Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 36, 2003, p. 191 à 212.

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE SUR LES VARIÉTÉS SEMI-ABÉLIENNES

PAR GAËL RÉMOND

RÉSUMÉ. – Nous prouvons l'énoncé suivant. Soient A une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, h une hauteur canonique sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et X un sous-schéma fermé intègre de A qui n'est pas le translaté d'une sous-variété semi-abélienne. Pour Γ une partie de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et ε un réel, on note Γ_ε l'ensemble formé des sommes $x+y$ avec $x \in \Gamma$ et $h(y) \leqslant \varepsilon$. Si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ n'est pas dense dans X. Ceci démontre la conjecture Mordell-Lang plus Bogomolov de B. Poonen. Nous obtenons ce théorème à partir de la propriété de Bogomolov démontrée par S. David et P. Philippon (c'est-à-dire le cas $\Gamma = 0$) grâce à une inégalité de Vojta généralisée.

ABSTRACT. – Let A be a semi-abelian variety over $\bar{\mathbb{Q}}$, Γ a subgroup of $A(\bar{\mathbb{Q}})$ of finite rank and X a subvariety of A which is not a translate of a semi-abelian subvariety of A. Work by P. Vojta and M. McQuillan shows that $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ is not dense in X. B. Poonen has then conjectured that the same remains true if Γ is replaced by a fattening $\Gamma_\varepsilon = \{x+y \mid x \in \Gamma,\ h(y) \leqslant \varepsilon\}$ for a certain $\varepsilon > 0$ where h is a canonical height. B. Poonen and S. Zhang have shown independently this to hold when A is almost split. On the other hand, the statement contains the Bogomolov property (with $\Gamma = 0$) now proven by S. David and P. Philippon. In this paper, we prove Poonen's conjecture for any A. We also consider the slightly more general sets $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{x+y \mid x \in \Gamma,\ h(y) \leqslant \varepsilon(1+h(x))\}$ instead of Γ_ε. We use the case $\Gamma = 0$ as well as a generalized Vojta inequality.

1. Résultats

Soient A une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et $h_{\mathrm{can}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ une hauteur canonique (les définitions sont précisées plus bas). Lorsque Γ est une partie de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et ε un réel, nous définissons :

$$\Gamma_\varepsilon = \bigl\{x+y \mid x \in \Gamma,\ y \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\mathrm{can}}(y) \leqslant \varepsilon\bigr\}$$

et

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \bigl\{x+y \mid x \in \Gamma,\ y \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\mathrm{can}}(y) \leqslant \varepsilon\bigl(1+h_{\mathrm{can}}(x)\bigr)\bigr\}.$$

Le premier résultat que nous établissons avait été conjecturé par B. Poonen (voir [6]) et montré dans le cas particulier où A est isogène au produit d'un tore par une variété abélienne indépendamment par B. Poonen et S. Zhang (voir [12]).

THÉORÈME 1.1. – *Si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et si X est un sous-schéma fermé intègre de A qui n'est pas le translaté d'une sous-variété semi-abélienne de A alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ n'est pas dense dans X.*

Il est facile de voir que cet énoncé devient faux si l'on remplace Γ_ε par $\mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$: dès que $\dim \mathrm{Stab}(X) > 0$, il suffit de choisir $\Gamma \subset \mathrm{Stab}(X)(\bar{\mathbb{Q}})$ non de torsion pour que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$ soit dense dans X. Si nous associons à X l'union Z_X des translatés de sous-variétés semi-abéliennes non nulles de A qu'il contient, l'hypothèse $\dim \mathrm{Stab}(X) > 0$ est équivalente à $Z_X = X$. Il est donc raisonnable d'espérer un résultat pour $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$ seulement si $Z_X \neq X$. Nous allons en fait montrer le

THÉORÈME 1.2. – *Si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et si X est un sous-schéma fermé intègre de A alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$ est fini.*

Si A est un tore, on consultera [4, th. 1.7] qui donne une précision quantitative sur ε ; si de plus $\dim X = 1$, nous donnons dans [9] un résultat entièrement explicite. Dans le cas où A est une variété abélienne, un énoncé voisin figure dans [12, 1.3] mais omet l'hypothèse $Z_X \neq X$ nécessaire pour avoir la non-densité.

La majeure partie de l'article est en fait consacrée à la preuve d'une inégalité de Vojta suffisamment explicite, analogue à celles de [7] et [9], qui permet de montrer que, sous les hypothèses du théorème 1.2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que h_{can} est bornée sur l'ensemble $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$. Pour conclure il nous faut des informations sur les points de petite hauteur.

Rappelons que lorsque $\Gamma = 0$ le théorème 1.1 devient une « propriété de Bogomolov » qui a été démontrée dans différents cas particuliers par E. Ullmo, S. Zhang et A. Chambert-Loir puis en toute généralité par S. David et P. Philippon (voir [3]). En conséquence, si $q(X)$ désigne le maximum des réels q tels que l'ensemble

$$\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \mid h_{\mathrm{can}}(x) \leqslant q\}$$

soit fini, nous avons $q(X) > 0$ pour tout X. Par la méthode des variétés déterminantes introduite par H.-P. Schlickewei appliquée comme dans [1, pp. 789–792], cela entraîne que l'on peut minorer $q(X)$ en fonction seulement de $\deg X$ et $\dim X$. Pour recouvrir les points de hauteur bornée par de tels ensembles, nous utiliserons le résultat d'uniformité (faible) qui s'en déduit, à savoir que $\min\{q(X+y) \mid y \in \Gamma\} > 0$.

Après avoir introduit les variétés semi-abéliennes et les hauteurs canoniques (paragraphe 2), le cœur du travail consistera en l'établissement du théorème 4.1. Cet énoncé constitue une inégalité de Vojta au sens de [7] et est par conséquent très voisin du résultat établi par P. Vojta pour démontrer la finitude de $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ lorsque Γ est de type fini (voir [11, §4]). Toutefois, nous précisons dans notre version que les constantes intervenant sont indépendantes d'un corps de définition, ce qui est crucial pour passer à $\mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$ (voir paragraphe 5).

De plus, la démarche adoptée diffère sensiblement de celle de [11]. Ici, nous nous appuyons sur l'inégalité de [10]. Celle-ci donne une comparaison de hauteurs assez générale (en particulier, il n'y est pas question de groupes algébriques mais d'un schéma projectif muni de faisceaux vérifiant certaines conditions) prouvée avec les méthodes de [7]. Ainsi intervient notamment un complexe de Faltings dont le terme médian est une somme de faisceaux inversibles **amples**. Par suite, nous travaillons avec la même compactification de A^m que dans [11] mais l'essentiel au paragraphe 3 sera de construire un faisceau inversible ample convenable sur celle-ci. Cette variante dans la méthode apparaît déjà dans [9], où est traité le cas où A est un tore, que l'on pourra consulter pour une description plus simple. En revanche, lorsque nous montrerons que sont réunies toutes les conditions d'application du résultat de [10] (voir paragraphe 4), nous utiliserons le théorème d'homogénéité du nombre d'intersection de [11, 5.5].

Enfin au dernier paragraphe nous établissons les théorèmes 1.1 et 1.2.

2. Variétés semi-abéliennes

Nous fixons une fois pour toutes un entier $t \geqslant 0$, une variété abélienne A_0 sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_t$ des éléments de $\operatorname{Pic}^0(A_0)$.

Pour chaque ℓ avec $1 \leqslant \ell \leqslant t$, nous avons donc un isomorphisme canonique

$$s^*\mathcal{M}_\ell \otimes \nu^*\mathcal{M}_\ell \simeq p_1^*\mathcal{M}_\ell \otimes p_2^*\mathcal{M}_\ell$$

où $s, \nu, p_1, p_2 : A_0 \times A_0 \to A_0$ désignent respectivement l'addition de A_0, la flèche nulle et les deux projections (voir [5, p. 74]). Pour $n \in \mathbb{Z}$, si $[n] : A_0 \to A_0$ désigne la multiplication par n, un isomorphisme canonique

$$[n]^*\mathcal{M}_\ell \otimes [0]^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes n-1} \simeq \mathcal{M}_\ell^{\otimes n}$$

s'en déduit. Si nous fixons une trivialisation de $\mathcal{M}_\ell$ en l'élément neutre $0 : \operatorname{Spec} \bar{\mathbb{Q}} \to A_0$ c'est-à-dire un isomorphisme $0^*\mathcal{M}_\ell \simeq \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \bar{\mathbb{Q}}}$, nous obtenons des isomorphismes

$$s^*\mathcal{M}_\ell \simeq p_1^*\mathcal{M}_\ell \otimes p_2^*\mathcal{M}_\ell \quad \text{et} \quad [n]^*\mathcal{M}_\ell \simeq \mathcal{M}_\ell^{\otimes n}$$

bien déterminés.

Nous associons aux données ci-dessus un schéma en groupes A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de la manière suivante : pour tout $\bar{\mathbb{Q}}$-schéma S, l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(S, A)$ est formé des $(t+1)$-uplets $(g, \varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ où $g \in \operatorname{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(S, A_0)$ et $\varphi_\ell : g^*\mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$ est un isomorphisme pour tout ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant t$. Sa structure de groupe abélien est donnée par :

$$(g, \varphi_1, \ldots, \varphi_t) + (h, \psi_1, \ldots, \psi_t) = \big(s \circ (g, h), \chi_1, \ldots, \chi_t\big)$$

où $(g, h) : S \to A_0 \times A_0$ est le morphisme produit et χ_ℓ la composée

$$\big(s \circ (g, h)\big)^*\mathcal{M}_\ell \simeq (g, h)^*(p_1^*\mathcal{M}_\ell \otimes p_2^*\mathcal{M}_\ell) \simeq g^*\mathcal{M}_\ell \otimes h^*\mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\varphi_\ell \otimes \psi_\ell} \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{O}_S.$$

Il est clair que ceci donne bien un groupe (le neutre se déduit des trivialisations fixées). Le fait que le foncteur ainsi décrit est représentable par un schéma A ne pose pas de difficultés. Nous pouvons le montrer en le réalisant comme ouvert de la compactification que nous utiliserons dans la suite à savoir

$$\bar{A} = \mathop{\times}_{\ell=1}^{t}{}_{A_0} \; \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell).$$

En effet, un élément de $\operatorname{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(S, \bar{A})$ consiste en $g \in \operatorname{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(S, A_0)$ et en des quotients inversibles de $\mathcal{O}_S \oplus g^*\mathcal{M}_\ell$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant t$. Par suite, $\operatorname{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(S, A)$ correspond aux éléments pour lesquels, quel que soit ℓ, les composées de chacune des injections $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S \oplus g^*\mathcal{M}_\ell$ et $g^*\mathcal{M}_\ell \to \mathcal{O}_S \oplus g^*\mathcal{M}_\ell$ avec le quotient sont des isomorphismes.

