



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 23–28



Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

# Un modèle paraxial de propagation de la lumière : problème aux limites pour l'équation d'advection Schrödinger en coordonnées obliques

## A paraxial model for the propagation of light: the boundary value problem for the Schrödinger-advection equation in a tilted frame

Marie Doumic<sup>a</sup>, François Golse<sup>b</sup>, Rémi Sentis<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *École normale supérieure, DMA, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*

<sup>b</sup> *Laboratoire Jacques-Louis Lions, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris cedex 05, France*

<sup>c</sup> *CEA-Bruyères, Service SEL, BP 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France*

Reçu le 7 octobre 2002 ; accepté le 12 novembre 2002

Présenté par Pierre-Louis Lions

---

### Résumé

On étudie l'équation de Schrödinger qui provient de l'approximation paraxiale de l'équation de Helmholtz, dans le cas où la direction de propagation est oblique par rapport à la frontière du domaine. On s'intéresse aux conditions aux limites dans un demi-espace puis dans un quadrant de  $\mathbf{R}^2$ . On propose également une méthode numérique pour ce type de modèle. *Pour citer cet article : M. Doumic et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

We study the Schrödinger equation which comes from the paraxial approximation of the Helmholtz equation in the case where the direction of propagation is tilted with respect to the boundary of the domain. Our primary interest is in the boundary conditions successively in a half-space, then in a quadrant of  $\mathbf{R}^2$ . We also sketch a numerical method for this problem. *To cite this article: M. Doumic et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

---

### Abridged English version

In this Note, we are concerned with the propagation of a laser beam in a medium of almost constant refraction index. Letting  $\varepsilon$  being the wave-length of the laser wave divided by  $2\pi$ ,  $\nu$  the absorption coefficient and  $1 - 2\varepsilon\mu(\vec{x})$

---

Adresses e-mail : Marie.Doumic@ens.fr (M. Doumic), Francois.Golse@ens.fr (F. Golse), remi.sentis@cea.fr (R. Sentis).

the index at the point  $\vec{x}$ , the potential  $\psi$  is governed by the Helmholtz equation (1). A classical W.K.B. expansion leads to  $\psi(\vec{x}) = u(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}/\varepsilon}$ , where  $u$  solves the advection-Schrödinger equation (2) with the boundary condition (3) that comes from the prescription of the incoming wave in (1).

**Proposition 0.1.** *Let  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^d$  be an open half-space with unit outward normal  $\vec{n}$  and let  $\vec{k}$  satisfy  $\vec{k} \cdot \vec{n} < 0$ . If  $\inf_{\mathcal{D}} \nu > 0$  and  $(\varepsilon \vec{n} \cdot \text{grad}_{\perp} + 2i\vec{n} \cdot \vec{k})u^{\text{en}} \in L^2(\partial\mathcal{D})$ , there is at most one solution  $u \in H^1(\mathcal{D})$  of (2), (3); this solution satisfies (4).*

In the case of constant coefficients – here we take  $\mu = 0$  and  $d = 2$  for simplicity – one can solve (2), (3) by Fourier transform in  $x_2$ .

**Theorem 0.2.** *Let  $\mathcal{D} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0\}$  and  $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_{x_2})$ . The problem (5), (6) has a unique solution  $u \in \mathcal{S}'(\mathcal{D})$ ; this solution is given by (10) and belongs in fact to  $C^\infty([0, +\infty[_{x_1}; \mathcal{S}'(\mathbf{R}_{x_2}))$ . In particular, if  $g \in H_{x_2}^{1/2}$ , then  $u \in H^1(\mathcal{D})$ .*

Next we consider the case where the computation domain is a quadrant  $\mathcal{Q} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$  and try to write a transparent boundary condition on the part of  $\partial\mathcal{Q}$  where  $x_2 = 0$ . The condition we propose is (11). Its properties are summarized in the following

**Theorem 0.3.** *Eq. (5) on  $\mathcal{Q}$  with boundary condition (6) and incoming data  $g_+$  on the part of  $\partial\mathcal{Q}$  where  $x_1 = 0$ , and the condition (11) on the part of  $\partial\mathcal{Q}$  where  $x_2 = 0$  has a unique solution  $U \in C_b(\mathbf{R}_{x_1}^+; L^2(\mathbf{R}_{x_2}^+))$ . If  $k_2 > 0$ ,  $U$  satisfies (12) while if  $k_2 < 0$  it satisfies (13).*

