

# LA CONJECTURE DU FACTEUR DIRECT

par YVES ANDRÉ

## RÉSUMÉ

M. Hochster a conjecturé que pour toute extension finie  $S$  d'un anneau commutatif régulier  $R$ , la suite exacte de  $R$ -modules  $0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow S/R \rightarrow 0$  est scindée. En nous appuyant sur sa réduction au cas d'un anneau local régulier  $R$  complet non ramifié d'inégale caractéristique, nous proposons une démonstration de cette conjecture dans le contexte de la théorie perfectoïde de P. Scholze. Les deux ingrédients-clé sont le « lemme d'Abhyankar perfectoïde » et l'analyse des extensions kummériennes de  $R$  par une technique d'épaississement sur des voisinages tubulaires.

Nous montrons par les mêmes techniques l'existence d'algèbres de Cohen-Macaulay pour les anneaux locaux d'inégale caractéristique. Il s'ensuit que les revêtements finis d'anneaux réguliers sont dominés par des plats.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction . . . . .	71
1. Préliminaires . . . . .	75
2. Extensions « kummériennes » de $W(k)[[T_1, \dots, T_r]]$ . . . . .	78
3. Application du lemme d'Abhyankar perfectoïde à la conjecture du facteur direct . . . . .	83
4. Algèbres de Cohen-Macaulay . . . . .	84
Remerciements . . . . .	88
Annexe A : Pureté . . . . .	89
Bibliographie . . . . .	92

## Introduction

**0.1.** La conjecture du facteur direct, publiée par M. Hochster en 1973 [13], est l'énoncé suivant, d'apparence élémentaire :

*Conjecture 0.1.1.* — Soit  $R$  un anneau commutatif noethérien régulier. Alors pour toute  $R$ -algèbre commutative fidèle et finie  $S$ , l'inclusion  $R \hookrightarrow S$  admet une rétraction  $R$ -linéaire, i.e.  $R$  est facteur direct de  $S$  en tant que  $R$ -module.

Il revient au même de dire que toute extension finie  $R \hookrightarrow S$  est *pure*, i.e. universellement injective, ou encore que  $S$  est un générateur de la catégorie des  $R$ -modules (cf. §A).

Cette conjecture occupe une place centrale dans l'écheveau des « conjectures homologiques », issues des travaux de C. Peskine et L. Szpiro [25], et qui structurent la vision sous-jacente à bien des travaux d'algèbre commutative depuis une quarantaine d'années [16]. Le résultat suivant, qui synthétise les travaux de plusieurs auteurs, donne un aperçu de son caractère protéiforme.

Les énoncés suivants sont équivalents<sup>1</sup> :

- (1) La conjecture du facteur direct vaut pour tout anneau régulier.
- (2) Pour tout idéal  $I$  d'un anneau régulier  $R$  et toute extension entière  $S$ ,  $I = R \cap IS$ .
- (3) Toute extension entière d'un anneau noethérien descend la platitude des modules.
- (4) Pour tout anneau local (noethérien)  $R$ , toute suite sécante maximale  $(x_1, \dots, x_d)$  et tout couple  $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ , le monôme  $(x_1 \cdots x_d)^m$  est dans l'idéal engendré par  $x_1^n, \dots, x_d^n$  si et seulement si  $m \geq n$ .
- (5) Pour tout anneau local  $R$  d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et tout complexe de modules libres de type fini  $0 \rightarrow F_d \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0$  tel que  $H_i(F_\bullet)$  soit de longueur finie pour  $i > 0$  et que  $H_0(F_\bullet) \setminus \mathfrak{m}H_0(F_\bullet)$  ait de la torsion  $\mathfrak{m}$ -primaire, on a  $\dim R \leq d$ .

Ils impliquent la conjecture des syzygies :

- (6) Tout  $k$ -ième module de syzygies (d'un module de type fini sur un anneau local), qui est de dimension projective finie mais non libre, est de rang  $\geq k$ .

**0.2.** La conjecture du facteur direct est un problème local sur  $R$  mais pas sur l'extension  $S$ . Si le degré de l'extension est inversible, il est facile de construire une rétraction à l'aide d'une trace divisée, ce qui établit la conjecture lorsque  $R$  contient  $\mathbf{Q}$ . C'est encore facile si l'extension finie est plate (donc fidèlement plate, de sorte que la suite exacte  $0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow S/R \rightarrow 0$  se scinde), ce qui établit la conjecture en dimension  $\leq 2$ , puisque toute extension finie normale de  $R$  est alors plate. Le cas beaucoup plus ardu de la dimension 3 a été résolu par R. Heitmann [12].

