Ann. I. H. Poincaré – PR 39, 6 (2003) 993–1011

10.1016/S0246-0203(03)00032-3/FLA

COMPARAISON DES DEUX COMPOSANTES D'UN SUBORDINATEUR BIVARIÉ, PUIS ÉTUDE DE L'ENVELOPPE SUPÉRIEURE D'UN PROCESSUS DE LÉVY

Vincent VIGON

Laboratoire de mathématique, INSA de Rouen, France

Reçu le 3 décembre 2002, accepté le 10 février 2003

RÉSUMÉ. – Soit (Y, Z) un subordinateur bivarié. Nous donnons une condition suffisante pour que Y_t/Z_t converge vers zéro quand t tend vers 0 ou $+\infty$. Ceci généralise partiellement des résultats de Bertoin et de Kesten–Erickson.

Soit X un processus de Lévy et $S_t = \sup\{X_s\colon\ s \leqslant t\}$. Soit f une fonction sous-additive. En appliquant le résultat précédent au subordinateur bivarié d'échelle, nous donnons des conditions nécéssaires et suffisantes pour que $\underline{\lim}_0 S_t/f(t)$ et $\underline{\lim}_\infty S_t/f(t)$ égalent 0 ou $+\infty$.

MSC : 60G51 ; 60G18

ABSTRACT. – Let (Y, Z) be a bivariate subordinator. Generalizing theorems of Bertoin and Kesten–Erickson, we give a sufficient condition for Y_t/Z_t to converge to 0 when t tends either to 0 or $+\infty$.

Let X be a Lévy process. Denote by $S_t = \sup\{X_s\colon\ s \leqslant t\}$ and let f be any sub-additive function. Applying our first result to the bivariate ladder process, we give necessary and sufficient conditions for $\underline{\lim}_0 S_t/f(t)$ and $\underline{\lim}_\infty S_t/f(t)$ to be either 0 or $+\infty$.

Keywords: Lévy processes; Sample path properties

1. Introduction

1.1. Comparaison des deux composantes d'un subordinateur bivarié au voisinage de zéro

Si Y est un subordinateur, nous notons d_Y sa dérive. Nous notons $\mathcal{V}_Y(x) = \int_0^\infty \mathbf{P}[Y_t \leqslant x]\,dt$, la fonction de répartition de la mesure potentielle de Y. Nous notons

Adresse e-mail : vigon@lmi.insa-rouen.fr (V. Vigon).

$d\pi_Y$ sa mesure de Lévy et $\bar{\pi}_Y$ la queue de cette mesure :

$$\bar{\pi}_Y(x) = \int_{]x,\infty[} d\pi_Y(y).$$

J. Bertoin a montré dans [2] que si Y et Z sont deux subordinateurs indépendants et sans dérive, alors $\overline{\lim}_0 Y_t/Z_t = 0$ ssi $\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty$. Nous généralisons ce résultat dans une direction lorsque (Y, Z) est un subordinateur bivarié, i.e. un processus de Lévy de dimension 2, dont les deux composantes Y et Z sont croissantes.

THÉORÈME 1.1. – *Soit (Y, Z) un subordinateur bivarié. Supposons que Y n'a pas de dérive et que Z n'est pas un processus de Poisson composé. Nous avons* :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, \frac{Y_t}{Z_t} = 0.$$

Ce théorème sera démontré dans la section 2. Dans cette même section nous donnerons un contre-exemple explicite montrant sa réciproque est fausse.

Remarques. –

(1) Nous avons perdu le caractère nécessaire du critère de J. Bertoin. Cependant, notre critère est pratique : Bien que formulé avec les lois marginales de (Y, Z), il impose un comportement au couple (Y, Z).
(2) Le critère intégral $\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty$ est, en réalité, équivalent à $\overline{\lim}_{0+} \frac{\Delta Y_t}{Z_{t-}} = 0$. Nous verrons cela dans la section 4.
(3) Signalons enfin que le critère intégral utilisé dans le théorème précédent peut s'exprimer différemment. Par le théorème de Fubini et par un argument de restriction classique, nous avons :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \bar{\pi}_Y\, d\mathcal{V}_Z < \infty.$$

Par ailleurs, rappelons le lemme classique suivant (cf. [7] ou p. 83 ou [1], p. 74) :

LEMME 1.2 (de l'encadreur). – *Soit Z un subordinateur. On a l'encadrement suivant* :

$$\forall x > 0 \quad \frac{x}{\mathsf{d}_Z + \int_0^x \bar{\pi}_Z} \leqslant \mathcal{V}_Z(x) \leqslant \frac{3x}{\mathsf{d}_Z + \int_0^x \bar{\pi}_Z},$$

où $\int_0^x \bar{\pi}_Z = \int_0^x \bar{\pi}_Z(u)\, du$.

En appliquant ce lemme, on obtient :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{\mathsf{d}_Z + \int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y < \infty.$$

1.2. Les grands temps

Le théorème de Bertoin a un équivalent pour les grands temps, c'est le théorème de Kesten–Erickson : si Y et Z sont deux subordinateurs d'espérance infinie, alors $\int_1^\infty \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty$ équivaut à $\varlimsup_\infty Y_t/Z_t = 0$. Nous généralisons ce théorème de la manière suivante :

THÉORÈME 1.3. – *Soit* (Y, Z) *un subordinateur bivarié. Supposons que* $\mathbf{E}[Y_1]$ *ou* $\mathbf{E}[Z_1]$ *est infinie. Nous avons* :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty \quad \Rightarrow \quad \varlimsup_{t\to\infty} \frac{Y_t}{Z_t} = 0.$$

Ce théorème sera démontré section 3. En s'inspirant du contre-exemple relatif au théorème 1.1, on peut construire un contre-exemple infirmant la réciproque du théorème ci-dessus.