Finally, we present some numerical tests for this paraxial approximation in tilted frame. Instead of linear, constant coefficient problems as above, we consider a nonlinear variant (14). Our method uses a three stage splitting algorithm where  $x_1$  plays the role of the time variable to separate the treatment of the Schrödinger operator (15) from the absorption and potential terms (16). The  $x_2$  variable in the first part of the splitting algorithm dealing with (15) is treated by F.F.T., while the last step – i.e., solving (16) is treated by an upwind finite difference scheme. Figs. 1 and 2 represent  $|u|^2$  with  $\alpha = \varepsilon = 0.05$ ,  $\nu = 0.001$  and Gaussian incoming wave  $u^{\text{in}} = \exp(-(k_1 Y + k_2 X)^2/L^2)$  with  $L = 2.5$ . The angles of incidence are  $45^\circ$  (Fig. 1) and  $5^\circ$  (Fig. 2). We have tried the same method on a coupled system in order to study beam crossing: Figs. 3 and 4 represent  $|w|^2$  for the solution of (17) with  $\alpha = 0.05$  (with some background plasma) and  $\alpha = 0$  (in the vacuum) respectively.

## 1. Le modèle d'advection-Schrödinger

La propagation d'une onde laser dans un milieu d'indice de réfraction presque constant peut être décrite par l'équation de Helmholtz

$$\varepsilon^2 \Delta \psi + (1 - 2\varepsilon\mu)\psi + 2i\varepsilon\nu\psi = 0, \quad (1)$$

où  $2\pi\varepsilon$  est la longueur d'onde du laser pour le milieu d'indice 1,  $\mu$  correspond à la variation d'indice (i.e.,  $1 - 2\varepsilon\mu(\vec{x})$  est l'indice au point  $\vec{x}$ ) et  $\nu$  au coefficient d'absorption. On suppose que  $\mu$  et  $\nu$  sont des fonctions régulières de  $\vec{x}$ . Soit  $\vec{k}$  le vecteur unitaire donnant la direction de propagation de l'onde laser;  $\text{grad}_{\perp} = \text{grad} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \text{grad})$  et  $\Delta_{\perp}$  le Laplacien transverse (induit par la métrique euclidienne sur les plans orthogonaux à  $\vec{k}$ ). En faisant l'approximation W.K.B. classique  $\psi \simeq u(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}/\varepsilon}$  où  $u$  est une fonction lentement variable en  $\vec{x}$ , un développement asymptotique formel au premier ordre en  $\varepsilon$  montre que

$$i\vec{k} \cdot \text{grad} u + \frac{1}{2}\varepsilon\Delta_{\perp} u + i\nu u - \mu u = 0. \quad (2)$$

Supposons Éq. (2) posée dans un demi-espace  $\mathcal{D}$ . Si  $\vec{k}$  est orthogonal à  $\partial\mathcal{D}$  et que  $u|_{\partial\mathcal{D}}$  est prescrite, (2) est un problème de Cauchy classique pour une équation d'évolution en  $z$ . Lorsque  $\vec{k}$  n'est pas orthogonal à  $\partial\mathcal{D}$ , la situation est moins bien comprise ; on consultera toutefois [7] – dont la validité semble limitée au cas de faibles angles d'incidence – et [8] dans le cadre de l'acoustique – dont l'adaptation aux questions d'optique semble difficile. On considère ici que Éq. (2) est complétée par la condition aux limites

$$(\varepsilon\vec{n} \cdot \text{grad}_{\perp} + 2i\vec{n} \cdot \vec{k})(u - u^{\text{en}}) = 0, \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \tag{3}$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $\partial\mathcal{D}$  et  $u^{\text{en}}$ , une fonction régulière donnée (cette condition provient de l'approximation W.K.B. sur la condition usuelle pour (1) qui est  $(\varepsilon\vec{n} \cdot \text{grad} + i\vec{k} \cdot \vec{n})(\psi - u^{\text{en}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}/\varepsilon}) = 0$ ).