Par ailleurs, sans l'hypothèse de régularité, il est aisé de trouver des contre-exemples : l'idéal  $(x+y)$  de  $R = \mathbf{K}[x, y]/(xy)$  n'est le contracté d'aucun idéal du normalisé  $\mathbf{K}[x] \times \mathbf{K}[y]$  ; la normalité ne suffirait pas, au demeurant [13, ex. 1].

Hochster a démontré la conjecture en caractéristique  $p > 0$  (voir A.3 ci-dessous), et a ramené le cas général au cas d'un anneau local complet régulier non ramifié d'inégale caractéristique  $(0, p)$  de corps résiduel  $k$  parfait, c'est-à-dire, en vertu du théorème de structure de Cohen, au cas d'un anneau de séries formelles  $W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$  à coefficients dans l'anneau de Witt de  $k$  [14, th. 6.1].

L'objectif de cet article est de la démontrer en général, via cette réduction :

**Théorème 0.2.1.** — *La conjecture du facteur direct est vraie pour  $W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$  (donc aussi pour tout anneau régulier  $R$ ).*

<sup>1</sup> Une suite sécante maximale (ou « système de paramètres ») est un système de  $(\dim R)$  générateurs d'un idéal dont le radical est l'idéal maximal. Le rang d'un module de dimension projective finie (sur un anneau local) est la somme alternée des rangs dans une résolution libre.

L'implication (1)  $\Rightarrow$  (3) est implicite dans [27] (1.4.3) ; l'équivalence est prouvée dans [23]. Pour l'équivalence (1)  $\Leftrightarrow$  (4), voir [14, th. 6.1]. L'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) est élémentaire : la pureté de l'extension  $S$  entraîne que  $R/I \rightarrow S/IS$  est injectif ; pour la réciproque, voir [9]. Pour (4)  $\Rightarrow$  (5), voir [14], et [10] pour la réciproque. L'implication (5)  $\Rightarrow$  (6), implicite dans [11], est explicitée dans [14].

En fait, le plongement de  $W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$  dans sa fermeture intégrale dans une clôture algébrique du corps de fractions admet une rétraction  $W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$ -linéaire (cf. A.3).

**0.3.** Nous ferons usage de techniques « transcendantales » issues de la théorie de Hodge  $p$ -adique, quittant délibérément le monde noethérien où l'algèbre commutative est discrète, pour le non-noethérien où elle ânonne.

Expliquons la stratégie de la preuve dans le cas analogue, mais beaucoup plus simple, où  $R = k[[T_0, \dots, T_n]]$  et où l'extension finie  $S$  de  $R$  est intègre et munie d'un groupe fini  $G$  d'automorphismes tel que  $S^G = R$ .

La trace  $\text{tr} : S \rightarrow R$  donnée par la somme des conjugués est non nulle, car l'extension des corps de fractions est galoisienne ; néanmoins  $\text{tr}$  n'est pas surjective en général, donc est impropre à fournir une rétraction de  $R \hookrightarrow S$  si  $p$  divise l'ordre de  $G$ .

La situation s'améliore en passant aux clôtures parfaites : l'extension des corps de fractions demeure galoisienne de groupe  $G$ , mais l'idéal non nul  $\text{tr}(S^{1/p^\infty})$  de  $R^{1/p^\infty}$  devient radiciel :  $\text{tr}(S^{1/p^\infty}) = (\text{tr}(S^{1/p^\infty}))^{1/p^\infty}$ . En particulier,  $\text{tr}(S^{1/p^\infty})$  n'est pas contenu dans l'idéal  $(T_0, T_1, \dots, T_n)R^{1/p^\infty}$ . Comme  $R^{1/p^\infty}$  est libre sur  $R$  de base  $(T_0^{m_0} \cdots T_n^{m_n})_{\underline{m} \in (\mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \cap [0, 1])^{n+1}}$ , on en déduit l'existence d'un élément  $s \in S^{1/p^\infty}$  et d'un indice  $\underline{m}$  tels que la projection de  $\text{tr}(s)$  sur le facteur  $R$  indexé par  $\underline{m}$  soit égal à 1. En composant les applications  $R$ -linéaires  $S \rightarrow S^{1/p^\infty} \xrightarrow{s \mapsto \text{tr}(ss')} R^{1/p^\infty} \xrightarrow{\text{pr}_{\underline{m}}} R$ , on obtient la rétraction cherchée.