Il apparaît maintenant que le schéma en groupes A ainsi défini est une extension de A_0 par le tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$. Sur le fait que toute variété semi-abélienne s'obtient ainsi, on se reportera à [11, lemme 2.2]. Qu'il nous suffise ici de travailler avec un tel A.

Nous noterons $f : \bar{A} \to A_0$ le morphisme structural et $\kappa_\ell : \mathcal{O}_{\bar{A}} \oplus f^*\mathcal{M}_\ell \to \mathcal{L}_\ell$ des quotients universels (c'est-à-dire que $(f, \kappa_1, \ldots, \kappa_t)$ décrit $\mathrm{id}_{\bar{A}}$). Si $n \in \mathbb{Z}$, la multiplication par n sur A est encore notée $[n]$ ainsi que l'unique extension de ce morphisme en $\bar{A} \to \bar{A}$. Cette dernière se définit simplement en associant à $\mathcal{L}_\ell$ un quotient de $\mathcal{O}_{\bar{A}} \oplus f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes n}$; pour $n<0$ il faut échanger les facteurs ce qui fait que $[n]^*\mathcal{L}_\ell \simeq \mathcal{L}_\ell^{\otimes n}$ si $n \geqslant 0$ et $[n]^*\mathcal{L}_\ell \simeq \mathcal{L}_\ell^{\otimes -n} \otimes f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes n}$ si $n \leqslant 0$.

Il ressort de ceci que le faisceau inversible symétrique associé aux $\mathcal{L}_\ell$ sera :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lin}} = \bigotimes_{\ell=1}^{t} \mathcal{L}_\ell \otimes [-1]^*\mathcal{L}_\ell = \bigotimes_{\ell=1}^{t} \mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$$

qui a la propriété de «linéarité» que $[n]^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes |n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En conséquence (voir [6]), si $h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}$ est une hauteur de Weil quelconque associée à $\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$, la limite

$$h_{\mathrm{lin}}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}\big([n]x\big)$$

existe pour tout $x \in \bar{A}(\bar{\mathbb{Q}})$, diffère de $h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}(x)$ par une quantité bornée et vérifie

$$h_{\mathrm{lin}}\big([n]x\big) = |n| h_{\mathrm{lin}}(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Le faisceau $\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$ n'est bien entendu pas ample et il nous faut rajouter une hauteur provenant de la base. Soit donc $\mathcal{L}_0$ un faisceau inversible très ample et symétrique sur A_0 tel que $\Gamma(A_0,\mathcal{L}_0)^{\otimes n} \to \Gamma(A_0,\mathcal{L}_0^{\otimes n})$ est surjectif pour tout $n \geqslant 1$. Nous désignons par $|\cdot|^2$ la hauteur de Néron-Tate associée à $\mathcal{L}_0$ sur $A_0(\bar{\mathbb{Q}})$.

DÉFINITION 2.1. – La hauteur canonique d'un point $x \in \bar{A}(\bar{\mathbb{Q}})$ est

$$h_{\mathrm{can}}(x) = h_{\mathrm{lin}}(x) + (t+1)\big|f(x)\big|^2.$$

Le coefficient $(t+1)$ intervient pour des raisons techniques et non fondamentales. De toute manière, le choix précis de la hauteur n'a pas d'influence sur la validité des énoncés du paragraphe précédent. En effet, si h'_{can} est une hauteur canonique sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$ obtenue soit comme ci-dessus avec des choix différents soit comme dans [6], il existe un réel $\mu \geqslant 1$ tel que $\mu^{-1}h_{\mathrm{can}} \leqslant h'_{\mathrm{can}} \leqslant \mu h_{\mathrm{can}}$. Ainsi, par exemple, nous avons $\mathcal{C}'(\Gamma,\mu^{-2}\varepsilon) \subset \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$ si ces deux ensembles sont définis avec h'_{can} et h_{can} respectivement (voir aussi [6, §4] pour l'indépendance par rapport à la hauteur de l'énoncé du théorème 1.1).

Pour la suite, il est commode de disposer d'un plongement explicite de $\bar{A}$ dans un espace projectif relié à la hauteur choisie. Tout d'abord, puisque de κ_ℓ se déduit un épimorphisme

$$\kappa'_\ell : \mathcal{O}_{\bar{A}} \oplus f^*\mathcal{M}_\ell \oplus f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \to \mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1},$$

il est naturel de considérer le morphisme de Veronese

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell) \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\mathrm{S}^2(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell)\big) = \mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes 2}\big) \simeq \mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}\big)$$

de sorte que par l'immersion fermée

$$\bar{A} \hookrightarrow \mathop{\times}_{\ell=1\,A_0}^{t} \mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}\big)$$

l'image réciproque du faisceau inversible naturel soit $\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$.

Par ailleurs, par amplitude de $\mathcal{L}_0$, il existe des points $P_1,\dots,P_t$ de $A_0(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que

$$\mathcal{M}_\ell \simeq \tau_{P_\ell}^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0^{\otimes -1}$$

(voir [5], théorème 1 p. 77) où $\tau_P : A_0 \to A_0$ désigne la translation par un point P. Ainsi $\mathcal{M}_\ell \otimes \mathcal{L}_0$ est très ample. Si nous fixons un épimorphisme ${\mathcal{O}_{A_0}}^{n+1} \to \mathcal{L}_0$ (c'est-à-dire un plongement $\iota_0 : A_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$) qui soit un isomorphisme sur les sections globales, nous disposons de ${\mathcal{O}_{A_0}}^{n+1} \to \mathcal{M}_\ell \otimes \mathcal{L}_0$ par translation et, de même, ${\mathcal{O}_{A_0}}^{n+1} \to \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}_0$ puisque

$$\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \simeq \tau_{[-1]P_\ell}^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0^{\otimes -1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}\big) \simeq \mathbb{P}\big(\mathcal{L}_0 \oplus (\mathcal{M}_\ell \otimes \mathcal{L}_0) \oplus \big(\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}_0\big)\big) \\ &\quad \hookrightarrow \mathbb{P}\big({\mathcal{O}_{A_0}}^{3n+3}\big) \simeq A_0 \times \mathbb{P}^{3n+2}_{\bar{\mathbb{Q}}} \end{aligned}$$

est une immersion fermée ainsi donc que

$$\bar{A} \hookrightarrow \big(\mathbb{P}^{3n+2}_{\bar{\mathbb{Q}}}\big)^t \times A_0 \hookrightarrow \big(\mathbb{P}^{3n+2}_{\bar{\mathbb{Q}}}\big)^t \times \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{3^t(n+1)^{t+1}-1}_{\bar{\mathbb{Q}}}$$

en faisant usage de ι_0 puis d'un morphisme de Segre. Notons $N = 3^t(n+1)^{t+1} - 1$ et $\iota_1 : \bar{A} \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ cette immersion. Ce sera le plongement privilégié de $\bar{A}$. La construction est telle que $\iota_1^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{lin}} \otimes f^* \mathcal{L}_0^{\otimes(t+1)}$ donc il existe une constante que nous désignerons par c_0 telle que

$$\big| h_{\mathrm{can}}(x) - h_{\mathrm{proj}}(x) \big| \leqslant c_0$$

pour tout $x \in \bar{A}(\bar{\mathbb{Q}})$ si $h_{\mathrm{proj}} = h \circ \iota_1$ désigne la hauteur induite par le plongement ι_1. Quitte à augmenter cette constante, nous supposerons également que $(t+1)|h(\iota_0(x_0)) - |x_0|^2| \leqslant c_0$ pour tout $x_0 \in A_0(\bar{\mathbb{Q}})$.

A titre de remarque sur la définition de la hauteur, il faut noter que h_{lin} est positive sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$. En effet, le produit des κ'_ℓ fournit une section globale $\mathcal{O}_{\bar{A}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$ qui ne s'annule pas sur A. Il s'ensuit que toute hauteur de Weil $h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}$ est minorée sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et, par passage à la limite, la positivité de h_{lin} en découle.

Nous aurons besoin d'une dernière propriété générale des hauteurs introduites, à savoir que h_{lin} vérifie l'inégalité triangulaire sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Ceci n'est pas immédiat car, contrairement à $[n]$, l'addition de A ne s'étend pas en un morphisme $\bar{A} \times \bar{A} \to \bar{A}$. Il faut donc raisonner à partir d'un éclatement de A^2 et nous verrons cela comme cas particulier de la situation plus générale étudiée au paragraphe suivant.

Dorénavant, si X est un schéma sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et q un entier, nous noterons systématiquement $p_i : X^q \to X$ la i-ème projection pour $1 \leqslant i \leqslant q$.

Signalons encore ici nos conventions pour les multi-indices utilisées dans toute la suite. Si a est un élément de $\mathbb{Z}^m$, de coordonnées $a_1,\dots,a_m$, le symbole $|a|$ désigne $a_1 + \cdots + a_m$. Nous introduisons également un élément fixé $\eta \in \mathbb{Z}^m$, tel que $\eta_1 = \eta_m = 1$ et $\eta_i = 2$ si $1 < i < m$. Le cas échéant, un élément $d \in \mathbb{Z}$ sera identifié à $(d,\dots,d) \in \mathbb{Z}^m$. Enfin nous employons la multiplication coordonnée par coordonnée sur $\mathbb{Z}^m$; par exemple, si $a \in \mathbb{Z}^m$, $|3\eta a^2|$ vaudra $3a_1^2 + 6a_2^2 + \cdots + 6a_{m-1}^2 + 3a_m^2$.

3. Compactification de A^m

Pour ce paragraphe, nous fixons un entier $m \geqslant 2$ et $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. A ces données, nous associons deux morphismes $\alpha, \beta : A^m \to A^{m-1}$ définis sur les points par

$$\alpha(x_1, \ldots, x_m) = (a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1})_{1 \leqslant i \leqslant m-1}$$

et

$$\beta(x_1, \ldots, x_m) = \left(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}\right)_{1 \leqslant i \leqslant m-1}.$$

Un morphisme défini comme α est au cœur de la méthode de Vojta–Faltings tant dans le cas abélien (voir [7]) que torique (voir [9]). Ici, comme dans [11], nous avons toutefois besoin à la fois de α et de β pour respecter l'homogénéité. En effet, nous allons travailler avec le faisceau

$$\mathcal{M} = \alpha^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^* f^* \mathcal{L}_0 \right)^{\otimes (t+1)} \otimes \beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^* \mathcal{L}_{\mathrm{lin}} \right)$$

qui présente bien une homogénéité de degré 2 en a : si a est remplacé par da pour $d \in \mathbb{N}$, il devient $\mathcal{M}^{\otimes d^2}$.

Afin de pouvoir manipuler une hauteur associée à $\mathcal{M}$ sur $A(\bar{\mathbb{Q}})^m$, il nous faut étendre ce faisceau à une compactification de A^m. Celle dont nous disposons déjà, à savoir $\bar{A}^m$, convient pour la partie provenant de α car le morphisme $f^{m-1} \circ \alpha : A^m \to A_0^{m-1}$ s'étend sans problèmes en $\bar{A}^m \to A_0^{m-1}$ (il suffit d'écrire $f(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}) = a_i f(x_i) - a_{i+1} f(x_{i+1})$). En revanche, la seconde partie de notre faisceau ne s'étend pas, en général, à $\bar{A}^m$. Nous sommes donc amenés à considérer une compactification *ad hoc*, dépendant en particulier de a : c'est la principale source de difficultés car nous devons assurer malgré cela que l'homogénéité en a se conserve.