### 2. Estimation d'énergie et applications

Multipliant (2) par  $2i\vec{u}$ , on voit en passant à la partie réelle et en appliquant la formule de Green que

$$\int_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 d\vec{x} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{k} \cdot \vec{n}|u|^2 dS(\vec{x}) = -\text{Im} \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{u}(\varepsilon\vec{n} \cdot \text{grad}_{\perp} + 2i\vec{n} \cdot \vec{k})u^{\text{en}} dS(\vec{x}).$$

En estimant le membre de droite de cette relation par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient le résultat :

**Proposition 2.1.** *Soit  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^d$  un demi-espace ouvert et  $\vec{k}$  un vecteur tel que  $\vec{k} \cdot \vec{n} < 0$ . On suppose que  $\inf_{\mathcal{D}} \nu > 0$  et que l'on a  $(\varepsilon\vec{n} \cdot \text{grad}_{\perp} + 2i\vec{n} \cdot \vec{k})u^{\text{en}} \in L^2(\partial\mathcal{D})$ . Alors il existe au plus une solution  $u \in H^1(\mathcal{D})$  pour le problème (2), (3) et cette solution vérifie l'estimation de stabilité*

$$\int_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 d\vec{x} + \int_{\partial\mathcal{D}} |\vec{k} \cdot \vec{n}||u|^2 dS(\vec{x}) \leq |\vec{k} \cdot \vec{n}|^{-1} \int_{\partial\mathcal{D}} |(\varepsilon\vec{n} \cdot \text{grad}_{\perp} + 2i\vec{n} \cdot \vec{k})u^{\text{en}}|^2 dS(\vec{x}). \tag{4}$$

### 3. Résolution par transformation de Fourier

On suppose dorénavant que la dimension de l'espace est  $d = 2$  (mais la plupart des idées peuvent s'étendre au cas  $d = 3$ ), donc  $\vec{k} = (k_1, k_2)$ . On suppose de plus ici que  $\nu$  est une constante, que  $\mu = 0$  et que  $\mathcal{D} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ . Alors (2) et (3) s'écrivent

$$i(k_1\partial_{x_1} + k_2\partial_{x_2})u + \frac{1}{2}\varepsilon(k_2^2\partial_{x_1x_1} - 2k_1k_2\partial_{x_1x_2} + k_1^2\partial_{x_2x_2})u + i\nu u = 0, \tag{5}$$

$$-i\varepsilon(k_1k_2\partial_{x_2} + k_2^2\partial_{x_1})u - 2k_1u = 2k_1g, \tag{6}$$

où l'on a posé  $g = (1 - \frac{1}{2}\vec{k} \cdot \vec{n})^{-1}(\varepsilon\vec{n} \cdot \text{grad}_{\perp})u^{\text{en}}$ . Notons  $\xi_2$  la variable de Fourier de  $x_2$  et  $\hat{\cdot}$  la transformée de Fourier en  $x_2$ . Le symbole en  $x_2$  de l'opérateur défini par le membre de gauche de (5) est

$$i(k_1\partial_{x_1} + ik_2\xi_2) + \frac{1}{2}\varepsilon(k_2^2\partial_{x_1x_1} - 2ik_1k_2\xi_2\partial_{x_1} - k_1^2\xi_2^2) + i\nu = \frac{1}{2}\varepsilon k_2^2(\partial_{x_1} - R_+(i\xi_2))(\partial_{x_1} - R_-(i\xi_2)), \tag{7}$$

où, en notant  $\sqrt{\cdot}$  la détermination principale de la racine carrée, on a posé

$$R_{\pm}(i\xi_2) = i\frac{k_1}{k_2}\xi_2 - i\frac{k_1}{k_2^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{\varepsilon k_2}{k_1^2}\xi_2 + 2i\nu\frac{\varepsilon k_2^2}{k_1^2}} \right), \tag{8}$$