**0.4.** En inégale caractéristique, où  $W(k)$  se substitue à  $k[[T_0]]$ , la théorie de Hodge  $p$ -adique suggère une approche analogue, en remplaçant clôtures radicielles par *extensions profondément ramifiées*. Dans le cas de  $A := W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$ , on peut par exemple considérer le complété  $p$ -adique  $\hat{A}_\infty^o$  de  $A_\infty^o := \bigcup W(k)[\zeta_{p^j}][[T_1^{\frac{1}{p^j}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^j}}]]$ .

Cette idée a déjà été explorée par plusieurs auteurs, dont P. Roberts, puis K. Shimomoto, B. Bhatt, O. Gabber et L. Ramero ; elle a notamment permis à Bhatt [4] et puis Shimomoto [28] de prouver la conjecture du facteur direct dans le cas où  $B[\frac{1}{p}]$  est étale sur  $A[\frac{1}{p}]$  : dans ce cas, le théorème de « presque-pureté » de Faltings implique en effet que l'anneau des entiers  $(B \otimes_A \hat{A}_\infty^o)^o$  est presque pur sur  $\hat{A}_\infty^o$ , et un argument noethérien permet de passer à la pureté sur  $A$  (cf. 1.1.2).

**0.5.** Pour le cas général, le théorème de Faltings s'avère insuffisant (même dans ses avatars logarithmiques). Nous le remplacerons par le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde de [1], qui permet de traiter le cas où  $B[\frac{1}{p}]$  est ramifié sur  $A[\frac{1}{p}]$  le long d'un discriminant  $g \in A$  quelconque.

Ce résultat affirme entre autre que *quitte à adjoindre les racines  $p^\infty$ -ièmes de  $g$  et prendre une fermeture [complètement] intégrale, l'extension des anneaux d'entiers devient presque étale modulo toute puissance de  $p$  - « presque » étant entendu au sens où l'on « néglige » tout ce qui est*

annulé par  $(\zeta_{p^j} - 1)g^{\frac{1}{p^j}}$  pour tout  $j$  (la presque-algèbre intervient ici dans un cadre inédit où l'idéal idempotent n'est pas un idéal de valuation). Plus précisément, la fermeture intégrale  $\mathcal{B}^o$  de  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$  dans  $\mathbf{B} \otimes_A \hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle [\frac{1}{g}]$  est *presque* étale finie sur  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$  modulo toute puissance de  $p$  (th. 3.2.1).

La preuve du lemme d'Abhyankar perfectoïde s'appuie, rappelons-le, sur des résultats du type « théorème d'extension de Riemann » dans le contexte perfectoïde et des techniques galoisiennes permettant de contrôler la condition « presque étale finie » par passage à la limite sur des complémentaires (où le théorème de Faltings s'applique) de voisinages de plus en plus petits du lieu discriminant  $g = 0$ .

**0.6.** Pour appliquer le lemme d'Abhyankar perfectoïde, il faut « ramifier » le discriminant  $g$ , c'est-à-dire passer par l'extension  $\hat{A}_\infty^o \rightarrow \hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$ , qu'il s'agit alors de « contrôler ».

L'algèbre  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$  est le complété  $p$ -adique de la réunion croissante des extensions kummériennes  $A[\zeta_{p^i}, g^{\frac{1}{p^i}}, \frac{1}{p}]^o$  de  $A$ , où  $A[\zeta_{p^i}, g^{\frac{1}{p^i}}, \frac{1}{p}]^o$  désigne la fermeture intégrale de  $A$  dans  $A[\zeta_{p^i}, g^{\frac{1}{p^i}}, \frac{1}{p}]$ . Or l'étude de ces extensions kummériennes est notoirement difficile [18], [26] :  $A[\zeta_p, g^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{p}]^o$  n'est déjà pas si facile à décrire, et n'est pas nécessairement  $A$ -plat.