DÉFINITION 3.1. – *Soient G le graphe de β, sous-schéma fermé de A^{2m-1}, et $\bar{G}$ son adhérence dans $\bar{A}^{2m-1}$. Soient encore $\beta_0 : A_0^m \to A_0^{m-1}$ le morphisme défini comme β par*

$$\beta_0(x_1, \ldots, x_m) = \left(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}\right)_{1 \leqslant i \leqslant m-1},$$

G_0 son graphe, fermé de A_0^{2m-1}, et $\mathcal{G}$ l'image réciproque de G_0 par le morphisme structural $f^{2m-1} : \bar{A}^{2m-1} \to A_0^{2m-1}$. Finalement, soit $\bar{\beta} : \bar{G} \to \bar{A}^{m-1}$ le morphisme induit par la projection $\bar{A}^{2m-1} \to \bar{A}^{m-1}$ sur les $m-1$ derniers facteurs.

Bien entendu, $G \simeq A^m$ (par les m premières projections) et, *via* cet isomorphisme, $\bar{\beta}$ étend bien β. Par ailleurs, comme $\beta_0 \circ f^m = f^{m-1} \circ \beta$, nous avons $G \subset \mathcal{G}$ et donc des inclusions de sous-schémas fermés $\bar{G} \subset \mathcal{G} \subset \bar{A}^{2m-1}$.

Nous désirons maintenant plonger la compactification $\bar{G}$ obtenue dans un produit d'espaces projectifs de façon que $\mathcal{M}$ s'obtienne à partir de faisceaux $\mathcal{O}(1)$. La manière naïve – à partir d'un plongement de $\bar{A}^{2m-1}$ – ne convient pas car nous ne pouvons pas utiliser le faisceau $f^* \mathcal{L}_0$ sur les derniers facteurs puisque cela ferait apparaître *via* $\bar{\beta}$ des termes en $\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^4}$. Nous pouvons contourner ce problème en nous restreignant à $\mathcal{G}$ (c'est la raison de l'introduction de ce schéma intermédiaire).

LEMME 3.1. – *Il y a un isomorphisme*

$$\mathcal{G} \simeq \bar{A}^m \underset{A_0^m}{\times} \bigtimes_{\ell=1}^{t} \bigtimes_{i=1}^{m-1} \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{A_0^m} \oplus \left(p_i^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}\right)\right)$$

tel que d'une part la projection $\mathcal{G} \to \bar{A}^m$ *qui s'en déduit coïncide avec la restriction à* $\mathcal{G}$ *de la projection* $\bar{A}^{2m-1} \to \bar{A}^m$ *sur les* m *premiers facteurs et d'autre part si* $\pi_{i,\ell}$ *désigne pour* $1 \leqslant i \leqslant m-1$ *et* $1 \leqslant \ell \leqslant t$ *la projection*

$$\mathcal{G} \to \mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m} \oplus \big(p_i^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}\big)\big)$$

alors $\pi_{i,\ell}^*\mathcal{O}(1) \simeq p_{m+i}^*\mathcal{L}_\ell$ *où* $p_{m+i} : \bar{A}^{2m-1} \to \bar{A}$.

Démonstration. – Ceci découle de l'isomorphisme crucial sur G_0

$$p_{m+i}^*\mathcal{M}_\ell \simeq p_i^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$ qui est conséquence de $\mathcal{M}_\ell \in \mathrm{Pic}^0(A_0)$. En effet, la définition de $\mathcal{G}$ montre que, pour un $\bar{\mathbb{Q}}$-schéma S quelconque, un élément de $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(S, \mathcal{G})$ correspond à un morphisme $g : S \to G_0$ et à une famille d'épimorphismes pour $1 \leqslant i \leqslant 2m-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$

$$\mathcal{O}_S \oplus g^*p_i^*\mathcal{M}_\ell \to \mathcal{Q}_{i,\ell}$$

où $\mathcal{Q}_{i,\ell}$ est inversible. Dans cette description, nous remplaçons $p_{m+i}^*\mathcal{M}_\ell$ par la formule ci-dessus et, comme alors n'apparaissent plus que les projections de A_0^{2m-1} sur ses m premiers facteurs, nous voyons g comme morphisme $S \to A_0^m$ *via* l'isomorphisme $G_0 \simeq A_0^m$ donné par ces m projections. De la sorte, $\mathcal{G}$ est bien présenté comme le produit fibré au-dessus de A_0^m d'une part de la famille des $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0^m} \oplus p_i^*\mathcal{M}_\ell)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$ (dont le produit forme $\bar{A}^m$) et d'autre part de la famille des

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m} \oplus \big(p_i^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}\big)\big)$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$. La formule donnant $\pi_{i,\ell}^*\mathcal{O}(1)$ est alors claire puisque des épimorphismes structuraux sur $\bar{A}^{2m-1}$

$$\mathcal{O}_{\bar{A}^{2m-1}} \oplus p_i^* f^*\mathcal{M}_\ell \to p_i^*\mathcal{L}_\ell$$

pour $1 \leqslant i \leqslant 2m-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$ nous déduisons sur $\mathcal{G}$ par restriction

$$\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \oplus \big(f^*p_i^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes f^*p_{i+1}^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}\big) \to p_{m+i}^*\mathcal{L}_\ell$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$ qui constituent bien les quotients universels sur la deuxième famille de facteurs. $\square$

Pour alléger, nous notons dorénavant sur A_0^m pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant t$

$$\mathcal{N}_{i,\ell} = p_i^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}.$$

Afin de plonger $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0^m} \oplus \mathcal{N}_{i,\ell})$ nous imitons le procédé qui nous a fourni l'immersion fermée $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell) \hookrightarrow A_0 \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3n+2}$ au paragraphe précédent. Tout d'abord, de l'isomorphisme

$$\mathrm{S}^2(\mathcal{O}_{A_0^m} \oplus \mathcal{N}_{i,\ell}) \otimes \mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes -1} \simeq \mathcal{O}_{A_0^m} \oplus \mathcal{N}_{i,\ell} \oplus \mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes -1},$$

nous déduisons une immersion fermée $v_{i,\ell}$ (de Veronese)

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell})\hookrightarrow\mathbb{P}\big(\mathrm{S}^2(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell})\big)\simeq\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes-1}\big).$$

De cette façon, nous avons sur $\mathcal{G}$

$$\pi_{i,\ell}^*v_{i,\ell}^*\mathcal{O}(1)\simeq(p_{m+i}^*\mathcal{L}_\ell)^{\otimes 2}\otimes(f^m)^*\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes-1}\simeq p_{m+i}^*\big(\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2}\otimes f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes-1}\big)$$

où $f^m:\mathcal{G}\to A_0^m$. Nous utilisons ensuite

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes-1}\big)\simeq\mathbb{P}\big(\big(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes-1}\big)\otimes p_i^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2}\big)$$

qui permet de faire apparaître un faisceau engendré par ses sections globales car c'est le cas de

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{i,\ell}\otimes p_i^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2}&\simeq p_i^*(\mathcal{M}_\ell\otimes\mathcal{L}_0)^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*(\mathcal{M}_\ell^{\otimes-1}\otimes\mathcal{L}_0)^{\otimes a_{i+1}^2}\\&\simeq p_i^*\tau_{P_\ell}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*\tau_{-P_\ell}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2}\end{aligned}$$

et nous avons grâce à ι_0 des épimorphismes

$$\mathcal{O}_{A_0}{}^{n+1}\to(\tau_{P_\ell}^*\mathcal{L}_0)^{\otimes a_i^2}\quad\text{et}\quad\mathcal{O}_{A_0}{}^{n+1}\to(\tau_{-P_\ell}^*\mathcal{L}_0)^{\otimes a_{i+1}^2}$$

qui fournissent

$$\mathcal{O}_{A_0}{}^{(n+1)^2}\to\mathcal{N}_{i,\ell}\otimes p_i^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2}\ ;\tag{3.1}$$

de manière absolument analogue (en échangeant P_ℓ et $-P_\ell$) nous obtenons un épimorphisme

$$\mathcal{O}_{A_0}{}^{(n+1)^2}\to\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes-1}\otimes p_i^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2}.\tag{3.2}$$

En utilisant encore le plus évident

$$\mathcal{O}_{A_0}{}^{(n+1)^2}\to p_i^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2},\tag{3.3}$$

nous trouvons une immersion fermée

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes-1}\big)\hookrightarrow\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m}{}^{3(n+1)^2}\big)\simeq A_0^m\times\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3(n+1)^2-1}.$$

Nous avons donc abouti à une immersion fermée

$$w_{i,\ell}:\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0^m}\oplus\mathcal{N}_{i,\ell})\hookrightarrow\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{A_0^m}{}^{3(n+1)^2}\big)\simeq A_0^m\times\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3(n+1)^2-1}$$

telle que

$$\pi_{i,\ell}^*w_{i,\ell}^*\mathcal{O}(1)\simeq p_{m+i}^*\big(\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2}\otimes f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes-1}\big)\otimes p_i^*f^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2}\otimes p_{i+1}^*f^*\mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2}.$$

Nous faisons maintenant le produit sur i et ℓ ; si $N_1=(3^t(n+1)^{2t})^{m-1}-1$ ceci fournit grâce au lemme un plongement

$$\mathcal{G}\hookrightarrow\bar{A}^m\times\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1}$$

tel que l'image réciproque du faisceau $\mathcal{O}(1)$ du deuxième facteur est

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{m+i}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}\right)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m} p_i^* f^*\mathcal{L}_0^{\otimes t\eta_i a_i^2}\right).$$

Notre but est donc atteint : nous avons exprimé le produit des faisceaux $p_{m+i}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$ (qui se restreint sur $\bar{G}$ en $\bar{\beta}^*\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$) en termes d'un $\mathcal{O}(1)$ et de faisceaux correctifs provenant de $\bar{A}^m$ et quadratiques en a. Si nous réinterprétons la construction, nous avons utilisé l'épimorphisme

$$\Phi:\bigotimes_{i=1}^{m-1}\bigotimes_{\ell=1}^{t}\mathcal{O}_{\mathcal{G}}\oplus\left(f^m\right)^*\mathcal{N}_{i,\ell}\oplus\left(f^m\right)^*\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes -1}\to\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{m+i}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$$

(indépendant de $\mathcal{L}_0$) puis effectué le produit tensoriel avec $\bigotimes_{i=1}^{m} p_i^* f^*\mathcal{L}_0^{\otimes t\eta_i a_i^2}$ donnant, disons, Ψ. La source de Ψ possède alors des sections globales qui l'engendrent provenant de

$$\mathcal{O}_{A_0}{}^{n+1}\to\mathcal{L}_0$$

(et bâties à l'aide des épimorphismes (3.1), (3.2) et (3.3)) et finalement nous définissons $\mathcal{G}\to\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1}$ grâce aux images de ces sections par Ψ.