Notons  $v$  le prolongement de  $u$  par 0 dans le complémentaire de  $\mathcal{D}$ . Alors

$$\frac{1}{2}\varepsilon k_2^2(\partial_{x_1} - R_+(i\xi_2))(\partial_{x_1} - R_-(i\xi_2))\hat{v}(x_1, \xi_2) = \left( \frac{2ik_1}{\varepsilon k_2^2}\hat{g} - i\frac{k_1}{k_2}\xi_2\hat{u}|_{x_1=0} \right)\delta_{x_1=0} + \hat{u}|_{x_1=0}\delta'_{x_1=0}. \tag{9}$$

**Théorème 3.1.** *Supposons que  $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_{x_2})$ . Le problème (5) avec condition aux limites (6) admet une unique solution  $u \in \mathcal{S}'(\mathcal{D})$ ; elle vérifie*

$$\hat{u}(x_1, \xi_2) = \frac{2\hat{g}(\xi_2) e^{R_-(i\xi_2)x_1}}{1 + \sqrt{1 - 2(\varepsilon k_2/k_1^2)\xi_2 + 2i\nu\varepsilon k_2^2/k_1^2}} \quad (10)$$

et appartient en fait à  $C^\infty([0, +\infty[_{x_1}; \mathcal{S}'(\mathbf{R}_{x_2}))$ .

On remarquera que, pour  $x_1 > 0$ , on a  $(\partial_{x_1} - R_-(i\xi_2))\hat{u}(x_1, \xi_2) = 0$ . En effet, il n'y a pas de mode en  $e^{R_+(i\xi_2)x_1}$  car  $\operatorname{Re}[R_+(i\xi_2)] = \nu/k_1 + o(1)$  et  $k_1 = -\vec{k} \cdot \vec{n} > 0$ .

**Corollaire 3.2.** *Sous les hypothèses du théorème et si  $g \in H^s(\mathbf{R}_{x_2})$  avec  $s > 0$ , la solution  $u$  de (5), (6) appartient à  $C_b([0, +\infty[_{x_1}; H^{1/2+s}(\mathbf{R}_{x_2}))$ ; de plus, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\nu$  et  $g$  telle que  $\|u\|_{L^\infty_{x_1}(H^{s+1/2}_{x_2})} + \|\partial_{x_1} u\|_{L^\infty_{x_1}(H^{s+1/2}_{x_2})} \leq C \|g\|_{H^s_{x_2}}$ .*

En particulier, si  $g \in H^{1/2}_{x_2}$ , alors  $u \in H^1(\mathcal{D})$ .

#### 4. Problème dans le quart d'espace et condition transparente

On considère ici le problème (5) posé dans le quadrant  $\mathcal{Q} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$  et on essaie d'écrire une condition aux limites sortante « transparente » sur la partie de  $\partial\mathcal{Q}$  correspondant à  $x_2 = 0$ .

Le symbole en  $\xi_1$  (variable duale de  $x_1$ ) de l'opérateur de Schrödinger-advection s'écrit

$$i(k_1\xi_1 + k_2\partial_{x_2}) + \frac{1}{2}\varepsilon(-k_2^2\xi_1^2 - 2ik_1k_2\xi_1\partial_{x_2} + k_1^2\partial_{x_2x_2}) + i\nu = \frac{1}{2}\varepsilon k_1^2(\partial_{x_2} - S_+(i\xi_2))(\partial_{x_2} - S_-(i\xi_2))$$

sachant que  $S_\pm(i\xi_1) = i\frac{k_2}{k_1}\xi_1 - i\frac{k_2}{\varepsilon k_1^2}(1 \pm \sqrt{1 - 2(\varepsilon k_1/k_2^2)\xi_1 + 2i\nu\varepsilon k_1^2/k_2^2})$ . On complète Éq. (5) posée sur  $\mathcal{Q}$  avec la condition entrante (6) sur la partie de  $\partial\mathcal{Q}$  où  $x_1 = 0$ , par la condition

$$(\partial_{x_2} - S_+(\partial_{x_1}))u = 0, \quad \text{pour } x_2 = 0. \quad (11)$$

L'intérêt de cette nouvelle condition est expliqué par le théorème suivant. Soit  $g_+ \in H^{-1/2}(\mathbf{R}_+)$  à support dans  $\mathbf{R}_+^*$  et soit  $u$  la solution de (5), (6) posée sur  $\mathcal{D}$  où  $g$  est le prolongement de  $g_+$  par 0 sur  $\mathbf{R}_-$ .