1.3. Étude du processus des suprema passés en 0+

Soit X un processus de Lévy. Soit $S_t = \sup\{X_s\colon\ s \leqslant t\}$ le processus des suprema passés. Citons un grand classique :

THÉORÈME 1.4 (B.A. Rogozin). – *Si* X *est à variation infinie alors* :

$$\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{X_t}{t} = +\infty.$$

Ceci implique que $\varlimsup_{0+} S_t/t = +\infty$. Mais la limite inférieure n'est pas déterminée.

THÉORÈME 1.5. – *Soit* X *un processus de Lévy à variation infinie. Notons* $\rceil$ *le subordinateur d'échelle temporel de* X. *Notons* H *le subordinateur d'échelle spatial de* X. *Soit* f *une fonction croissante, continue, sous-additive. Nous avons* :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\, d\pi_\rceil(x) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \varliminf_{t\downarrow 0} \frac{S_t}{f(t)} = +\infty,$$

$$\int_0^1 \mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\, d\pi_\rceil(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \varliminf_{t\downarrow 0} \frac{S_t}{f(t)} = 0.$$

Ce théorème sera démontré section 5.

1.4. Étude du processus des suprema passés en $+\infty$

THÉORÈME 1.6. – *Soit* X *un processus de Lévy qui ne tend pas vers* $-\infty$. *Soit* f *une fonction continue, croissante, sous-additive, telle que* $\lim_\infty f(t)/t = 0$. *Nous avons* :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\, d\pi(x) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \varliminf_{t\to\infty} \frac{S_t}{f(t)} = +\infty,$$

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\,d\pi_\rceil(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \varliminf_{t\to\infty}\frac{S_t}{f(t)}=0.$$

Le cas $f(t)=t$ doit être traité à part. Grâce à la loi des grands nombres et au théorème de Kesten–Erickson, si X tend vers $+\infty$ ou $\mathbf{E}|X_1|<\infty$, ce cas est relativement trivial (pour plus de détails, cf. proposition 6.2 plus loin). Sinon :

THÉORÈME 1.7. – *Soit X un processus de Lévy qui oscille en $+\infty$ et tel que $\mathbf{E}|X_1|=+\infty$, nous avons* :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H(x)\,d\pi_\rceil(x)<\infty \quad\Leftrightarrow\quad \varliminf_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=+\infty,$$

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H(x)\,d\pi_\rceil(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \varliminf_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=0.$$

Les deux derniers théorèmes seront démontrés section 6.

2. Étude de Y_t/Z_t en 0+

2.1. Rappel des résultats nécessaires

Réécrivons maintenant le théorème de J. Bertoin [2] sous une forme adaptée à notre démonstration.

THÉORÈME 2.1 (J. Bertoin). – *Soient P et N deux subordinateurs indépendants sans dérive. Supposons de plus que $P-N$ n'est pas un processus de Poisson composé. Les deux points suivants sont équivalents* :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_N}\,d\pi_P(x)<\infty,$$

$P-N$ *ne visite pas* $]0,\infty[$ *immédiatement*.

Pour généraliser ce théorème, nous ferons appel au critère de Rogozin ([1], p. 167) :

THÉORÈME 2.2 (Rogozin). – *Soient P et N deux subordinateurs indépendants. $P-N$ ne visite pas* $]0,\infty[$ *immédiatement si et seulement si* :

$$\int_0^1 \mathbf{P}[P_t-N_t>0]\,\frac{dt}{t}<\infty.$$

2.2. Notations et lemmes préliminaires

Les notations suivantes seront utilisées à plusieures reprises :

Soit (Y,Z) un subordinateur bivarié sans dérive. Nous notons $U=Y-Z$ et définissons les subordinateurs sans dérive $P,N,\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ par :

$$\Delta P = (\Delta Y - \Delta Z) \vee 0, \qquad P_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta P_s,$$

$$\Delta N = (\Delta Z - \Delta Y) \vee 0, \qquad N_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta N_s,$$

$$\Delta \widetilde{Y} = \Delta Y 1_{\{\Delta Y < \Delta Z\}}, \qquad \widetilde{Y}_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta \widetilde{Y}_s,$$

$$\Delta \widetilde{Z} = \Delta Z 1_{\{\Delta Z < \Delta Y\}}, \qquad \widetilde{Z}_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta \widetilde{Z}_s.$$

Le lemme suivant découle directement de ces définitions :

LEMME 2.3. – *On a les relations suivantes* :

$$U = P - N,$$
$$Y = P + \widetilde{Y} + \widetilde{Z},$$
$$Z = N + \widetilde{Y} + \widetilde{Z}.$$

La décomposition $U = P - N$ est la décomposition classique de U en différence de deux subordinateurs indépendants.

LEMME 2.4. – *Soit (Y, Z) un subordinateur bivarié. On a* :

$$\bar{\pi}_{Y+Z}(x) \leqslant \bar{\pi}_Y\left(\frac{x}{2}\right) + \bar{\pi}_Z\left(\frac{x}{2}\right).$$

Démonstration. –

$$\bar{\pi}_{Y+Z}(x) = \iint_{\{y+z>x\}} d\pi_{(Y,Z)}(y, z) \leqslant \iint_{\{y>x/2\} \cup \{z>x/2\}} d\pi_{(Y,Z)}(y, z)$$
$$\leqslant \bar{\pi}_Y\left(\frac{x}{2}\right) + \bar{\pi}_Z\left(\frac{x}{2}\right). \qquad \square$$

2.3. Résulats

Nous allons maintenant procéder à la démonstration du théorème 1.1, en commençant par deux lemmes, dont le deuxième contient l'astuce essentielle de la démonstration.