Pour fixer un plongement multiprojectif de $\mathcal{G}$, il reste à en choisir un pour $\bar{A}^m$. Nous tirons bien sûr parti des définitions du paragraphe précédent mais nous avons besoin d'un peu plus de liberté (pour gérer les termes correctifs évoqués plus haut). Aussi n'utiliserons-nous pas l'immersion $\iota_1:\bar{A}\hookrightarrow\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N}$ mais plutôt l'étape antérieure qu'est

$$\bar{A}\hookrightarrow\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_2}\times\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{n}$$

où $N_2=(3n+3)^t-1$. Rappelons que l'image réciproque de $\mathcal{O}(1)$ sur le premier (*resp.* second) facteur est isomorphe à $\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}\otimes f^*\mathcal{L}_0^{\otimes t}$ (*resp.* $f^*\mathcal{L}_0$) et que ι_1 s'obtient à partir de là par un plongement de Segre.

DÉFINITION 3.2. – Nous considérons le plongement

$$\mathcal{G}\hookrightarrow\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_2}\right)^m\times\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{n}\right)^m\times\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1}$$

et, si $q_1,\ldots,q_m,q_1',\ldots,q_m',q''$ désignent respectivement les projections sur les différents facteurs de ce produit, nous notons pour $b,b'\in\mathbb{Z}^m$ et $b''\in\mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}(b,b',b'')=\bigotimes_{i=1}^{m}\left(q_i^*\mathcal{O}(b_i)\otimes q_i'^*\mathcal{O}(b_i')\right)\otimes q''^*\mathcal{O}(b'').$$

Grâce à cette notation abrégée, nous pouvons écrire sur $\mathcal{G}$

$$\mathcal{O}(0,1,0)\simeq\bigotimes_{i=1}^{m}p_i^*f^*\mathcal{L}_0,\quad \mathcal{O}(1,-t,0)\simeq\bigotimes_{i=1}^{m}p_i^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}\quad\text{et}$$

$$\mathcal{O}\left(0,-t\eta a^2,1\right)\simeq\bigotimes_{i=1}^{m-1}p_{m+i}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}.$$

Nous nous tournons à présent vers $\bar{G}$. Le lemme ci-dessous contient le dernier fait essentiel de ce paragraphe.

LEMME 3.2. – *Il existe sur $\bar{G}$ un morphisme de faisceaux*

$$\xi : \mathcal{O}(0,0,1) \to \mathcal{O}\big(\eta a^2, 0, 0\big)$$

dont la restriction à G est un isomorphisme et par lequel l'image d'une coordonnée de $\mathbb{P}^{N_1}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ (vue comme section globale de $\mathcal{O}(0,0,1)$) est un monôme unitaire de multidegré ηa^2 en les coordonnées de $(\mathbb{P}^{N_2}_{\bar{\mathbb{Q}}})^m$.

Démonstration. – Par restriction des épimorphismes structuraux de $\mathcal{G}$ (voir lemme précédent) nous avons sur $\bar{G}$ des épimorphismes

$$\varphi_{i,\ell} : \mathcal{O}_{\bar{G}} \oplus p_i^* f^* \mathcal{M}_\ell \to p_i^* \mathcal{L}_\ell$$

et

$$\psi_{i,\ell} : \mathcal{O}_{\bar{G}} \oplus (f^m)^* \mathcal{N}_{i,\ell} \to p_{m+i}^* \mathcal{L}_\ell$$

pour $1 \leqslant \ell \leqslant t$ et respectivement $1 \leqslant i \leqslant m$ ou $1 \leqslant i \leqslant m-1$ (rappelons que

$$(f^m)^* \mathcal{N}_{i,\ell} \simeq p_{m+i}^* f^* \mathcal{M}_\ell).$$

Par produit tensoriel avec $p_i^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$ nous obtenons

$$\varphi'_{i,\ell} : \mathcal{O}_{\bar{G}} \oplus p_i^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \to p_i^* \mathcal{L}_\ell \otimes p_i^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$$

qui n'est autre que $[-1]^* \varphi_{i,\ell}$. Si nous restreignons alors

$$\begin{aligned} \varphi_{i,\ell}^{\otimes a_i^2} \otimes {\varphi'_{i+1,\ell}}^{\otimes a_{i+1}^2} : \big(\mathcal{O}_{\bar{G}} \oplus p_i^* f^* \mathcal{M}_\ell\big)^{\otimes a_i^2} \otimes \big(\mathcal{O}_{\bar{G}} \oplus p_{i+1}^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}\big)^{\otimes a_{i+1}^2} \\ \to p_i^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_{i+1}^2} \otimes p_{i+1}^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2} \end{aligned}$$

aux deux termes extrêmes du développement en somme de la source, nous trouvons un morphisme

$$\chi_{i,\ell} : \mathcal{O}_{\bar{G}} \oplus (f^m)^* \mathcal{N}_{i,\ell} \to p_i^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_{i+1}^2} \otimes p_{i+1}^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}$$

(qui n'est plus nécessairement un épimorphisme). Le point crucial est que $\chi_{i,\ell}$ se factorise à travers $\psi_{i,\ell}$. En effet, si nous nous plaçons sur $G \simeq A^m$, les isomorphismes

$$(f^m)^* \mathcal{N}_{i,\ell} \to \mathcal{O}_G$$

induits par $\psi_{i,\ell}$ et $\chi_{i,\ell}$ respectivement sont les mêmes car dans chacun des deux cas la collection de ces isomorphismes pour $1 \leqslant \ell \leqslant t$ (i fixé) représente l'élément $p_{m+i} = p_i \circ \beta$ de $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(G, A)$: pour $\psi_{i,\ell}$ c'est la définition tandis que la construction de $\chi_{i,\ell}$ correspond exactement à former $a_i^2 p_i - a_{i+1}^2 p_{i+1}$ dans ce groupe (se reporter à la présentation de A comme schéma en groupes). Ainsi sur G nous avons un isomorphisme

$$\xi_{i,\ell} : p_{m+i}^* \mathcal{L}_\ell \to p_i^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_{i+1}^2} \otimes p_{i+1}^* f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -a_{i+1}^2}$$

tel que $\chi_{i,\ell} = \xi_{i,\ell} \circ \psi_{i,\ell}$. Puisque $\psi_{i,\ell}$ est un épimorphisme entre faisceaux localement libres, cette factorisation s'étend à $\bar{G}$ (nous notons encore $\xi_{i,\ell}$). Pour faire intervenir $\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^*\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$, nous considérons $\xi_{i,\ell}^{\otimes 2} \otimes (f^m)^*\mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes -1}$ (c'est-à-dire $\xi_{i,\ell} \otimes [-1]^*\xi_{i,\ell}$) et après produit tensoriel sur ℓ

$$\xi_i : p_{m+i}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}} \to p_i^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes a_{i+1}^2}.$$

Compte tenu des isomorphismes qui précèdent l'énoncé, le produit des ξ_i fournit

$$\mathcal{O}\big(0, -t\eta a^2, 1\big) \to \mathcal{O}\big(\eta a^2, -t\eta a^2, 0\big)$$

dont ξ se déduit immédiatement. Par construction, sa restriction à G est bien un isomorphisme. Pour la dernière assertion, nous pouvons fixer i et ℓ (tous les plongements étant bâtis avec des morphismes de Segre). La définition des coordonnées de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1}$ transite alors par $\psi_{i,\ell}$; pour chercher l'image par ξ, nous examinons donc par composition $\chi_{i,\ell}$: or celui-ci est obtenu à partir de $\varphi_{i,\ell}$ et $\varphi_{i+1,\ell}$, qui eux-mêmes donnent les coordonnées sur les facteurs i et $i+1$ de $(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_2})^m$, uniquement par produit tensoriel. □

Ce résultat permet notamment de montrer l'inégalité triangulaire pour h_{lin} annoncée à la fin du paragraphe précédent.

COROLLAIRE 3.1. – *Pour* $x, y \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ *nous avons* $h_{\mathrm{lin}}(x+y) \leqslant h_{\mathrm{lin}}(x) + h_{\mathrm{lin}}(y)$.

Démonstration. – En voyant en ξ_i une section globale de

$$p_i^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes a_{i+1}^2} \otimes p_{m+i}^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes -1}$$

qui engendre la restriction à G de ce faisceau, nous déduisons que la quantité

$$h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}\big(a_i^2 x - a_{i+1}^2 y\big) - a_i^2 h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}(x) - a_{i+1}^2 h_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}}(y)$$

est majorée sur $A(\bar{\mathbb{Q}})^2$. En passant à la limite, il vient

$$h_{\mathrm{lin}}\big(a_i^2 x - a_{i+1}^2 y\big) \leqslant a_i^2 h_{\mathrm{lin}}(x) + a_{i+1}^2 h_{\mathrm{lin}}(y)$$

et le corollaire en découle (avec $a_i = a_{i+1} = 1$ et $h_{\mathrm{lin}}(-y) = h_{\mathrm{lin}}(y)$). □

Le lemme décrit essentiellement l'action de β sur $\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$: une fois le bon plongement construit, la situation devient très proche du cas torique (traité dans [9]). Il nous reste à faire intervenir α et son action sur $f^*\mathcal{L}_0$. La tâche est bien sûr plus aisée puisque tout se passe sur A_0 et il suffit de relever la situation *via* $\bar{G} \to \bar{A}^m \to A_0^m$. En particulier, le morphisme $A^m \to A_0^{m-1}$ donné sur les points par

$$(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto \big((a_i f(x_i) \pm a_{i+1} f(x_{i+1}))_{1 \leqslant i \leqslant m-1}\big)$$

s'étend en $r_\pm : \bar{G} \to A_0^{m-1}$ (donc r_- étend $f^{m-1} \circ \alpha$). Nous unifions par commodité nos notations sur les faisceaux de $\bar{G}$ en posant pour $b, b' \in \mathbb{Z}^m$ et $b'', c, c' \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}(b, b', b'', c, c') = \mathcal{O}(b, b', b'') \otimes r_-^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\mathcal{L}_0\right)^{\otimes c} \otimes r_+^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\mathcal{L}_0\right)^{\otimes c'}.$$

Cela revient à utiliser r_- et r_+ pour plonger

$$\bar{G} \hookrightarrow \big(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_2}\big)^m \times \big(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{n}\big)^m \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_3} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_3}$$

où $N_3=(n+1)^{m-1}-1$. Avec ces notations, le faisceau que nous avons introduit au début du paragraphe à l'aide de α et β s'étend sur $\bar{G}$ en

$$\mathcal{M}=\mathcal{O}\big(0,-t\eta a^2,1,t+1,0\big)$$

qui jouera un rôle central dans la preuve de l'inégalité de Vojta au paragraphe suivant.