**Théorème 4.1.** *Éq. (5) posée sur  $\mathcal{Q}$  avec (6) et la donnée entrante  $g_+$  sur la partie de  $\partial\mathcal{Q}$  où  $x_1 = 0$  et la condition (11) sur la partie de  $\partial\mathcal{Q}$  où  $x_2 = 0$  admet une unique solution  $U \in C_b(\mathbf{R}_{x_1}^+; L^2(\mathbf{R}_{x_2}^+))$ . De plus, si  $k_2 > 0$  :*

$$U = u|_{\mathcal{Q}}. \quad (12)$$

Soit, pour tout  $a > 0$ ,  $g_a(x_2) = g(x_2 - a)$ ; notons  $u_a$  la solution sur  $\mathcal{D}$  de (5), (6) avec donnée entrante  $g_a$ . Lorsque  $k_2 < 0$

$$U - u_a|_{\mathcal{Q}} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^\infty(\mathbf{R}_{x_1}^+; L^2(\mathbf{R}_{x_2}^+)) \text{ lorsque } a \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Cet énoncé signifie que la condition (11) est *transparente* pour  $k_2 > 0$  et *absorbante* pour  $k_2 < 0$ . La condition (11) dégénère vers la condition habituelle (cf. [1,4]) lorsque  $k_2 \rightarrow 0$ .

#### 5. Schéma numérique

Nous préférons présenter ici la méthode et les résultats numériques sur un problème de type *Schrödinger non-linéaire*. Au lieu d'être une donnée du problème, la fonction  $\mu$  dans Éq. (2) est remplacée par un terme de la forme  $f(|u|)$  :

$$(k_1\partial_{x_1} + k_2\partial_{x_2})u - i\frac{1}{2}\varepsilon\Delta_\perp u + \nu u + if(|u|)u = 0, \quad (i\varepsilon\operatorname{grad}_\perp + 2k_1)(u - u^{\text{in}}) = 0. \quad (14)$$

Le cas particulier où  $f(w) = e^{-\alpha w^2} - 1$  où  $\alpha$  est une constante positive permet des simulations réalistes d'autofocalisation d'un faisceau laser dans un plasma (voir par exemple [9]). Dans les cas intéressants en pratique, le coefficient  $\nu$  est petit ; de même la constante  $\alpha$  est suffisamment petite (de sorte que  $f(|u|)$ , représentant une variation relative de la densité électronique due au creusement par le faisceau laser, est petite devant 1). Par commodité, on notera dans ce paragraphe  $X, Y$  les variables  $x_1, x_2$ . Le domaine de simulation est un rectangle :  $X \in [0, X_{\max}]$ ,  $Y \in [Y_b, Y_u]$ . On discrétise la variables d'espace suivant une grille régulière. Les indices correspondant aux variables  $X$  et  $Y$  seront notés respectivement  $n$  et  $j$ . La méthode numérique proposée ici est basée sur un algorithme de splitting en trois étapes, où  $X$  joue le rôle de variable de temps. Soit  $\nu_0 = \inf \nu$  et  $\nu_1 = \nu - \nu_0$ . Pour passer de  $X$  à  $X + \delta X$

- *Etape A* : on passe de  $u^n$  à  $u^{n,b}$  en résolvant sur  $[X^n, X^n + \delta X]$  l'équation :

$$(k_1 \partial_{x_1} + k_2 \partial_{x_2})u - i \frac{1}{2} \varepsilon \Delta_{\perp} u + \nu_0 u = 0. \quad (15)$$

Grâce au Théorème 3.1, on a :  $\widehat{u^{n,b}}(\xi_2) = \widehat{u^n}(\xi_2) e^{R_-(i\xi_2)\delta X}$ . Or, pour une équation d'advection simple, une résolution analytique dans une direction et par F.F.T. dans l'autre direction engendre des parasites. C'est pourquoi, dans le cas présent (qui est une perturbation d'équation d'advection), on effectue les étapes B et C suivantes.