Au lieu de travailler à cran  $i$  fini, notre approche consistera à travailler d'emblée avec la colimite complétée  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$ , en l'« épaisissant », c'est-à-dire en la voyant comme colimite complétée-séparée d'algèbres de fonctions bornées sur des voisinages tubulaires de  $T = g$  dans le spectre analytique de  $\hat{A}_\infty \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ , et en exploitant le caractère perfectoïde de telles algèbres. Nous verrons que  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$  est *presque fidèlement plate* sur  $A_\infty^o$ , « presque » étant entendu ici au sens où l'on « néglige » ce qui est annulé par  $\zeta_{p^j} - 1$  pour tout  $j$  (th. 2.5.2). On en déduit assez facilement la pureté de  $A \hookrightarrow A[\zeta_{p^i}, g^{\frac{1}{p^i}}, \frac{1}{p}]^o$  (cor. 2.6.1), ce qui donne une *preuve de la conjecture du facteur direct dans le cas kummérien qui n'utilise pas le lemme d'Abhyankar perfectoïde*.

**0.7.** Les travaux de Hochster *et al.* ont souligné le lien entre la conjecture du facteur direct et l'existence d'*algèbres de Cohen-Macaulay* (non nécessairement noethériennes) pour les anneaux locaux, existence qui joue un rôle-clé dans les conjectures homologiques ([16], [17], [7]). De fait, les constructions évoquées ci-dessus fournissent des algèbres « presque de Cohen-Macaulay »— $\mathcal{B}^o$  est une  $\mathbf{B}$ -algèbre presque de Cohen-Macaulay (cf. 4.2)—, qu'on peut ensuite modifier « formellement » selon une technique de [15] pour obtenir des algèbres de Cohen-Macaulay. Cela donne :

*Théorème 0.7.1.* — *Pour tout anneau local noethérien  $\mathbf{B}$ , il existe une  $\mathbf{B}$ -algèbre  $\mathbf{C}$  de Cohen-Macaulay, i.e. telle que toute suite sécante maximale de  $\mathbf{B}$  devient une suite régulière dans  $\mathbf{C}$  (et telle que  $\mathfrak{m}_{\mathbf{B}}\mathbf{C} \neq \mathbf{C}$ ).*

Le cas où  $B$  contient un corps étant déjà connu, c'est le cas où  $B$  est d'inégale caractéristique  $(0, p)$  (sans  $p$ -torsion) que nous traitons.

Compte tenu de ce que pour un anneau régulier  $R$ , une  $R$ -algèbre est de Cohen-Macaulay si et seulement si elle est fidèlement plate, l'existence des algèbres de Cohen-Macaulay implique (cf. 4.3) :

*Théorème 0.7.2.* — Soit  $R$  un anneau (noethérien) régulier et  $R \hookrightarrow S$  une extension finie. Alors il existe un homomorphisme  $S \rightarrow T$  tel que le composé  $R \rightarrow T$  soit fidèlement plat.

En particulier,  $R \rightarrow T$  est pur, donc  $R \rightarrow S$  aussi, ce qui redonne après détour la conjecture du facteur direct.

**0.8.** Signalons enfin, sur la suggestion d'un arbitre, quelques travaux ultérieurs qui s'appuient sur les méthodes et résultats de cet article et du précédent [1], en inégale caractéristique : B. Bhatt a obtenu une variante dérivée de la conjecture du facteur direct conjecturée par J. De Jong, K. Shimomoto a raffiné le théorème d'existence des algèbres de Cohen-Macaulay en montrant qu'elles peuvent être choisies perfectoides, R. Heitmann et L. Ma ont prouvé un cas particulier de functorialité faible de ces algèbres qui permet notamment de se débarrasser de l'hypothèse de séparabilité dans le th. 4.4.2 ci-dessous. L. Ma a mis au ban d'essai des analogues de la "tight closure" en inégale caractéristique avec R. Heitmann, et revisité la théorie des puissances symboliques avec K. Schwede.

## 1. Préliminaires

**1.1.** Commençons par deux lemmes aux confins de l'algèbre noethérienne.

*Lemme 1.1.1.* — Soient  $R$  un anneau noethérien,  $\mathfrak{J}$  un idéal et  $S$  une  $R$ -algèbre plate (non nécessairement noethérienne). Alors le complété-séparé  $\hat{S}$  de  $S$  est plat sur  $R$ , et pour tout module  $M$  de type fini sur  $R$ , le complété de  $M_S$  s'identifie à  $M_{\hat{S}}$ . Si  $\mathfrak{J}$  est contenu dans le radical de Jacobson de  $R$  (ce qui est le cas si  $R$  est  $\mathfrak{J}$ -adiquement complet) et si  $S$  est fidèlement plat sur  $R$ , alors  $\hat{S}$  est fidèlement plat sur  $R$ .