Ici nous donnons simplement pour terminer l'analogue abélien du lemme précédent. Pour clarifier l'énoncé, nous allons distinguer les coordonnées des différents facteurs du produit d'espaces projectifs ci-dessus : nous noterons $W_0^{(i)},\dots,W_{N_2}^{(i)}$ celles du i-ème facteur de $(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_2})^m$ puis $X_0^{(i)},\dots,X_n^{(i)}$ pour le i-ème facteur de $(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{n})^m$ et $V_0,\dots,V_{N_3}$ et $V_0',\dots,V_{N_3}'$ pour les deux derniers facteurs.

LEMME 3.3. – *Il existe sur $\bar{G}$ un isomorphisme*

$$\xi':\mathcal{O}(0,0,0,1,1)\to\mathcal{O}\big(0,2\eta a^2,0,0,0\big)$$

et un réel h_{add} ne dépendant que de (A_0,ι_0) ayant la propriété suivante : *pour tout $d\in\mathbb{N}$ et $k\in\{0,\dots,n\}^m$, il existe des polynômes $(P_{l,l'})_{0\leqslant l,l'\leqslant N_3}$ de multidegré $4d\eta a^2$ en les $X_j^{(i)}$, dont la famille est de hauteur au plus $d|\eta a^2|h_{\mathrm{add}}$ et de sorte que si*

$$\xi'_{[d]}:\mathcal{O}\big(0,2d\eta a^2,0,d,d\big)\to\mathcal{O}\big(0,4d\eta a^2,0,0,0\big)$$

est déduit de ξ' par produit tensoriel alors

$$\xi'_{[d]}\left(\left(\bigotimes_{i=1}^m X_{k_i}^{(i)\otimes 2d\eta_i a_i^2}\right)\otimes V_l^{\otimes d}\otimes V_{l'}'^{\otimes d}\right)=P_{l,l'}\big(X^{(1)},\dots,X^{(m)}\big).$$

Démonstration. – L'existence de ξ' est une conséquence facile du théorème du cube ; la propriété de hauteur se déduit, elle, de la proposition 5.2 de [7]. En effet, avec les notations de cette dernière,

$$\xi'(V_l\otimes V_{l'}')=\bigotimes_{i=1}^{m-1}p_{i,i+1}^*[a_i,a_{i+1}]^*\big(p_i^*X_{l_i}^{(i)}\otimes p_2^*X_{l_i'}^{(i+1)}\big)$$

si $p_{i,i+1}=p_i\times p_{i+1}$ et l (comme l') est identifié à un élément de $\{0,\dots,n\}^{m-1}$ (ceci correspond au plongement de Segre). Par suite, nous pouvons donc choisir

$$P_{l,l'}=\left(\prod_{i=1}^m X_{k_i}^{(i)\,2d\eta_i(a_i^2-f(a_i))}\right)\left(\prod_{i=1}^{m-1}P_{a_i,a_{i+1},k_i,k_{i+1},l_i,l_i'}\big(X^{(i)},X^{(i+1)}\big)^d\right).$$

Le nombre de monômes apparaissant lorsque l'on développe le produit est majoré par

$$\prod_{i=1}^{m-1}\binom{4a_i^2+n}{n}^d\binom{4a_{i+1}^2+n}{n}^d\leqslant(n+1)^{4d|\eta a^2|}$$

donc

$$\begin{aligned} h\big((P_{l,l'})_{l,l'}\big) &\leqslant \sum_{i=1}^{m-1} dh\big((P_{a_i,a_{i+1},k_i,k_{i+1},\lambda,\lambda'})_{\lambda,\lambda'}\big) \; + 4d\big|\eta a^2\big|\log(n+1) \\ &\leqslant d\big|\eta a^2\big|\big(h_1 + 6n + 4\log(n+1)\big) \end{aligned}$$

et le lemme est donc acquis en choisissant $h_{\mathrm{add}} = h_1 + 6n + 4\log(n+1)$. □

4. Inégalité de Vojta

Nous notons dorénavant $h_{\mathrm{quad}}(x) = (t+1)|f(x)|^2$ pour $x \in \bar{A}(\bar{\mathbb{Q}})$ de sorte que

$$h_{\mathrm{can}} = h_{\mathrm{lin}} + h_{\mathrm{quad}}.$$

Ces trois hauteurs s'étendent naturellement à $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Ce paragraphe est dévolu à la preuve du théorème ci-dessous.

THÉORÉME 4.1. – *Soit X un sous-schéma fermé intègre de A et soit $m = \dim X + 1$. Il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que si $x_1, \dots, x_m$ sont des éléments de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant*

$$h_{\mathrm{lin}}\left(\frac{x_i}{h_{\mathrm{can}}(x_i)} - \frac{x_{i+1}}{h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})}\right) \leqslant \frac{1}{c_1}, \quad h_{\mathrm{quad}}\left(\frac{x_i}{\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_i)}} - \frac{x_{i+1}}{\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})}}\right) \leqslant \frac{1}{c_1^2},$$

$$h_{\mathrm{can}}(x_{i+1}) \geqslant c_2^2 h_{\mathrm{can}}(x_i) \quad \textit{et} \quad h_{\mathrm{can}}(x_1) \geqslant c_3$$

(pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$) alors il existe i tel que $x_i \in Z_X(\bar{\mathbb{Q}})$.

Fixons X comme dans l'énoncé. Nous commençons par traduire les hypothèses du théorème à l'aide d'entiers $a_1, \dots, a_m$ auxquels s'appliqueront les considérations du paragraphe précédent.

LEMME 4.1. – *Soient $c_1, c_2, c_3 > 0$ de sorte que $c_2 \in \mathbb{N}$ et $c_2 \geqslant c_1 \geqslant 2$. Si $x_1, \dots, x_m \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient les hypothèses du théorème relativement à ces constantes alors il existe $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ tel que $c_2 a_{i+1} \leqslant a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et*

$$\sum_{i=1}^{m-1} h_{\mathrm{lin}}\big(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}\big) + h_{\mathrm{quad}}(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}) \leqslant \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h_{\mathrm{can}}(x_i).$$

Démonstration. – Nous choisissons $a_m = 1$ puis fixons successivement les valeurs de $a_{m-1}, \dots, a_1$ en imposant que a_i/a_{i+1} soit l'entier le plus proche de $\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})/h_{\mathrm{can}}(x_i)}$. Ceci assure bien $a_i/a_{i+1} \geqslant c_2$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Nous avons en outre

$$\Big|a_i\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_i)} - a_{i+1}\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})}\,\Big| \leqslant \frac{1}{2} a_{i+1}\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_i)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \big|a_i^2 h_{\mathrm{can}}(x_i) - a_{i+1}^2 h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})\big| &\leqslant \frac{1}{2}\Big(a_i a_{i+1} h_{\mathrm{can}}(x_i) + a_{i+1}^2\sqrt{h_{\mathrm{can}}(x_i) h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})}\,\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{2c_2}\big(a_i^2 h_{\mathrm{can}}(x_i) + a_{i+1}^2 h_{\mathrm{can}}(x_{i+1})\big). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire pour h_{lin}, nous majorons

$$
\begin{aligned}
&h_{\text{lin}}\big(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}\big)\\
&\quad\leqslant a_{i+1}^2 h_{\text{can}}(x_{i+1}) h_{\text{lin}}\left(\frac{x_i}{h_{\text{can}}(x_i)} - \frac{x_{i+1}}{h_{\text{can}}(x_{i+1})}\right) + \left|a_i^2 - a_{i+1}^2 \frac{h_{\text{can}}(x_{i+1})}{h_{\text{can}}(x_i)}\right| h_{\text{lin}}(x_i)\\
&\quad\leqslant \frac{1}{c_1} a_{i+1}^2 h_{\text{can}}(x_{i+1}) + \big|a_i^2 h_{\text{can}}(x_i) - a_{i+1}^2 h_{\text{can}}(x_{i+1})\big|\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2c_1} a_i^2 h_{\text{can}}(x_i) + \frac{3}{2c_1} a_{i+1}^2 h_{\text{can}}(x_{i+1}).
\end{aligned}
$$

Si nous calculons de manière analogue pour $\sqrt{h_{\text{quad}}}$ (qui vérifie l'inégalité triangulaire), nous obtenons

$$
h_{\text{quad}}(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}) \leqslant \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{2c_2}\right)^2 a_i^2 h_{\text{can}}(x_i) \leqslant \frac{9}{4c_1^2} a_i^2 h_{\text{can}}(x_i) \leqslant \frac{3}{2c_1} a_i^2 h_{\text{can}}(x_i).
$$

La conclusion s'obtient en sommant ces inégalités pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$. □

Nous montrons à présent que si $x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}})^m$ alors le résultat de [10] fournit une inégalité en sens contraire et nous aurons une contradiction en choisissant convenablement les constantes c_1, c_2 et c_3. Le théorème étant clair si X est un point, nous supposons désormais $\dim X \geqslant 1$.

Nous allons appliquer le théorème principal de [10] au schéma $\bar{X}$ adhérence de X dans $\bar{A}$, muni de l'immersion fermée $\iota : \bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ déduite de $\iota_1 : \bar{A} \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ introduite plus haut (rappelons que $N = 3^t(n+1)^t - 1$). Le faisceau $\mathcal{L}$ sur $\bar{X}$ est donc la restriction de $\mathcal{L}_{\text{lin}} \otimes f^*\mathcal{L}_0^{\otimes(t+1)}$.

Les valeurs des paramètres de [10] sont données par :

$$
\begin{aligned}
&m = \dim X + 1, \quad \omega = 0, \quad \theta = 2^{m^2}, \quad t_1 = t+2,\\
&t_2 = 4(t+1), \quad M = (N_2+1)^m (N_3+1) \quad \text{et} \quad \delta = (t+1) h_{\text{add}}.
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons des constantes $c_1^{\#}, c_2^{\#}, c_3^{\#}$ par les formules explicites de ce texte. Nous posons $c_1 = 4c_1^{\#}$, $c_2 = c_2^{\#}$ et $c_3' = c_3^{\#} + c_0$; remarquons $c_2 \in \mathbb{N}$ et $c_2 \geqslant c_1 \geqslant 2$.

Soient maintenant $x_1, \ldots, x_m \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}})$ des points vérifiant les hypothèses du théorème avec c_1, c_2 et c_3'. Nous pouvons donc appliquer le lemme 4.1 qui fournit $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. Le m-uplet noté a dans [10] sera ici désigné par $a^{\#}$ et choisi égal à ηa^2. Notons déjà que $a_i^{\#}/a_{i+1}^{\#} = \eta_i a_i^2 / \eta_{i+1} a_{i+1}^2 \geqslant a_i^2 / 2a_{i+1}^2 \geqslant c_2^2/2 \geqslant c_2^{\#}$.

