h\Pi(e-I_he)\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où

$$\|e\|_{\varepsilon,\Omega}^2\leqslant\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\|w_h\|_{\varepsilon,T}^2+\alpha_T^2\|f-u_h\|_{0,T}^2\right)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\alpha_T^{-2}\|e-I_he\|_{0,T}^2+\sum_{E\in E_T}\frac{\varepsilon^{1/2}}{\alpha_T}\|e-I_he\|_{0,E}^2\right)\right\}^{1/2}.$$

En utilisant le Lemme 3.1, on déduit alors l'estimation suivante :

$$\|e\|_{\varepsilon,\Omega}:=\|u-u_h\|_{\varepsilon,\Omega}\leqslant C\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\|w_h\|_{\varepsilon,T}^2+\alpha_T^2\|u_h-f\|_{0,T}^2\right)\right)^{1/2}.$$

Avant de démontrer l'efficacité de notre estimateur nous allons introduire quelques notations utiles. Pour tout $E=\partial T_1\cap\partial T_2\in\mathcal{E}$ et on pose $w_{h,E}=w_{h|W(E)}$. Or, pour tout $E,F\in\mathcal{E}$, avec $E\neq F$, les fonctions de base b_E et b_F ont des supports disjoints, on a

$$w_h=\sum_{E\in\mathcal{E}}w_{h,E}\quad\text{et}\quad\|w_h\|_{\varepsilon,\Omega}^2=\sum_{E\in\mathcal{E}}\|w_{h,E}\|_{\varepsilon,W(E)}^2.$$

On a le

Théorème 3.2. *Pour u, u_h et w_h solutions respectives des problèmes (P), (P_h) et (P_h^0) et pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et $E \in \mathcal{E}$, on a les minorations locales suivantes* :

$$\alpha_T \|f - u_h\|_{0,T} \leqslant C\big(\|e\|_{\varepsilon,T} + \operatorname{osc}(f,T)\big), \quad \textit{et} \quad \|w_h\|_{\varepsilon,W(E)} \leqslant C_1\|u - u_h\|_{\varepsilon,T_1\cup T_2} + C_2 \operatorname{osc}(f, T_1 \cup T_2).$$

Démonstration. La première inégalité est démontrée dans [7], démontrons la deuxième. On pose $e = u_h - u$. Tout d'abord, on a :

$$\|w_{h,E}\|^2_{\varepsilon,W(E)} = \|w_h\|^2_{\varepsilon,W(E)} = \int\limits_{\Omega} (\varepsilon\nabla w_h \nabla w_{h,E} + w_h w_{h,E})\,\mathrm{d}x = \int\limits_{W(E)} \varepsilon\nabla u_h \nabla w_{h,E}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $w_{h,E} \in H_0^1(W(E))$, par suite

$$\|w_h\|^2_{\varepsilon,W(E)} = \int\limits_{W(E)} \varepsilon\nabla u_h\nabla w_{h,E}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{W(E)} (\varepsilon\nabla e\cdot\nabla w_{h,E} + e w_{h,E})\,\mathrm{d}x + \int\limits_{W(E)} (f - u_h) w_{h,E}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

D'une part

$$\int\limits_{W(E)} (\varepsilon\nabla e\cdot\nabla w_{h,E} + e w_{h,E})\,\mathrm{d}x \leqslant \|e\|_{\varepsilon,W(E)}\|w_{h,E}\|_{\varepsilon,W(E)}, \tag{2}$$

d'autre part, $\|w_{h,E}\|_{0,T_i} \leqslant C\alpha_{T_i}\|w_{h,E}\|_{\varepsilon,T_i}$, par suite

$$\begin{aligned}\int\limits_{W(E)} (f - u_h) w_{h,E}\,\mathrm{d}x &\leqslant \sum_{i=1}^{2} \|f - u_h\|_{0,T_i}\|w_{h,E}\|_{0,T_i} \leqslant C\sum_{i=1}^{2}\alpha_{T_i}\|f - u_h\|_{0,T_i}\|w_{h,E}\|_{\varepsilon,T_i}\\ &\leqslant C\|w_{h,E}\|_{\varepsilon,W(E)}\left(\sum_{i=1}^{2}\|e\|_{\varepsilon,T_i} + \operatorname{osc}(f,T_i)\right).\end{aligned} \tag{3}$$

En utilisant les inégalités (1)–(3), on obtient le résultat.

Remarque. Dans le cas d'utilisation de méthodes de stabilisation pour éviter les solutions numériques avec oscillations, l'estimateur hiérachique proposé dans ce travail et les techniques utilisées restent valables en dimension deux et trois.

Références

[1] B. Achchab, A. Agouzal, Formulations mixtes augmentées et applications, Math. Modelling Numer. Anal. 33 (3) (1999) 459–478.
[2] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger, J.F. Maitre, Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique. Application aux éléments finis mixtes, Numer. Math. 80 (1998) 159–179.
[3] R.E. Bank, R.K. Smith, A posteriori error estimates based on hierarchical bases, SIAM J. Numer. Anal. 30 (1993) 921–935.
[4] R.E. Bank, A. Weiser, Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations, Math. Comp. 44 (1985) 285–301.
[5] W. Dörfler, R.H. Nochetto, Small data oscillation implies the saturation assumption, Numer. Math. 91 (2002) 1–12.
[6] G. Kunert, Robust local problem error estimation for a singularly perturbed problem on anisotropic finite element meshes, Math. Modelling Numer. Anal. 35 (6) (2001) 1079–1109.
[7] R. Verfürth, Robust a posteriori error estimator for singularity perturbed Helmoltz equation, Numer. Math. 78 (3) (1998) 445–475.