*Démonstration.*<sup>2</sup> — Considérons une suite exacte courte  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  de  $R$ -modules de type fini. D'après Artin-Rees, il existe  $m$  tel que pour tout  $n \geq m$ , en posant  $N_1 = M_1 \cap \mathfrak{J}^m M_2$ , la suite  $0 \rightarrow M_1/\mathfrak{J}^{n-m} N_1 \rightarrow M_2/\mathfrak{J}^n M_2 \rightarrow M_3/\mathfrak{J}^n M_3 \rightarrow 0$  soit exacte. On obtient encore une suite exacte en tensorisant avec la  $R$ -algèbre plate  $S$ , puis,

<sup>2</sup> ce lemme apparaît sous diverses formes et avec diverses preuves dans la littérature, par exemple [30, th. 0.1] ; la preuve qui suit est plus élémentaire que celle de *loc. cit.* . L'énoncé est à première vue surprenant dans le cas où  $S$  n'est pas séparé ; il ne dit rien d'ailleurs sur le séparé de  $S$ .

d'après Mittag-Leffler, en passant à la limite sur  $n$ . Puisque  $\mathfrak{J}^{n-m}N_1$  est coincé entre  $\mathfrak{J}^nM_1$  et  $\mathfrak{J}^{n-m}M_1$ , on obtient une suite exacte courte  $0 \rightarrow \widehat{M}_{1S} \rightarrow \widehat{M}_{2S} \rightarrow \widehat{M}_{3S} \rightarrow 0$ .

Pour tout  $\mathbf{R}$ -module de type fini  $M$ , le morphisme  $M_{\hat{S}} \rightarrow \widehat{M}_{\hat{S}}$  est surjectif, et on déduit de ce qui précède, en prenant une présentation de  $M$ , qu'il est en fait bijectif. On déduit de là et de la suite exacte précédente que  $\hat{S}$  est plat sur  $\mathbf{R}$ .

Supposons ensuite qu'on ait  $M_{\hat{S}} = 0$ . Alors  $(M/\mathfrak{J}M) \otimes_{\mathbf{R}} S = M \otimes_{\mathbf{R}} (\hat{S}/\mathfrak{J}\hat{S}) = 0$ . Si  $S$  est fidèlement plat, on a  $M = \mathfrak{J}M$ . Si  $\mathfrak{J}$  est contenu dans le radical, on a  $M = 0$  d'après Nakayama, et on conclut que  $\hat{S}$  est fidèlement plat sur  $\mathbf{R}$ , ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 1.1.2.** — Soient  $\mathbf{R}$  un anneau noethérien,  $M$  un  $\mathbf{R}$ -module de type fini,  $S$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre fidèlement plate, et  $\mathfrak{K}$  un idéal idempotent de  $S$  tel que  $\mathfrak{K}M_S = 0$ .

Alors pour tout  $s \in \mathbf{R} \cap \mathfrak{K}$ , il existe  $r \in \text{Ann}M$  tel que  $(1-r)s = 0$ . En particulier, si  $\mathbf{R}$  est local et  $\mathbf{R} \cap \mathfrak{K} \neq 0$ , alors  $M = 0$ .

*Démonstration.* — Posons  $\mathfrak{J} = \text{Ann}M$ . Par platitude, on a  $\mathfrak{J}S = \text{Ann}M_S$ . Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathfrak{K}^n$  est contenu dans  $(\mathfrak{J}S)^n = \mathfrak{J}^nS$ . Par pureté, on a  $\mathbf{R} \cap (\mathfrak{J}S)^n = \mathbf{R} \cap (\mathfrak{J}^n \otimes S) = \mathfrak{J}^n$ . Donc  $\mathbf{R} \cap \mathfrak{K}$  est contenu dans  $\cap \mathfrak{J}^n$ . On conclut par le lemme de Krull.  $\square$

**1.2.** Voici quelques rappels et compléments sur la *localisation de Weierstrass* des algèbres de Banach uniformes (*i.e.* dont la norme est équivalente à la norme spectrale associée [1, 2.2]).