LEMME 2.5. – *Soit (Y, Z) un subordinateur bivarié sans dérive tel que Y ou Z n'est pas un processus de Poisson composé. Si*

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z} \, d\pi_Y(x) < \infty$$

alors $Y - Z$ n'est pas un processus de Poisson composé.

Démonstration. – En utilisant les notations introduites page 6 on a :

$$\bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}(x) \leqslant \bar{\pi}_Y(x) \leqslant \bar{\pi}_P\left(\frac{x}{2}\right) + \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$\bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}(x) \leqslant \bar{\pi}_Z(x) \leqslant \bar{\pi}_N\left(\frac{x}{2}\right) + \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Supposons par l'absurde que $U = Y - Z$ est un processus de Poisson composé. Les fonctions $\bar{\pi}_P$ et $\bar{\pi}_N$ sont alors bornées, tandis que $\bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}$ ne l'est pas (car par hypothèse Y ou Z n'est pas un processus de Poisson composé). Cela implique notamment que :

$$\exists Cst > 0\ \forall x \in]0,1[\quad \int_0^x \bar{\pi}_Z \leqslant Cst \int_0^x \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) \geqslant \frac{1}{Cst} \int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}}\, d\pi_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}(x).$$

Un argument classique de symétrie (voir par exemple le lemme 4.4) implique que cette dernière intégrale est infinie. □

LEMME 2.6. – *Soit* (Y, Z) *un subordinateur bivarié sans dérive tel que* Y *ou* Z *n'est pas un processus de Poisson composé. On a l'implication suivante* :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad Y - Z \textit{ ne visite pas }]0,\infty[\textit{ immédiatement}.$$

Démonstration. – D'après le lemme 2.5, nous pouvons supposer que $U = Y - Z$ n'est pas un processus de Poisson composé. Grâce au théorème Bertoin 2.1, montrer l'implication du lemme revient à montrer l'implication suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_N}\, d\pi_P(x) < \infty.$$

Montrons la contraposée de cette dernière, supposons que

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_N}\, d\pi_P(x) = \infty. \tag{1}$$

Par définition de $\Delta\widetilde{Y}$ et $\Delta\widetilde{Z}$, on a : $\Delta\widetilde{Y} + \Delta\widetilde{Z} \leqslant \Delta Y$, donc $\Delta Z \leqslant \Delta N + \Delta Y$ et donc $\bar{\pi}_Z(z) \leqslant \bar{\pi}_{N+Y}(z)$. Par ailleurs, (N, Y) est un subordinateur bivarié ; d'après le lemme 2.4 on a :

$$\bar{\pi}_Z(z) \leqslant \bar{\pi}_{N+Y}(z) \leqslant \bar{\pi}_N\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{\pi}_Y\left(\frac{z}{2}\right).$$

Ainsi $\int_0^x \bar\pi_Z \leqslant 2\int_0^{(x/2)}(\bar\pi_N+\bar\pi_Y) \leqslant 2\int_0^x(\bar\pi_N+\bar\pi_Y)$, puis :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar\pi_Z}\,d\pi_Y(x) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar\pi_N+\int_0^x \bar\pi_Y}\,d\pi_Y(x)$$
$$\geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar\pi_N+\int_0^x \bar\pi_Y}\big(d\pi_Y(x)+d\pi_Y(x)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}.$$

Soient Y', Y'' et Y''' trois copies de Y telles que les quatre processus N, Y', Y'' et Y''' soient indépendants. D'après le théorème de Bertoin, montrer que $\mathbb{I}$ est infinie revient à montrer que le processus de Lévy $Y'+Y''-Y'''-N$ visite $]0,\infty[$ immédiatement. Pour se faire, utilisons le critère de Rogozin (2.2) :

$$\int_0^1 \mathbf{P}\big[Y_t'+Y_t''-Y_t'''-N_t>0\big]\,\frac{dt}{t} \geqslant \int_0^1 \mathbf{P}\big[Y_t'-Y_t'''>0\big]\mathbf{P}\big[Y_t''-N_t>0\big]\,\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{P}\big[Y_t''-N_t>0\big]\,\frac{dt}{t}.$$

Montrons que cette dernière intégrale est infinie. Par l'hypothèse (1), le processus de Lévy $P-N$ visite $]0,\infty[$ immédiatement. Donnons nous N' une copie de N qui soit indépendante de (Y,Z). Le processus $P-N'$ a même loi que $P-N$, donc il visite $]0,\infty[$ immédiatement. Par construction on a $Y\geqslant P$ donc on a aussi $Y-N'\geqslant P-N'$ (trajectoire par trajectoire). Ainsi, $Y-N'$ visite $]0,\infty[$ immédiatement. Mais ce dernier processus a même loi que $Y''-N$, ainsi, par le critère de Rogozin on a :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{P}\big[Y_t''-N_t>0\big]\,\frac{dt}{t}=\infty.$$

Ce qui conclut la démonstration du lemme. □

Grâce au lemme de l'encadreur (1.2), le théorème 1.1 peut-être paraphrasé comme ceci :

THÉORÈME 2.7. – *Soit (Y,Z) un subordinateur bivarié. Supposons que Y n'ait pas de dérive et que Z ne soit pas un processus de Poisson composé. Nous avons* :

$$\int_0^1 \frac{x}{\mathsf{d}_Z+\int_0^x \bar\pi_Z}\,d\pi_Y(x)<\infty \quad\Rightarrow\quad \varlimsup_{t\downarrow 0}\frac{Y_t}{Z_t}=0$$

(d_Z *est la dérive de* Z).