Le paramètre a permet d'introduire les autres données nécessaires au théorème de [10]. En effet, nous lui associons comme au paragraphe précédent un schéma $\bar{G}$ qui est muni d'une projection $\bar{G} \to \bar{A}^m$ induisant un isomorphisme au-dessus de G. Nous considérons donc l'adhérence $\mathcal{X}$ dans $\bar{G}$ de $X^m \subset A^m$ et la projection induit un morphisme $\pi : \mathcal{X} \to \bar{X}^m$ propre et birationnel. Le faisceau essentiel sur $\mathcal{X}$ est $\mathcal{M} = \mathcal{O}(0, -t\eta a^2, 1, t+1, 0)$ si nous utilisons les notations du paragraphe précédent pour les faisceaux sur $\bar{G}$ ainsi que leurs restrictions à $\mathcal{X}$. Avec nos définitions, nous avons également $\mathcal{N}_{a^{\#}} = \mathcal{O}(\eta a^2, \eta a^2, 0, 0, 0)$.

Finalement, nous introduisons $\mathcal{P} = \mathcal{O}((t+1)\eta a^2, (t+2)\eta a^2, 1, 0, 0)$. D'une part, ce faisceau est très ample sur $\mathcal{X}$ (ou $\bar{G}$) et nous pouvons l'écrire $\iota'^*\mathcal{O}(1)$ pour une immersion fermée $\iota' : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N'}_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Nous construisons celle-ci à partir de

$$
\bar{G} \hookrightarrow \left(\mathbb{P}^{N_2}_{\bar{\mathbb{Q}}}\right)^m \times \left(\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}\right)^m \times \mathbb{P}^{N_1}_{\bar{\mathbb{Q}}}
$$

et d'un plongement de Segre–Veronese en considérant tous les monômes de multidegré $((t+1)\eta a^2, (t+2)\eta a^2, 1)$ dans les coordonnées de cet espace multiprojectif. Ainsi N' dépend de a mais ceci est loisible puisqu'il n'intervient pas dans les constantes $c_1^\#$, $c_2^\#$ et $c_3^\#$. Ensuite, le morphisme ξ donne naissance par produit tensoriel à l'injection $j_1 : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{N}_{a^\#}^{\otimes t_1}$ et le lemme 3.2 assure que les images des coordonnées de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'}$, vues comme sections de $\mathcal{P}$, sont bien des monômes unitaires de multidegré $t_1\eta a^2$ en les coordonnées de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N}$.

De plus, nous avons *via* ξ' un isomorphisme

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} = \mathcal{O}\big((t+1)\eta a^2, 2(t+1)\eta a^2, 0, -(t+1), 0\big) \simeq \mathcal{O}\big((t+1)\eta a^2, 0, 0, 0, t+1\big)$$

qui nous permet de définir Σ comme la famille des images réciproques par cet isomorphisme des

$$\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{m} W_{\kappa_i}^{(i)\otimes \eta_i a_i^2}\right) \otimes V'_{l'}\right)^{\otimes (t+1)}$$

où $0 \leqslant \kappa_i \leqslant N_2$ et $0 \leqslant l' \leqslant N_3$. Ce choix vérifie bien $\operatorname{Card}\Sigma = M$. Pour bâtir j_2, nous considérons une section globale de $\mathcal{O}(3(t+1)\eta a^2, 2(t+1)\eta a^2, 0, t+1, 0)$ de la forme

$$\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{m} W_{\kappa'_i}^{(i)\otimes 3\eta_i a_i^2} \otimes X_{k_i}^{(i)\otimes 2\eta_i a_i^2}\right) \otimes V_l\right)^{\otimes (t+1)}$$

(avec $0 \leqslant \kappa'_i \leqslant N_2$, $0 \leqslant k_i \leqslant n$ et $0 \leqslant l \leqslant N_3$) qui soit non nulle en x. L'injection

$$j_2 : \mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \hookrightarrow \mathcal{N}_{a^\#}^{\otimes t_2}$$

est alors simplement donnée par produit tensoriel avec cette section.

L'expression des éléments de $j_2(\Sigma)$ comme polynômes se déduit du lemme 3.3 : nous appliquons celui-ci avec $d = t+1$, les termes supplémentaires en $W^{(1)}, \dots, W^{(m)}$ n'intervenant que par des monômes. De la sorte, la hauteur des polynômes représentant $j_2(\Sigma)$ est bien majorée par $|\eta a^2|\delta$.

Tous les ingrédients apparaissant dans le théorème de [10] sont donc réunis. Il nous reste simplement à montrer qu'est vérifiée l'hypothèse principale sur le nombre d'intersection. Nous utilisons le résultat d'homogénéité de Vojta ; signalons aussi que c'est ici qu'intervient l'hypothèse $x_i \notin Z_X(\bar{\mathbb{Q}})$.

Soient donc $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ un produit de sous-schémas fermés intègres de $\bar{X}$ qui contient x, puis $Z_i = Y_i \cap X$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ qui sont des sous-schémas fermés de A. Bien sûr $\bar{Z}_i = Y_i$ donc l'adhérence de $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$ dans $\bar{G}$ coïncide avec l'adhérence $\mathcal{Y}$ de $Y \cap U$ dans $\mathcal{X}$ considérée dans [10] et nous devons montrer

$$[\mathcal{M}]^{\dim Y} \cdot \mathcal{Y} \geqslant \theta^{-1} \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i a_i^2\big)^{\dim Y_i}.$$

Vu la valeur de θ, il suffit même d'avoir

$$[\mathcal{M}]^{\dim Y} \cdot \mathcal{Y} \geqslant \prod_{i=1}^{m} a_i^{2\dim Y_i}.$$

Voyons d'abord pourquoi ceci est vrai si chacun des a_i est remplacé par 1 (c'est-à-dire tant dans le membre de droite que dans la définition de $\bar{G}$ sous-jacente à celles de $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{M}$). Dans ce cas, nous avons

$$\mathcal{M} \simeq \bar{\beta}^* \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\big(\mathcal{L}_{\text{lin}} \otimes f^*\mathcal{L}_0^{\otimes(t+1)}\big)$$

puisqu'ici $\alpha = \beta$. La restriction de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{Y}$ est donc l'image réciproque par $\bar{\beta}:\mathcal{Y} \to \bar{A}^{m-1}$ d'un faisceau ample. Génériquement, ce morphisme coïncide avec $\beta: Z \to A^{m-1}$ qui est génériquement fini puisque $x_i \in Z_i$ entraîne $Z_i \not\subset Z_X$ donc $Z_i \neq Z_{Z_i}$: ceci s'obtient grâce à une démonstration identique à celle du lemme 2.1 de [7] ou d'après [11, 5.1]. Ainsi nous avons bien dans ce cas $[\mathcal{M}]^{\dim Y} \cdot \mathcal{Y} \geqslant 1$.

L'inégalité avec les a_i qui nous intéressent en découle car $[\mathcal{M}]^{\dim Y} \cdot \mathcal{Y}$ est homogène en a_i de degré $2\dim Y_i$: c'est le résultat de [11, §5]. En fait, le théorème 5.5 de [11] donne cette propriété pour un faisceau $L_{0,a}$ qui diffère légèrement de $\mathcal{M}$: dans la définition de β, au lieu de regarder seulement les $a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$, P. Vojta considère tous les $a_i^2 x_i - a_j^2 x_j$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Toutefois, ceci n'a pas d'influence dans la preuve du théorème puisque la décomposition en somme évoquée dès le début (première ligne, page 144) est valable dans les deux cas.

Ainsi, en rappelant $x \in U'(\bar{\mathbb{Q}})$ (car par définition j_1 et j_2 sont des isomorphismes en x), $c_2^{\#} a_{i+1}^{\#} \leqslant a_i^{\#}$ et $c_3^{\#} \leqslant h_{\mathcal{L}}(x_i) = h_{\text{proj}}(x_i)$ (en effet nous avons supposé $h_{\text{can}}(x_i) \geqslant c_3^{\#} + c_0$ et nous savons $h_{\text{can}} \leqslant h_{\text{proj}} + c_0$), le théorème de [10] s'applique et donc

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h_{\text{proj}}(x_i) \leqslant \frac{c_1}{4} h_{\mathcal{M}}(x).$$

Pour combiner ceci avec le lemme 4.1, nous devons passer aux hauteurs normalisées. Pour le membre de gauche, l'inégalité $h_{\text{proj}} \geqslant h_{\text{can}} - c_0$ suffit tandis que le lemme 4.2 ci-après traite le cas de $h_{\mathcal{M}}(x)$. Terminons la démonstration du théorème en admettant ce dernier. Nous avons, en combinant les trois inégalités,

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \big(h_{\text{can}}(x_i) - c_0\big) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h_{\text{can}}(x_i) + \frac{c_1}{4} c_0' \big|\eta a^2\big|.$$

Ceci est absurde si $h_{\text{can}}(x_i) \geqslant 2c_0 + c_1 c_0'/2$. Nous choisissons donc $c_3 = \max(c_3', 2c_0 + c_1 c_0'/2)$ et le théorème 4.1 est établi.

LEMME 4.2. – *Il existe une constante c_0' indépendante de x (donc de a) telle que*

$$h_{\mathcal{M}}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{lin}}\big(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}\big) + h_{\text{quad}}(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}) + |\eta a^2| c_0'.$$

Démonstration. – Notons

$$h'(x) = h_{\mathcal{M}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{quad}}(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}).$$

Ceci est une hauteur associée à $\mathcal{O}(0, -t\eta a^2, 1, 0, 0) = \bar{\beta}^*(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^* \mathcal{L}_{\text{lin}})$ donc

$$\lim_{p \to +\infty} p^{-1} h'(px) = \sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{lin}}\big(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}\big).$$

Il nous suffit alors de montrer $2h'(x) \leqslant h'(2x) + |\eta a^2| c_0'$. En effet, cela donne

$$h'(x) \leqslant 2^{-p} h'\big(2^p x\big) + \big(1 - 2^{-p}\big)\big|\eta a^2\big| c_0'$$

par récurrence ($p \in \mathbb{N}$) et entraîne le lemme par passage à la limite.