Soient  $\mathcal{K}$  un corps complet pour une valuation non-triviale,  $\lambda$  un élément non nul de l'anneau de valuation  $\mathcal{K}^\circ$ . Soient  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme, et  $f$  un élément de la boule unité  $\mathcal{B}_{\leq 1}$ . Alors  $\mathcal{B}\left\{\frac{f}{\lambda}\right\}$  est définie comme le quotient de  $\mathcal{B}\langle U \rangle$  par l'adhérence de l'idéal engendré par  $\lambda U - f$ ; c'est une algèbre de Banach pour la norme quotient (non nécessairement uniforme). En fait, cet idéal est *fermé* [21, prop. 2.3], de sorte que

$$(1) \quad \mathcal{B}\left\{\frac{f}{\lambda}\right\} = \mathcal{B}\langle U \rangle / (\lambda U - f).$$

Si  $f$  est non-diviseur de zéro dans  $\mathcal{B}$ ,  $\lambda U - f$  l'est aussi dans  $\mathcal{B}\langle U \rangle$ .

**1.2.1.** Supposons que  $|\mathcal{K}|$  soit dense dans  $|\mathcal{B}|$  (ce qui est le cas si la valuation est non discrète). Pour tout élément  $\varpi \in \mathcal{K}^\circ$ , la topologie de  $\mathcal{B}_{\leq 1}$  est la topologie  $\varpi$ -adique [1, sor. 2.3.1].

Supposons que la multiplication par  $f$  soit isométrique dans  $\mathcal{B}$  (ce qui est en particulier le cas si la norme de  $\mathcal{B}$  est multiplicative et  $|f| = 1$ ). Alors le quotient  $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle / (\lambda U - f)$  est sans  $\varpi$ -torsion : en effet, il suffit de voir que tout élément annulé par  $\lambda$  est nul ; or si  $\sum b_m U^m$  relève un tel élément, l'équation  $\lambda(\sum b_m U^m) = (\lambda U - f) \sum_0^\infty a_m U^m$ ,  $a_m \in \mathcal{B}_{\leq 1}$ ,

implique que  $\lambda$  divise tous les  $a_m$  puisque la multiplication par  $f$  est injective modulo  $\lambda$ . On a donc  $(\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1} = ((\lambda U - f)\mathcal{B})_{\leq 1}$ , et il en découle que

$$(2) \quad \mathcal{B}\left\{\frac{f}{\lambda}\right\}_{\leq 1} = \mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle / (\lambda U - f)$$

si la valuation de  $\mathcal{K}$  est discrète, et

$$(3) \quad \mathcal{B}\left\{\frac{f}{\lambda}\right\}_{\leq 1} = (\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle / (\lambda U - f))_*^a$$

sinon, en utilisant la notation  $(\ )_*^a$  de la presque-algèbre dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ , qui se traduit ici par  $\mathfrak{B}_*^a := \bigcap_{\eta \in \mathcal{K}^{oo}} \eta^{-1}\mathfrak{B}$  [1, sor. 2.3.1].

**1.2.2.** La formule (1) montre par ailleurs que  $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle / (\lambda U - f)$  est  $\varpi$ -adiquement séparé, *i.e.*  $(\lambda U - f)$  est fermé dans  $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle$ . On en déduit l'égalité

$$(4) \quad \mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle / (\lambda U - f) = \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}\left[\frac{f}{\lambda}\right]},$$

avec le complété  $\varpi$ -adique de  $\mathcal{B}_{\leq 1}\left[\frac{f}{\lambda}\right] \subset \mathcal{B}$ . En effet, le même argument que ci-dessus montre que  $\mathcal{B}_{\leq 1}[U] / (\lambda U - f)$  est sans  $\varpi$ -torsion, de sorte que la suite

$$(5) \quad 0 \rightarrow (\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1}[U] \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 1}[U] \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 1}\left[\frac{f}{\lambda}\right] \rightarrow 0$$

est exacte. Elle induit comme d'habitude par complétion une suite

$$(6) \quad 0 \rightarrow (\lambda U - f)\widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}[U]} \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle \rightarrow \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}\left[\frac{f}{\lambda}\right]} \rightarrow 0$$

exacte à droite et où l'image de  $(\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle$  est dense dans le noyau de  $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle \rightarrow \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}\left[\frac{f}{\lambda}\right]}$ ; or on a  $(\lambda U - f)\widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}[U]} = (\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle$  et la suite (6) est exacte à gauche; et puisque  $(\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle$  est fermé dans  $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle$ , on conclut que la suite (6) est exacte.