- *Etape B* : on passe de  $u^{n,b}$  à  $u^{n,\sharp}$  en résolvant sur  $[X^n, X^n + \delta X]$  l'équation :  $k_1 \partial_{x_1} u - k_2 \partial_{x_2} u = 0$ .
- *Etape C* : on passe de  $u^{n,\sharp}$  à  $u^{n+1}$  en résolvant sur  $[X^n, X^n + \delta X]$ , l'équation :

$$k_1 \partial_{x_1} u + k_2 \partial_{x_2} u + \nu_1 u + i f(|u|)u = 0. \quad (16)$$

En pratique, les étapes A et B sont effectuées simultanément en variables de Fourier ; partant des valeurs de  $(u^n) = (u_j^n)$ , on effectue une F.F.T. sur  $u^n$ , on multiplie le résultat par  $e^{(R_-(i\xi_2) + i\xi_2 k_1/k_2)\delta X}$ , puis on retourne en variables physiques par F.F.T. inverse.

Pour l'étape C, on utilise une méthodes de différences finies standard – dans ce cas un schéma décentré upwind – en choisissant les pas  $\delta X$  et  $\delta Y$  afin de vérifier le critère de stabilité de C.F.L.  $k_2 \delta X / (k_1 \delta Y) \leq 1$ . Pour éviter les difficultés liées aux bords  $\{Y = Y_b\}$  et  $\{Y = Y_u\}$  on utilise un coefficient d'absorption  $\nu_1$  augmentant progressivement sur les 4 dernières mailles près de ces bords, employant ainsi une technique popularisée par [2]. Enfin, on utilise un schéma à l'ordre 2 en  $Y$  avec un limiteur de pente classique (le limiteur de pente de Van Leer portant sur  $|u|^2$ ).

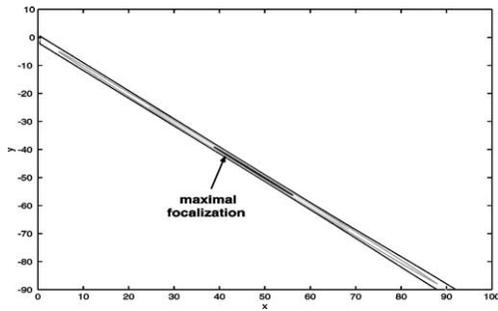
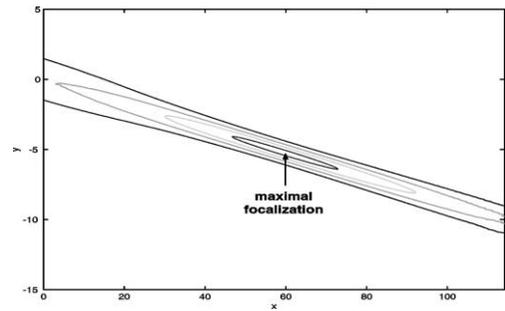
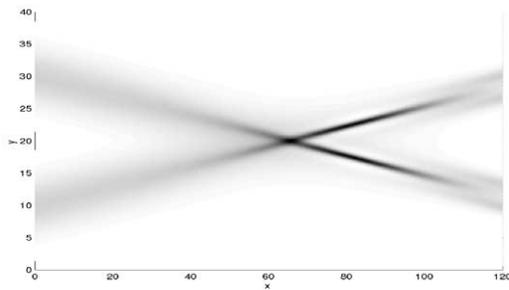
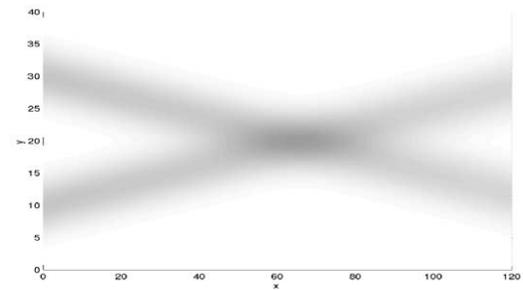
**Remarque.** Lorsque  $k_2$  tend vers 0,  $R_-(i\xi_2) + i\xi_2 k_2/k_1 = i\xi_2/(k_1 k_2) - ik_1/(\varepsilon k_2^2)(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon k_2 \xi_2/k_1^2 + 2i\nu \varepsilon k_2^2/k_1^2}) = i\varepsilon \xi_2^2/2k_1^3 - \nu/k_1 + O(k_2)$ . On retrouve alors une méthode numérique standard pour l'équation paraxiale classique, du type de celle qui est utilisée par exemple dans [3].