Démonstration. – Supposons pour commencer que $\mathsf{d}_Z>0$. Dans ce cas :

$$\text{en } 0+\quad \frac{x}{\mathsf{d}_Z+\int_0^x \bar\pi_Z}\sim\frac{x}{\mathsf{d}_Z}.$$

Donc l'intégrale du théorème 2.7 converge. Par ailleurs, puisque Y n'a pas de dérive, on a $\overline{\lim}_{t\downarrow 0} Y_t/Z_t = 0$. Ainsi, dans le cas $\mathsf{d}_Z > 0$, le théorème est trivial mais vrai. Nous supposons maintenant que Y et Z n'ont pas de dérive.

La fonction $x \mapsto x/\int_0^x \bar{\pi}_Z$ est sous-additive, ainsi :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \forall k > 0 \quad \int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_{kY}(x) < \infty.$$

D'après le lemme 2.6, cela implique que pour tout $k > 0$, $kY - Z_t$ ne visite pas $]0, \infty[$ immédiatement. Cette dernière propriété équivaut à $\overline{\lim}_0 Y_t/Z_t = 0$. □

2.4. Contre-exemple

La proposition ci-dessous montre que la réciproque du théorème 1.1 est fausse :

PROPOSITION 2.8. – *Soit Z un subordinateur sans dérive tel que*

$$\text{en } 0+ \quad \bar{\pi}_Z(x) \sim x^{-\alpha} \quad (\alpha \in]0, 1[).$$

Soit f une fonction telle que

$$f(x) = \frac{x}{|\ln(x)|} \quad \text{sur } \left]0, \frac{1}{4}\right[$$

et que l'on prolonge en une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Soit Y le subordinateur sans dérive dont les sauts sont définis par :

$$\Delta Y_t = f(\Delta Z_t).$$

La paire (Y, Z) est un subordinateur bivarié et vérifie :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y = +\infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{Y_t}{Z_t} = 0.$$

Démonstration. – Soit f° la fonction inverse de f, elle vérifie en $0+$: $f^{\circ}(x) \sim x|\ln(x)|$. La queue de la mesure de Lévy de Y vérifie donc :

$$\bar{\pi}_Y(x) = \bar{\pi}_Z[f^{\circ}(x)] \sim \frac{1}{x^{\alpha}|\ln(x)|^{\alpha}}.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y \sim \int_0^1 \bar{\pi}_Y\, d\mathcal{V}_Z \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}|\ln(x)|^{\alpha}}\, d(x^{\alpha}),$$

et cette dernière intégrale diverge. Par ailleurs, la fonction f vérifie $\lim_0 f(x)/x = 0$. Puique ΔZ_t tend vers 0 quand t tend vers zéro on a :

$$\forall \varepsilon\ \exists t_0\ \forall t < t_0 \quad \frac{\Delta Y_t}{\Delta Z_t} = \frac{f(\Delta Z_t)}{\Delta Z_t} \leqslant \varepsilon.$$

Par sommation : $\forall \varepsilon\ \exists t_0\ \forall t < t_0\ Y_t \leqslant \varepsilon\, Z_t$. $\square$

3. Comportement de Y_t/Z_t en $+\infty$

3.1. Rappels des théorèmes nécessaires

Le théorème de Kesten–Erickson fut démontré en deux temps par Kesten [5] en 1970 puis Erickson [4] en 1973. Nous référons aussi à ([7], chapitres 8 et 9), où nous donnons une nouvelle démonstration de ce théorème et du théorème de Bertoin ; les deux démonstrations étant menées de façon parallèle.

THÉORÈME 3.1 (Kesten–Erickson). – *Soient P et N deux subordinateurs indépendants tels que $\mathbf{E}|P_1 - N_1| = +\infty$. Les deux points suivants sont équivalents* :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_N}\, d\pi_P(x) < \infty,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, P_t - N_t = -\infty.$$

THÉORÈME 3.2 (Rogozin). – *Soient P et N deux subordinateurs indépendants. $P - N$ converge vers $-\infty$ si et seulement si* :

$$\int_1^\infty \mathbf{P}[P_t - N_t > 0]\, \frac{dt}{t} < +\infty.$$

3.2. Résultat

NB. Nous reprenons les notations introduites page 6.

LEMME 3.3. – *Soit (Y, Z) un subordinateur bivarié tel que $\mathbf{E}[Y_1]$ ou $\mathbf{E}[Z_1]$ est infini. Si*

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty$$

alors $\mathbf{E}|U_1| = \mathbf{E}|Y_1 - Z_1|$ est infinie.

Démonstration. – Nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que Y et Z n'ont pas de dérive. En reprenant les notations de la page 6 :

$$\bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}(x) \leqslant \bar{\pi}_Y(x) \leqslant \bar{\pi}_P\left(\frac{x}{2}\right) + \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}(x) \leqslant \bar{\pi}_Z(x) \leqslant \bar{\pi}_N\left(\frac{x}{2}\right) + \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Supposons par l'absurde que $\mathbf{E}[U_1]$ est finie. Les fonctions $\bar{\pi}_P$ et $\bar{\pi}_N$ sont alors intégrables, tandis que $\bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Y}}$ ne l'est pas (car par hypothèse $\mathbf{E}[Y_1]$ ou $\mathbf{E}[Z_1]$ est infinie). Cela implique notamment que :

$$\exists Cst > 0\ \forall x \in]1, \infty[\quad \int_0^x \bar{\pi}_Z \leqslant Cst \int_0^x \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}.$$

Ainsi

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) \geqslant \frac{1}{Cst} \int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}}\, d\pi_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}(x).$$

Un argument classique de symétrie implique que cette dernière intégrale est infinie. □

LEMME 3.4. – *Soit* (Y, Z) *un subordinateur bivarié tel que* $\mathbf{E}[Y_1]$ *ou* $\mathbf{E}[Z_1]$ *est infinie. On a l'implication suivante* :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad U = Y - Z \text{ converge vers } -\infty.$$

Démonstration. – Pour montrer ce lemme, d'après le lemme 3.3, nous pouvons supposer que $\mathbf{E}|U_1| = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de Kesten, U_t converge vers $-\infty$ équivaut à U_t/t converge vers $-\infty$. Nous pouvons donc supposer, sans perdre de généralité, que Y et Z n'ont pas de dérive.