Si nous désignons par $\beta^{\#}$ le morphisme $\bar{G} \to \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1}$ déduit de notre plongement de $\bar{G}$ grâce à q'' (voir définition 3.2), nous pouvons écrire

$$h\big(\iota'(x)\big) = h\big(\beta^{\#}(x)\big) + \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \big((t+1) h_{\mathrm{proj}}(x_i) + h\big(\iota_0\big(f(x_i)\big)\big)\big)$$

tandis que $h(\Sigma(x))$ vaut

$$(t+1) \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \big(h_{\mathrm{proj}}(x_i) - h\big(\iota_0\big(f(x_i)\big)\big)\big) + (t+1) \sum_{i=1}^{m-1} h\big(\iota_0\big(f(a_i x_i + a_{i+1} x_{i+1})\big)\big).$$

Comme par définition $h_{\mathcal{M}}(x) = h(\iota'(x)) - h(\Sigma(x))$ nous trouvons, en utilisant

$$(t+1)\big|h\big(\iota_0(x_0)\big) - |x_0|^2\big| \leqslant c_0 \quad \text{et} \quad |x_0 - y_0|^2 + |x_0 + y_0|^2 = 2|x_0|^2 + 2|y_0|^2$$

si $x_0, y_0 \in A_0(\bar{\mathbb{Q}})$, que $h'(x)$ diffère de la hauteur

$$h\big(\beta^{\#}(x)\big) - t \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \big|f(x_i)\big|^2$$

par au plus $4c_0|\eta a^2|$. Par conséquent, il est suffisant de montrer

$$2h\big(\beta^{\#}(x)\big) + 2t \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h\big(\iota_0\big(f(x_i)\big)\big) \leqslant h\big(\beta^{\#}(2x)\big) + \big|\eta a^2\big| c_0''$$

avec c_0'' indépendant de a. Explicitons pour cela les sections définissant les hauteurs qui apparaissent. Rappelons que nous avons un épimorphisme

$$\Phi : \bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{\ell=1}^{t} \bigoplus_{\varepsilon=-1}^{1} \big(f^m\big)^* \mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes \varepsilon} \to \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{m+i}^* \mathcal{L}_{\mathrm{lin}}.$$

Dans l'idée de passer à $h(\beta^{\#}(2x))$, notons que $[2]^*\Phi$ coïncide avec la flèche

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{\ell=1}^{t} \bigoplus_{\varepsilon=-1}^{1} \big(f^m\big)^* \mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes 2\varepsilon} \to \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{m+i}^* \mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes 2}$$

obtenue par élévation au carré de chacune des

$$\big(f^m\big)^* \mathcal{N}_{i,\ell}^{\otimes \varepsilon} \to p_{m+i}^* \big(\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}\big).$$

D'un autre côté, nous avons vu que Φ donnait, par produit tensoriel avec le faisceau $\bigotimes_{i=1}^{m} p_i^* f^* \mathcal{L}_0^{\otimes t\eta_i a_i^2}$,

$$\Psi : \bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{\ell=1}^{t} \bigoplus_{\varepsilon=-1}^{1} p_i^* f^* \tau_{\varepsilon P_\ell}^* \mathcal{L}_0^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^* f^* \tau_{-\varepsilon P_\ell}^* \mathcal{L}_0^{\otimes a_{i+1}^2} \to (\beta^\#)^* \mathcal{O}(1).$$

C'est cet épimorphisme qui définit $h(\beta^\#(x))$ si l'on utilise les différents ${\mathcal{O}_{A_0}}^{n+1} \to \tau_P^* \mathcal{L}_0$ $(P \in A_0(\bar{\mathbb{Q}}))$ déduits de ι_0. Par suite, $h(\beta^\#(2x))$ est définie de la même façon par $[2]^*\Psi$

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{\ell=1}^{t} \bigoplus_{\varepsilon=-1}^{1} p_i^* f^* \big([2]^* \tau_{\varepsilon P_\ell}^* \mathcal{L}_0\big)^{\otimes a_i^2} \otimes p_{i+1}^* f^* \big([2]^* \tau_{-\varepsilon P_\ell}^* \mathcal{L}_0\big)^{\otimes a_{i+1}^2} \to [2]^* (\beta^\#)^* \mathcal{O}(1)$$

tandis qu'en élevant chacun des termes de Ψ au carré (comme ci-dessus) et en appliquant le produit tensoriel par $\bigotimes_{i=1}^{m} p_i^* f^* \mathcal{L}_0^{\otimes 2t\eta_i a_i^2}$, nous trouvons

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{\ell=1}^{t} \bigoplus_{\varepsilon=-1}^{1} p_i^* f^* (\tau_{\varepsilon P_\ell}^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0)^{\otimes 2a_i^2} \otimes p_{i+1}^* f^* (\tau_{-\varepsilon P_\ell}^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0)^{\otimes 2a_{i+1}^2} \to \mathcal{O}\big(0, 2t\eta a^2, 2\big)$$

qui définit $2h(\beta^\#(x)) + 2t \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h(\iota_0(f(x_i)))$. Maintenant, ces deux épimorphismes sont isomorphes si l'on utilise à gauche (pour $P \in A_0(\bar{\mathbb{Q}})$)

$$(\tau_P^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0)^{\otimes 2} \simeq [2]^* \tau_P^* \mathcal{L}_0$$

et à droite

$$[2]^* (\beta^\#)^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}\big(0, 2t\eta a^2, 2\big).$$

La compatibilité est assurée grâce à la remarque ci-dessus sur $[2]^*\Phi$, le reste de l'action de $[2]^*$ se faisant sur les termes en $\mathcal{L}_0$ qui ont simplement été rajoutés à gauche et à droite par produit tensoriel. Nous pouvons donc décrire la situation de la manière suivante : nous avons un épimorphisme de la forme

$$\bigoplus_{\mu=1}^{\nu} \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{F}_{\mu,i}^{\otimes a_i^2} \to \mathcal{F}$$

où $\mathcal{F}_{\mu,i}$ et $\mathcal{F}$ sont des faisceaux inversibles sur $\bar{G}$ (ici $\nu = 3^{t(m-1)}$) et nous disposons pour chaque couple (μ, i) de deux familles de sections globales de $\mathcal{F}_{\mu,i}$ engendrant ce faisceau. Les deux hauteurs à comparer sont données par les images respectives de ces familles dans $\mathcal{F}$. Le résultat escompté suit : en écrivant place par place les comparaisons sur chaque $\mathcal{F}_{\mu,i}$ (indépendantes de a) puis en les élevant à la puissance a_i^2, nous aboutissons à borner la différence linéairement en $|a^2| \leqslant |\eta a^2|/2$. $\square$

Remarques. – Il est possible d'expliciter c_0' si le plongement ι_0 est connu, par exemple dans le cas d'un plongement thêta (car il suffit de décrire les isomorphismes

$$\big(\tau_P^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0\big)^{\otimes 2} \simeq [2]^* \tau_P^* \mathcal{L}_0).$$

Notons aussi que, comme la preuve le rend clair, nous aurions pu également écrire une comparaison dans l'autre sens (et bien sûr il n'est pas utile dans l'énoncé que les a_i soient ceux définis à partir de x).

5. Démonstration des théorèmes principaux

Pour exploiter notre inégalité de Vojta, nous avons besoin d'un résultat de répartition des points de $\mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$. Nous le donnons dans l'énoncé suivant (élémentaire) ainsi que deux autres assertions de même nature utilisées dans la preuve du théorème 1.2. Tout ceci constitue l'analogue du lemme 2.1 de [9] avec la différence que h_{lin} et h_{quad} doivent se traiter séparément.

LEMME 5.1. – *Soient Γ un sous-groupe de rang r de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\varepsilon \geqslant 0$ un réel.*

1. *Si c_1 et c_3 sont deux réels tels que $c_1 \geqslant 1$, $c_3 \geqslant 5$ et $\varepsilon \leqslant 2^{-8}c_1^{-2}$, il existe une partition de $\{x \in \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon) \mid h_{\text{can}}(x) \geqslant c_3\}$ en au plus $(8c_1+1)^{2r}$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques x, y vérifient*

$$h_{\text{lin}}\left(\frac{x}{h_{\text{can}}(x)} - \frac{y}{h_{\text{can}}(y)}\right) \leqslant \frac{1}{c_1} \quad \textit{et} \quad h_{\text{quad}}\left(\frac{x}{\sqrt{h_{\text{can}}(x)}} - \frac{y}{\sqrt{h_{\text{can}}(y)}}\right) \leqslant \frac{1}{c_1^2}.$$

2. *Si $c \geqslant 1$ est un réel et $\varepsilon \leqslant 2^{-4}$ alors*

$$\big\{x \in \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon) \mid h_{\text{can}}(x) \leqslant c\big\} \subset \Gamma_{4c\varepsilon}.$$

3. *Si ρ et μ sont des réels avec $\rho \geqslant 0$, $\mu > 0$ et $\varepsilon \leqslant \rho/4\mu$ il existe une partie E de Γ de cardinal au plus $(7\sqrt{\mu}+5)^{3r}$ de sorte que*

$$\big\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid h_{\text{can}}(x) \leqslant \rho\big\} \subset \bigcup_{y \in E} \big\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid h_{\text{can}}(x-y) \leqslant \rho/\mu\big\}.$$

Démonstration. – Pour alléger les notations, notons dans cette preuve $f = \sqrt{h}_{\text{can}}$. Comme h_{lin} et $\sqrt{h}_{\text{quad}}$ vérifient l'inégalité triangulaire, il en va de même de f. Ainsi, par exemple, si $x = y + z$ avec $h_{\text{can}}(z) \leqslant \varepsilon(1 + h_{\text{can}}(y))$, nous avons

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\big(1 + f(y)\big).$$

En particulier, si $\varepsilon < 1$ cela entraîne $f(y) \leqslant (f(x) + \sqrt{\varepsilon})/(1 - \sqrt{\varepsilon})$. Sous les hypothèses de la deuxième assertion, il vient alors sans peine $h_{\text{can}}(z) \leqslant 4c\varepsilon$, ce qui la démontre.

A présent il faut séparer les parties linéaire et quadratique. L'ensemble

$$H_{\text{lin}} = \big\{x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid h_{\text{lin}}(x) = 0\big\}$$

est un sous-groupe saturé de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et h_{lin} induit une norme sur $A(\bar{\mathbb{Q}})/H_{\text{lin}}$. Il en va de même pour $H_{\text{quad}} = \{x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid h_{\text{quad}}(x) = 0\}$ et $\sqrt{h_{\text{quad}}}$ sur $A(\bar{\mathbb{Q}})/H_{\text{quad}}$. Ainsi

$$E_{\text{lin}} = (\Gamma/\Gamma \cap H_{\text{lin}}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad E_{\text{quad}} = (\Gamma/\Gamma \cap H_{\text{quad}}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$$

sont deux espaces vectoriels réels normés de dimensions au plus égales à r. Nous appliquons le lemme 6.1 de [8] à la boule unité de chacun avec $\gamma = 4c_1$. Cela fournit au plus $(8c_1+1)^r$ boules dans chaque espace et nous notons respectivement $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ leurs centres. Si $F_{i,j}$ désigne l'ensemble

$$\left\{x \in \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon) \mid h_{\text{can}}(x) \geqslant c_3, h_{\text{lin}}\left(\frac{x}{h_{\text{can}}(x)} - x_i\right) \leqslant \frac{1}{2c_1} \text{ et } h_{\text{quad}}\left(\frac{x}{f(x)} - y_j\right) \leqslant \frac{1}{4c_1^2}\right\},$$

la première assertion sera acquise si nous montrons que ces ensembles recouvrent $\{x \in \mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon) \mid h_{\mathrm{can}}(x) \geqslant c_3\}$. Soit donc x un élément de $\mathcal{C}(\Gamma,\varepsilon)$ avec $h_{\mathrm{can}}(x) \geqslant c_3$ que nous écrirons $x = y + z$ avec $y \in \Gamma$ et $h_{\mathrm{can}}(z) \leqslant \varepsilon(1 + h_{\mathrm{can}}(y))$. En calculant comme plus haut, nous trouvons que $c_3 \geqslant 5$ entraîne $f(y) \geqslant 2$ puis