## 6. Exemples de résultats numériques et conclusion

On part d'une condition entrante de la forme  $u^{\text{in}}(X, Y) = \exp(-(k_1 Y + k_2 X)^2/L^2)$ . On prend  $\alpha = 0,05$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $L = 2,5$  et  $\nu = 0,001$ . Figs. 1 et 2 représentent les lignes de niveau de l'énergie laser  $|u|^2$ , où  $u$  est solution de (14) avec deux angles d'incidence différents,  $45^\circ$  et  $5^\circ$ . On vérifie que le point où l'énergie laser  $|u|^2$  est maximum est à la même distance de l'origine ( $60,2 \pm 0,4$ ). Les tests de convergence en fonction du pas de discrétisation sont satisfaisants.

L'étude commencée ici pourrait être intéressante pour traiter des problèmes de croisement de faisceaux correspondant à  $u^1$  et  $u^2$  et se propageant suivant  $\vec{k}^1$  et  $\vec{k}^2$  respectivement. Afin d'étudier la faisabilité de ce projet, nous résolvons numériquement le système suivant de deux équations d'advection-Schrödinger couplées :

$$\begin{aligned} i\vec{k}^1 \cdot \nabla u^1 + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta_{\perp}^1 u^1 + i\nu u^1 &= f(w)u^1, \\ i\vec{k}^2 \cdot \nabla u^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta_{\perp}^2 u^2 + i\nu u^2 &= f(w)u^2, \quad \text{où } w = \sqrt{|u^1|^2 + |u^2|^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Fig. 1. Autofocalisation, angle d'incidence  $45^\circ$ .Fig. 1. Autofocalisation, angle of incidence  $45^\circ$ .Fig. 2. Autofocalisation, angle d'incidence  $5^\circ$ .Fig. 2. Autofocalisation, angle of incidence  $5^\circ$ .Fig. 3. Croisement de 2 faisceaux avec  $\alpha = 0,05$  (présence d'un plasma).Fig. 3. 2 beams crossing with  $\alpha = 0.05$  (presence of a plasma).Fig. 4. Croisement de 2 faisceaux avec  $\alpha = 0$  (cas du vide).Fig. 4. 2 beams crossing with  $\alpha = 0$  (vacuum).

Figs. 3 et 4 montrent, pour  $\alpha = 0.05$  et  $\alpha = 0$ , les valeurs de  $|w|^2$  avec deux faisceaux de même énergie.

Ce travail permet d'envisager des simulations paraxiales à l'intérieur d'un domaine où le profil de densité électronique présente une variation à l'échelle macroscopique, ce qui entraîne une variation de la direction du vecteur de propagation  $\vec{k}$ . Pour les détails de ce travail, voir [5,6].

## Références

- [1] A. Arnold, On absorbing boundary conditions for quantum evolution equations, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 28 (7) (1994) 853–872.
- [2] J.-P. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.* 114 (1994) 185–200.
- [3] R.L. Berger, B.F. Lasinski, et al., Theory and three-dimensional simulation of light filamentation, *Phys. Fluids B* 5 (1993) 2243–2258.
- [4] C.-H. Bruneau, L. Di Menza, Conditions aux limites transparentes et artificielles pour l'équation de Schrödinger en dimension 1 d'espace, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320 (1995) 89–94.
- [5] M. Doumic, F. Golse, R. Sentis, Boundary value problem for an oblique paraxial model of light propagation: the advection-Schrödinger equation, en préparation.
- [6] M. Doumic, F. Golse, R. Sentis, Numerical resolution of an oblique paraxial model of light propagation (the advection-Schrödinger equation), en préparation.
- [7] M.D. Feit, J.A. Fleck, Beam nonparaxiality, *J. Opt. Soc. America B* 5 (1988) 633–640.
- [8] D. Lee, A.D. Pierce, E.-S. Shang, Parabolic equation development in the twentieth century, *J. Comput. Acoust.* 8 (2000) 527–637.
- [9] H.A. Rose, Laser beam deflection, *Phys. Plasmas* 3 (1996) 1709–1727.