Par le théorème de Kesten–Erickson 3.1, montrer l'implication du théorème revient à montrer l'implication suivante :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_N}\, d\pi_P(x) < \infty.$$

Pour montrer cette implication, on procède exactement de la même manière que pour le lemme 2.6, le critère de Rogozin en $+\infty$ remplaçant le critère de Rogozin en 0. □

Grâce au lemme de l'encadreur (1.2), le théorème 1.3 peut-être paraphrasé comme suit :

THÉORÈME 3.5. – *Soit* (Y, Z) *un subordinateur bivarié tel que* $\mathbf{E}[Y_1]$ *ou* $\mathbf{E}[Z_1]$ *est infinie. Nous avons* :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{Y_t}{Z_t} = 0.$$

Démonstration. – La fonction $x \mapsto x/\int_0^x \bar{\pi}_Z$ est sous-additive, ainsi :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Y(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \forall k > 0 \quad \int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_{kY}(x) < \infty.$$

D'après le lemme 3.4, cela implique que pour tout $k > 0$, $kY_t - Z_t$ converge vers $-\infty$. Cette dernière propriété équivaut à $\overline{\lim}_\infty Y_t/Z_t = 0$. □

4. Étude de $\frac{\Delta Y_t}{Z_t^-}$ en 0+

NB. – Si Z est un processus càdlàg, nous noterons $Z_t^- = Z_{t-}$ son régularisé à gauche.

Avant de passer à l'étude S_t, nous avons besoin de quelques résultats sur la comparaison d'un subordinateur Z avec un processus de saut ΔY. Dans cette section, le couple $(\Delta Y, Z)$ vérifiera l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 4.1. –
- *Z est un subordinateur ayant éventuellement une dérive et Z n'est pas un processus de Poisson composé.*
- *Les sauts de Z sont notés ΔZ. Le couple $(\Delta Y, \Delta Z)$ est un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$.*
- *Pour tout $\varepsilon > 0$, le cardinal de l'ensemble $\{t < 1\colon\ \Delta Y_t > \varepsilon\}$ est fini (pas d'accumulation de grands sauts).*

Nous notons toujours $\mathcal{V}_Z(x) = \int_0^\infty \mathbf{P}[Z_t \leqslant x]\,dt$. Notons $d\pi_Y$ la mesure caractérisant ΔY et $\bar{\pi}_Y$ sa queue :

$$\bar{\pi}_Y(x) = \mathbf{E}\big[\#\{s < 1\colon\ \Delta Y_s > x\}\big].$$

Attention, $d\pi_Y$ n'est pas forcément une mesure de Lévy dans le sens où elle n'intègre pas forcément $x \mapsto x \wedge 1$, ni même $x \mapsto x^2 \wedge 1$.

THÉORÈME 4.2. – *Soit $(\Delta Y, Z)$ satisfaisant l'hypothèse* 4.1. *Nous avons* :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0,$$

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = +\infty.$$

Pour montrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant qui est relativement connu (cf. [2]).

LEMME 4.3. – *Soit f une fonction décroissante positive et Z un subordinateur.*

$$\mathbf{E}\int_0^1 f(Z_t)\,dt = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(Z_t)\,dt = \infty \quad p.s.$$

Démonstration du théorème 4.2. – Nous pouvons considérer, sans perdre de généralité, que $(\Delta Y, \Delta Z)$ est un processus de Poisson ponctuel mourant (i.e. il a même loi qu'un immortel tué en un temps exponentiel indépendant). Ainsi $\mathcal{V}_Z$ est bornée et :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty.$$

Supposons cette finitude. Soit $k < 1$. Notons ξ le temps de mort de $(\Delta Y, \Delta Z)$. Par la formule de compensation, on a :

$$\mathbf{E} \sum_{t \leqslant \xi} 1_{\{\Delta Y_t \geqslant k Z_t^-\}} = \int_0^\infty \mathcal{V}_Z\left(\frac{y}{k}\right) d\pi_Y(y) \leqslant \frac{1}{k} \int_0^\infty \mathcal{V}_Z(y) \, d\pi_Y(y) < \infty.$$

La dernière inégalité vient de la sous-aditivité de $\mathcal{V}_Z$. Ainsi les sauts ΔY_t plus grands que $k\, Z_t^-$ ne s'accumulent pas en zéro. Comme ceci est vrai pour tout k petit, on a bien :

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0.$$

Réciproquement. – Supposons que $\int_0^1 \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y = \infty$. Soit $k > 1$. La sous-additivité de $\mathcal{V}_Z$ implique que $\int_0^1 \bar{\pi}_Y(kx) \, d\mathcal{V}_Z(x) = \infty$. Le lemme 4.3 appliqué à $f(x) = \bar{\pi}(kx)$ donne :

$$\int_0^1 \bar{\pi}_Y(kZ_t) \, dt = \infty \quad \text{p.s.}$$

Définissons le temps d'arrêt $T^k = \inf\{t\colon\ \Delta Y_t \geqslant k Z_t^-\}$. Nous convenons que $\Delta Y_\xi = +\infty$; ainsi $T^k \leqslant \xi$. Nous allons montrer que $T^k = 0$ p.s. La mesure de Dirac en T^k peut s'écrire :

$$\delta_{T^k} = \sum_{t \leqslant \xi} \delta_t \, 1_{\{\Delta Y_t \geqslant k Z_t^-\}} 1_{]0, T^k]}.$$