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon} f(y) \quad \text{et} \quad \bigl|h_{\mathrm{can}}(x) - h_{\mathrm{can}}(y)\bigr| \leqslant \frac{7}{2}\sqrt{\varepsilon} h_{\mathrm{can}}(y).$$

Ceci assure

$$h_{\mathrm{lin}}\left(\frac{x}{h_{\mathrm{can}}(x)} - \frac{y}{h_{\mathrm{can}}(y)}\right) \leqslant \frac{h_{\mathrm{can}}(z) + |h_{\mathrm{can}}(x) - h_{\mathrm{can}}(y)|}{h_{\mathrm{can}}(y)} \leqslant 4\sqrt{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{4c_1}$$

et

$$\sqrt{h_{\mathrm{quad}}}\left(\frac{x}{f(x)} - \frac{y}{f(y)}\right) \leqslant \frac{f(z) + |f(x) - f(y)|}{f(y)} \leqslant 4\sqrt{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{4c_1}.$$

D'un autre côté, les éléments $y/h_{\mathrm{can}}(y) \in E_{\mathrm{lin}}$ et $y/f(y) \in E_{\mathrm{quad}}$ appartiennent chacun à l'une des boules obtenues, c'est-à-dire qu'il existe $i \in I$ et $j \in J$ avec

$$h_{\mathrm{lin}}\left(\frac{y}{h_{\mathrm{can}}(y)} - x_i\right) \leqslant \frac{1}{4c_1} \quad \text{et} \quad h_{\mathrm{quad}}\left(\frac{y}{f(y)} - y_j\right) \leqslant \frac{1}{16c_1^2}.$$

En combinant avec les relations précédentes, nous trouvons bien $x \in F_{i,j}$.

Pour la troisième assertion, notons $F = \{y \in \Gamma \mid f(y) \leqslant \sqrt{\rho} + \sqrt{\varepsilon}\}$. Nous appliquons le lemme 6.1 de [8] de manière imbriquée : d'abord à l'image de F dans E_{lin} avec $\gamma = 3(2\sqrt{\mu} + 1)^2$. Comme cette image est incluse dans la boule centrée à l'origine et de rayon $\rho(1 + 1/2\sqrt{\mu})^2$, nous obtenons une famille de boules $(B_i)_{i\in I}$ de rayon $\rho/12\mu$. Si B_i' désigne l'image réciproque de B_i dans F, nous réappliquons le même lemme, pour chaque i, à l'image de B_i' dans E_{quad} avec $\gamma = \sqrt{3}(2\sqrt{\mu} + 1)$. En raisonnant de même, nous trouvons donc une famille de boules de rayon $\sqrt{\rho/12\mu}$. Soit alors E une partie de F dont l'image est formée de la famille des centres de ces boules et montrons qu'elle convient.

Si $x \in \Gamma_\varepsilon$ avec $h_{\mathrm{can}}(x) \leqslant \rho$, nous écrivons à nouveau $x = y + z$ avec $y \in \Gamma$ et, ici, $h_{\mathrm{can}}(z) \leqslant \varepsilon$. Choisissons i tel que $y \in B_i'$ puis $y_0 \in E$ tel que $y_0 \in B_i'$ et $h_{\mathrm{quad}}(y - y_0) \leqslant \rho/12\mu$. En transitant par le centre de B_i', il vient $h_{\mathrm{lin}}(y - y_0) \leqslant (\rho/12\mu) + (\rho/12\mu) \leqslant \rho/6\mu$ et donc

$$h_{\mathrm{can}}(y - y_0) \leqslant \rho/4\mu.$$

Finalement $h_{\mathrm{can}}(x - y_0) = h_{\mathrm{can}}(y - y_0 + z) \leqslant \rho/\mu$. Ceci montre l'inclusion de l'énoncé et la définition de E est telle que l'on peut choisir

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} E &\leqslant \bigl(6\bigl(2\sqrt{\mu} + 1\bigr)^2 + 1\bigr)^r \bigl(2\sqrt{3}\bigl(2\sqrt{\mu} + 1\bigr) + 1\bigr)^r \leqslant \bigl(2\sqrt{3}\bigl(2\sqrt{\mu} + 1\bigr) + 1\bigr)^{3r} \\ &\leqslant \bigl(7\sqrt{\mu} + 5\bigr)^{3r}. \qquad \square \end{aligned}$$

La première assertion de ce lemme réunie au théorème 4.1 assure que h_{can} est bornée sur $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, 2^{-8}c_1^{-2})$, pour la valeur de c_1 donnée par le théorème. D'après la seconde assertion, nous pouvons donc écrire dès que $\varepsilon \leqslant 2^{-8}c_1^{-2}$

$$(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \subset \Gamma_{c\varepsilon}$$

pour une certaine constante $c > 0$. Pour aboutir au théorème 1.2, il suffit donc d'établir la finitude de

$$(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \{x \in \Gamma_\varepsilon \mid h_{\mathrm{can}}(x) \leqslant \rho\}$$

pour ρ fixé et $\varepsilon > 0$ assez petit. Cela résulte alors de la troisième assertion du lemme en choisissant μ de sorte que $\rho/\mu \leqslant q(X - y)$ pour tout $y \in \Gamma$ puis $\varepsilon \leqslant \rho/4\mu$ (nous utilisons $Z_{X-y} = Z_X - y$).

Démontrons pour terminer le théorème 1.1. Dans le cadre de celui-ci, si $Z_X \neq X$ le résultat devient évident. Sinon $\dim \mathrm{Stab}(X) > 0$ et en posant $B = \mathrm{Stab}^0(X)$, qui est une sous-variété semi-abélienne de A, et $X' = X/B \hookrightarrow A/B$, nous avons $Z_{X'} \neq X'$. Si Γ' désigne encore l'image de Γ dans $(A/B)(\bar{\mathbb{Q}})$, il est suffisant d'établir que l'image de Γ_ε est incluse dans $\Gamma'_{\mu\varepsilon}$ pour un certain $\mu > 0$ indépendant de ε (puisque l'image de $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ sera incluse dans $X'(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma'_{\mu\varepsilon}$ qui n'est pas dense dans X' pour ε assez petit). Or cela résulte du lemme suivant qui clôt donc la démonstration.

LEMME 5.2. – *Si B est une sous-variété semi-abélienne de A et h'_{can} une hauteur canonique sur $(A/B)(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe $\mu > 0$ tel que $h'_{\mathrm{can}}(x') \leqslant \mu h_{\mathrm{can}}(x)$ pour tout $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ d'image $x' \in X'(\bar{\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. – Notons B_0 la sous-variété abélienne de A_0 image de B et $U = B \cap T$ le sous-tore du tore $T = \mathrm{Ker}(A \to A_0)$ noyau de $B \to B_0$ de sorte à avoir un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T/U \arrow[r] \arrow[d] & A/B \arrow[r] \arrow[d] & A_0/B_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $A \to A/B$ se dévisse en $A \to A/U$ suivi de $A/U \to A/B$ et par conséquent il suffit d'établir le lemme dans les cas extrêmes où l'un des deux groupes U ou B_0 est trivial.

Si U est trivial, c'est-à-dire si $B \simeq B_0$, nous constatons que les restrictions des $\mathcal{M}_\ell$ à B_0 sont triviales. D'après la suite exacte duale

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(A_0/B_0) \to \mathrm{Pic}^0(A_0) \to \mathrm{Pic}^0(B_0) \to 0,$$

ces faisceaux proviennent donc de A_0/B_0 et il suit finalement que $(A \to A/B)^*\mathcal{L}'_{\mathrm{lin}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$. Pour les hauteurs, il y a donc une égalité $h'_{\mathrm{lin}}(x') = h_{\mathrm{lin}}(x)$ tandis que dans $A_0 \to A_0/B_0$ nous avons bien une inégalité de la forme $h'_{\mathrm{quad}}(x') \leqslant \mu h_{\mathrm{quad}}(x)$.

Si maintenant B_0 est triviale, il y a bien sûr égalité des hauteurs de Néron–Tate et donc $h'_{\mathrm{quad}}(x') \leqslant h_{\mathrm{quad}}(x)$. D'un autre côté l'extension $A/B = A/U$ de A_0 est associée à des faisceaux

$$\mathcal{M}'_{\ell'} = \bigotimes_{\ell=1}^{t} \mathcal{M}_{\ell}^{\otimes b_{\ell,\ell'}}$$

avec $1 \leqslant \ell' \leqslant t' = \operatorname{rang}(T/U)$ et $b_{\ell,\ell'} \in \mathbb{Z}$. En revenant alors à la définition de $\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}$, il vient

$$h'_{\mathrm{lin}}(x') \leqslant \max_{1 \leqslant \ell \leqslant t} \left(\sum_{\ell'=1}^{t'} |b_{\ell,\ell'}| \right) h_{\mathrm{lin}}(x)$$

(voir aussi le lemme 6.1 de [9] où est traité explicitement le cas $A_0 = 0$). □

RÉFÉRENCES

[1] BOMBIERI E., ZANNIER U., Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV* **23** (1996) 779–792.
[2] BOST J.-B., GILLET H., SOULÉ C., Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994) 903–1027.
[3] DAVID S., PHILIPPON P., Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **331** (2000) 587–592.
[4] EVERTSE J.-H., Points on subvarieties of tori. A Panorama in Number Theory or the View from Baker's Garden, in: Wüstholz G. (Ed.), *Proc. Conf. Number Theory in honour of the 60th birthday of Prof. Alan Baker, Zurich 1999*, Cambridge Univ. Press, 2002, pp. 214–230.
[5] MUMFORD D., *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1974.
[6] POONEN B., Mordell-Lang plus Bogomolov, *Invent. Math.* **137** (1999) 413–425.
[7] RÉMOND G., Inégalité de Vojta en dimension supérieure, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV* **29** (2000) 101–151.
[8] RÉMOND G., Décompte dans une conjecture de Lang, *Invent. Math.* **142** (2000) 513–545.
[9] RÉMOND G., Sur les sous-variétés des tores, *Comp. Math.* **134** (2002) 337–366.
[10] RÉMOND G., *Inégalité de Vojta généralisée*, Prépublication de l'Institut Fourier 584 (2003).
[11] VOJTA P., Integral points on subvarieties of semi-abelian varieties, I, *Invent. Math.* **126** (1996) 133–181.
[12] ZHANG S., Distribution of almost division points, *Duke Math. J.* **103** (2000) 39–46.

(Manuscrit reçu le 17 juillet 2001 ;
accepté, après révision, le 11 juillet 2002.)

Gaël RÉMOND
Institut Fourier, UMR 5582,
BP 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France
E-mail : Gael.Remond@ujf-grenoble.fr