Par la formule de compensation, nous obtenons :

$$1 \geqslant \mathbf{P}\left[T^k > 0\right] = \mathbf{E} \sum_t 1_{\{\Delta Y_t \geqslant k Z_t^-\}} 1_{]0, T^k]} = \mathbf{E} \int_0^{T^k} \bar{\pi}_Y(k Z_t) \, dt.$$

Si $\mathbf{P}[T^k > 0]$ était strictement positive, alors la dernière intégrale serait infinie ce qui est contradictoire. Donc $T^k = 0$ p.s. et, par définition de T^k, cela équivaut à $\overline{\lim}_0 \Delta Y_t / Z_t^- \geqslant k$. Ceci est vrai pour tout $k > 1$.

4.1. Corollaire

Dans cette section nous donnons un corollaire des théorèmes 1.1 et 4.2.

LEMME 4.4. – *Soit Z un subordinateur sans dérive qui n'est pas un processus de Poisson composé, nous avons* :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \bar{\pi}_Z}\, d\pi_Z(x) = \int_0^1 \mathcal{V}_Z(x)\, d\pi_Z(x) = +\infty.$$

Démonstration. – Soit Z' une copie indépendante de Z. Le processus $Z - Z'$ étant symétrique, il visite $]0, \infty[$ immédiatement et le théorème de Bertoin 2.1 donne le résultat. □

COROLLAIRE 4.5. – *Soit* $(\Delta Y, Z)$ *satisfaisant l'hypothèse* 4.1.

(a) *Si* $\int_0^1 x\, d\pi_Y(x) = +\infty$ *alors* $\overline{\lim}_0 \Delta Y_t / Z_t = +\infty$.

(b) *Si* (Z_t) *n'a pas de dérive et si ce n'est pas un processus de Poisson composé alors* $\overline{\lim}_0 \Delta Z_t / Z_t^- = +\infty$.

(c) *Si* (Z_t) *n'a pas de dérive et si ce n'est pas un processus de Poisson composé alors* $\overline{\lim}_0 \Delta Z_t / Z_t = 1$.

(d) *Si Z n'a pas de dérive et si* $\int_0^1 \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty$ *alors* $\overline{\lim}\, \Delta Z_t / Y_t = +\infty$.

Démonstration. – (a) Considérons le subordinateur particulier $Z_t = t$. On a alors $\mathcal{V}_Z(x) = x$, le théorème 4.2 implique donc $\overline{\lim}_{0+} \Delta Y_t / t = +\infty$. Par suite, pour n'importe quel subordinateur Z, on a encore $\overline{\lim}_{0+} \Delta Y_t / Z_t = +\infty$.

(b) Vient directement du lemme 4.4. Le point (c) est une conséquence immédiate de (b).

Montrons (d). Par le théorème 1.1, l'hypothèse de (d) implique : $\underline{\lim}_{0+} Z_t / Y_t = +\infty$ et donc :

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\Delta Z_t}{Y_t} \geqslant \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\Delta Z_t}{Z_t} \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{Z_t}{Y_t} = +\infty. \qquad \square$$

4.2. Comportement de $\Delta Y_t / Z_t^-$ en $+\infty$

Le théorème suivant est le pendant du théorème 4.2. Sa démonstration est laissée au lecteur (cf. [1], exercice 6, p. 99, où le cas particulier $(\Delta Y, Z) = (\Delta Y, Y)$ est traité).

THÉORÈME 4.6. – *Soit* $(\Delta Y, Z)$ *un couple satisfaisant l'hypothèse* 4.1. *Nous avons* :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0,$$

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_Z\, d\pi_Y = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = \infty.$$

5. Comportement de $S_t/f(t)$ en 0+

LEMME 5.1. – *Soit f une fonction croissante, nous avons* :

$$\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{S_t}{f(t)}=\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{S_t^-}{f(t)}=\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{H_t^-}{f(\rceil_t)}.$$

Démonstration. – L'égalité de gauche vient de la continuité de $f(t)$. Montrons celle de droite. Soit $D_t=\inf\{s>t\colon\ S_s=X_s\}$. Notons L l'inverse continu à droite de $\rceil$. L est p.s. continu et c'est un temps local de $\{S=X\}$. On a de plus : $D_t=\rceil_{L_t}$. Les plus petites valeurs du rapport $(S_t^-/f(t))$ sont nécessairement prises dans l'ensemble $\{D_u\colon\ u\geqslant 0\}$ car, si t n'est pas dans cet ensemble, alors $S_t^-=S_{D_t}^-$ et donc $(S_t^-/f(t))>(S_{D_t}^-/f(D_t))$. Ainsi :

$$\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{S_t^-}{f(t)}=\varliminf_{u\downarrow 0}\frac{S_{D_u}^-}{f(D_u)}.$$

Par ailleurs

$$\varliminf_{u\downarrow 0}\frac{S_{D_u}^-}{f(D_u)}=\varliminf_{u\downarrow 0}\frac{H_{L_u}^-}{f(\rceil_{L_u})}=\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{H_t^-}{f(\rceil_t)}$$

la dernière égalité vient du fait que L est continu. □

Démontrons maintenant le théorème 1.5. – Puisque X est à variation inifinie, X visite immédiatement $]-\infty,0[$ et donc le subordinateur $\rceil$ n'a pas de dérive. D'après le lemme 5.1 nous devons étudier la limite inférieure de $H_t^-/\rceil_t$. Supposons que $\int_0^1\mathcal{V}_H[f(x)]\,d\pi(x)<\infty$. Notons f° l'application inverse de f et $\bar{\pi}_\rceil$ la queue de $d\pi$. On vérifie facilement l'équivalence suivante :

$$\int_0^1\mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\,d\pi_\rceil(x)<\infty\quad\Leftrightarrow\quad\int_0^1\bar{\pi}_\rceil\big[f^{\circ}(x)\big]\,d\mathcal{V}_H(x)<\infty.$$

Par ailleurs, la fonction décroissante $x\mapsto\bar{\pi}_\rceil[f^{\circ}(x)]$ est la queue de la mesure caractérisant le processus de Poisson ponctuel $f(\Delta\rceil)$. Cette queue est intégrable sur $]0,1[$ (car sur $]0,1[$, $\mathcal{V}_Z(x)\geqslant Cst\,x$) et donc les $f(\Delta\rceil)$ sont localement sommables. Ainsi, nous pouvons définir le subordinateur suivant :

$$\rceil_t^f=\sum_{s\leqslant t}f(\rceil_t).$$

En appliquant le théorème 1.1 au couple $(Y,Z)=(\rceil^f,H)$ et le théorème 4.2 au couple $(\Delta Y,Z)=(\Delta\rceil^f,H)$ on trouve :

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\rceil_t^f}{H_t^-}=\varlimsup_{t\to\infty}\left(\frac{\rceil_t^{f-}}{H_t^-}+\frac{\Delta\rceil_t^f}{H_t^-}\right)=0.$$

Par ailleurs, f étant sous-additive, on a $f(\rceil_t) \leqslant \rceil_t^f$ et donc :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{f(\rceil_t)}{H_t^-} = 0.$$

Réciproquement. – Supposons que $\int_0^1 \mathcal{V}_H[f(x)]\,d\pi(x) = \infty$. Grâce à la croissance de f on a :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{f(\rceil_t)}{H_t^-} \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{f(\Delta\rceil_t)}{H_t^-},$$

et le théorème 4.2 montre que le terme de droite est infini.

Remarques. –

(1) Pour la montrer la réciproque, nous n'avons pas utiliser le fait que f est sous-additive, mais uniquement le fait que f est croissante. Le théorème peut donc être généralisé dans ce sens.

(2) Nous avons exploité le fait que pour toute fonction décroissante f on a :

$$\underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{H_t^-}{\rceil_t} = \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{S_t}{f(t)}.$$

Notons $X^\uparrow$ le processus de Lévy conditionné à rester positif. Millar [6] a montré que

$$\underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{H_t}{\rceil_t} = \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{X_t^\uparrow}{f(t)}.$$

Malheureusement, le fait de passer de H_t^- à H_t rend cette égalité extrèmement difficile à exploiter. En effet, la comparaison des deux sauts finaux ΔH et $\Delta\rceil$ nécessite une très bonne connaissance de la mesure de Lévy du couple $(\rceil, H)$ (pour la comparaison de H_t^- et $\rceil_t$, nous avons réussi à contourner cette méconnaissance de la loi du couple grâce au théorème 1.1).

6. Comportement de $S_t/f(t)$ en $+\infty$

6.1. Quand $\lim_\infty f(t)/t = 0$

THÉORÈME 6.1. – *Soit X un processus de Lévy qui ne tend pas vers $-\infty$. Soit f une fonction continue, croissante, sous-additive, telle que* $\lim_\infty f(t)/t = 0$. *Nous avons* :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\,d\pi_\rceil(x) < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S_t}{f(t)} = +\infty,$$

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H\big[f(x)\big]\,d\pi_\rceil(x) = \infty \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S_t}{f(t)} = 0.$$

Démonstration. – À plusieurs reprises, dans cette démonstration, nous utiliserons tacitement la loi des grands nombres à savoir : si Y est un subordinateur alors

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t} = \mathbf{E}[Y_1] \leqslant +\infty.$$

Nous devons étudier, en l'infini, la limite inférieure de $S_t/f(t)$ qui est aussi celle de S_t^-/t, et tout comme dans (5.1), nous établissons sans mal que :

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{S_t^-}{f(t)} = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{H_t^-}{f(\rceil_t)}.$$

Supposons que :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H\left[f(x)\right] d\pi_\rceil(x) < \infty. \tag{2}$$

Soit $A > 0$. Par la sous-additivité de f on a :

$$\begin{aligned} f(\rceil_t) &\leqslant f(\Delta\rceil_t) + f\left(\sum_{s<t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant A\}}\right) + f\left(\sum_{s<t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s < A\}}\right) \\ &\leqslant f(\Delta\rceil_t) + \sum_{s<t} f(\rceil_s) 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant A\}} + f\left(\sum_{s<t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s < A\}}\right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que chacun des trois termes est négligeable devant H_t^- en l'infini.

(1) En appliquant le théorème 4.6 à la paire $(\Delta Y_t, Z_t) = (f(\Delta\rceil_t), H_t)$, notre hypothèse (2) implique

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{f(\Delta\rceil_t)}{H_t^-} = 0.$$

(2) Le subordinateur $t \mapsto \sum_{s\leqslant t} \Delta\rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s < A\}}$ est d'espérance finie. Par hypothèse $\lim_\infty f(x)/x = 0$. Nous en déduisons :

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{f(\sum_{s<t} \Delta\rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s < A\}})}{H_t^-} = 0.$$

(3) Pour étudier le troisième terme, nous devons séparer deux cas. Supposons dans un premier temps que $\mathbf{E}[H_1] = +\infty$. Nous pouvons alors appliquer le théorème 1.3 à la paire $(Y_t, Z_t) = (\sum_{s\leqslant t} f(\Delta\rceil_s) 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant A\}}, H_t)$. Ainsi, notre hypothèse (2) implique

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\sum_{s\leqslant t} f(\Delta\rceil_s) 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant A\}}}{H_t^-} = 0.$$

Supposons dans un deuxième temps que $\mathbf{E}[H_1] < \infty$. Ainsi sur $]1,\infty[$ on a $\mathcal{V}_H(x) \geqslant Cst\, x$ et notre hypothèse (2) implique

$$\int_1^\infty \bar{\pi}\left[f^o(x)\right] dx < \infty.$$

Ce qui signifie que le subordinateur $\daleth_t^A = \sum_{s\leqslant t} f(\Delta\daleth_s)1_{\{\Delta\daleth_s\geqslant A\}}$ est d'espérance finie. On a donc

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\daleth_{t-}^A}{H_t^-}=\frac{\mathbf{E}[\daleth_1^A]}{\mathbf{E}[H_1]}.$$

Mais A peut-être choisi arbitrairement grand, donc $\mathbf{E}[\daleth_1^A]$ est arbitrairement petit.
En regroupant les trois étapes nous trouvons :

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\,\frac{f(\daleth_t)}{H_t^-}=0.$$

Réciproquement. – Supposons que $\int_1^\infty \mathcal{V}_H[f(x)]d\pi_\daleth(x)=\infty$. D'après le théorème 4.6 appliqué à $(\Delta Y, Z)=\big(f(\Delta\daleth), H\big)$ on a :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{f(\daleth_t)}{H_t^-}\geqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{f(\Delta\daleth_t)}{H_t^-}=+\infty. \qquad \square$$

6.2. Le cas $f(t)=t$

Le cas $f(t)=t$ doit être traité à part car les hypothèses sur X sont différentes. Regardons tout de suite les cas triviaux :

PROPOSITION 6.2. – *Soit X un processus de Lévy qui ne tend pas vers $-\infty$.*

- *Si $\mathbf{E}|X_1|<\infty$ alors*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=\mathbf{E}[X_1].$$

- *Si $\mathbf{E}|X_1|=+\infty$ et si X tend vers $+\infty$ alors*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=+\infty.$$

Démonstration. – Le premier point découle directement de la loi des grands nombres. Le deuxième point découle du théorème de Kesten–Erickson dont une conséquence bien connue est : si $\mathbf{E}|X_1|=+\infty$ alors

$$\lim_{t\to\infty}X_t=+\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=+\infty. \qquad\square$$

THÉORÈME 6.3. – *Soit X un processus de Lévy qui oscille en $+\infty$ et tel que $\mathbf{E}|X_1|=+\infty$, nous avons* :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H(x)\,d\pi_\daleth(x)<\infty \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{S_t}{t}=+\infty,$$

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_H(x)\,d\pi_\daleth(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{S_t}{t}=0.$$

Démonstration. – Puisque X oscille et $\mathbf{E}|X_1| = +\infty$, on a $\mathbf{E}[X_1 \vee 0] = +\infty$. Cela implique que $\mathbf{E}[H_1] = +\infty$ (cf. [3] ou ([7], chapitre 6)).

Supposons que

$$\int_1^{\infty} \mathcal{V}_H(x)\, d\pi_{\rceil}(x) < \infty. \tag{3}$$

Nous avons

$$\rceil_t = \Delta\rceil_t + \sum_{s<t} \Delta\rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s<1\}} + \sum_{s<t} \Delta\rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant 1\}}.$$

Nous allons montrer que chacun des trois termes est négligeable devant H_t.

(1) En appliquant le théorème 4.6 à la paire $(\Delta Y_t, Z_t) = (\Delta\rceil_t, H_t)$, notre hypothèse (3) implique

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Delta\rceil_t}{H_t^-} = 0.$$

(2) Le subordinateur $t \mapsto \sum_{s\leqslant t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s<1\}}$ est d'espérance finie tandis que H est d'espérance infinie. Nous en déduisons donc :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\sum_{s<t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s<1\}}}{H_t^-} = 0.$$

(3) Puisque $\mathbf{E}[H_1] = +\infty$, nous pouvons alors appliquer le théorème 1.3 à la paire $(Y_t, Z_t) = (\sum_{s\leqslant t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant 1\}}, H_t)$. Ainsi, notre hypothèse 3 implique

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\sum_{s\leqslant t} \rceil_s 1_{\{\Delta\rceil_s \geqslant 1\}}}{H_t^-} = 0.$$

En regroupant les trois étapes nous trouvons :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\rceil_t}{H_t^-} = 0.$$

Réciproquement. – Supposons que $\int_1^{\infty} \mathcal{V}_H(x)\, d\pi(x) = \infty$. D'après le théorème 4.6 appliqué à $(\Delta Y, Z) = (\Delta\rceil, H)$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\rceil_t}{H_t^-} \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Delta\rceil_t}{H_t^-} = +\infty. \qquad \square$$

RÉFÉRENCES

[1] J. Bertoin, Lévy Processes, Cambridge University Press, 1996.

[2] J. Bertoin, Regularity of the half-line for Lévy processes, Bull. Sci. Math. 121 (1997) 345–354.

[3] Y.S. Chow, On moments of ladder height variables, Adv. Appl. Math. 7 (1986) 46–54.

[4] K.B. Erickson, The strong law of large number when the mean is undefined, Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973) 371–381.

[5] H. Kesten, The limite points of a normalised random walk, Ann. Math. Statist. 41 (1970) 1173–1205.
[6] P.W. Millar, Comparison theorems for sample function growth at a local minimum, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. 19 (1981) 177–204.
[7] V. Vigon, Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener–Hopf, Thèse disponible sur demande à la bibliothèque de l'INSA de Rouen, 1 place Emil Blondel, Mt St Aignan, France, Soutenue en avril 2002.