**1.2.3.** L'algèbre  $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U \rangle / (\lambda U - f) = \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}\left[\frac{f}{\lambda}\right]}$  ne change pas, à isomorphisme près, si l'on change  $f$  en  $f'$  tel que  $|f - f'| \leq |\lambda|$  (*resp.*  $\lambda$  en  $\lambda'$  tel que  $|\lambda| = |\lambda'|$ ), l'isomorphisme étant induit par  $U \mapsto \frac{\lambda}{\lambda'}(U + h)$  où  $h = \lambda^{-1}(f' - f) \in \mathcal{B}_{\leq 1}$ .

## 2. Extensions « kummériennes » de $W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$

**2.1.** Pour tout corps  $p$ -adique  $K$ , on note  $K^o$  l'anneau de valuation et  $K^{oo}$  l'idéal de valuation.

Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ ,  $K_0$  le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt  $W(k)$ . Considérons la tour cyclotomique  $K_\infty = \cup K_j$  avec  $K_j = K_0[\zeta_{p^j}]$ . Le complété  $p$ -adique  $\hat{K}_\infty$  est alors un corps perfectoïde : l'endomorphisme de Frobenius de  $\hat{K}_\infty^o/p$  est surjectif (voir [1, §3.1, 3.2] pour les définitions et résultats de base concernant les corps et algèbres perfectoïdes).

**2.2.** Comme dans l'introduction, posons

$$(7) \quad A := W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$$

et fixons un élément non nul  $g \in A$ .

Posons  $K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]][g^{\frac{1}{p^k}}] := K_j^o[[T_1^{\frac{1}{p^j}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^j}}]][T]/(T^{p^k} - g)$  et

$$(8) \quad A_{jk} = K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]][g^{\frac{1}{p^k}}] \left[ \frac{1}{p} \right].$$

Lorsque  $(j, k)$  varie dans  $\mathbf{N}^2$ , on obtient un double système inductif de  $K_0$ -algèbres, dont les morphismes de transition sont les inclusions naturelles. On permet la valeur  $\infty$  pour l'un des indices (ou les deux), en prenant la réunion indexée par les valeurs finies de cet indice.

**2.3.** On note  $A_{jk}^o$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $A_{jk}$ . Cette  $K_j^o$ -algèbre contient  $K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]][g^{\frac{1}{p^k}}]$  et vérifie  $A_{jk} = A_{jk}^o[\frac{1}{p}]$ . Elle est noethérienne et  $p$ -adiquement complète si  $(j, k) \in \mathbf{N}^2$ . Si  $j = \infty$ , elle est réunion croissante d'algèbres  $A_{j'k'}^o$  qui sont noethériennes, intégralement fermées dans  $A_{j'k'}$ , et finies les unes sur les autres, donc elle est complètement intégralement fermée dans  $A_{\infty k}$  (i.e. tout élément de  $A_{\infty k}$  dont les puissances sont contenues dans un sous- $A_{\infty k}^o$ -module de type fini appartient à  $A_{\infty k}^o$ ). On note  $\hat{A}_{\infty k}^o$  le complété  $p$ -adique de  $A_{\infty k}^o$ .

Pour  $j' \leq j, k' \leq k$ , on a  $A_{j'k'}^o = A_{jk}^o \cap A_{j'k'}$ , et  $A_{00}^o = A$ .

Pour  $j \in \mathbf{N}$ , on a  $A_{j0}^o = K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]]$ . Le système  $(A_{j0}^o)_j$  est à flèches de transition finies et plates, de sorte que  $A_{\infty 0}^o$  est fidèlement plate (en fait libre) sur chaque  $A_{j0}^o$ . D'après le lemme 1.1.1,  $\hat{A}_{\infty 0}^o$  est fidèlement plate sur chaque  $A_{j0}^o$ , donc aussi sur  $A_{\infty 0}^o$ .

On a  $\hat{A}_{\infty 0}^o \cong W(k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]) \hat{\otimes}_{W(k)} \hat{K}_\infty^o$  [1, ex. 3.2.3 (2)] (nous n'en ferons pas usage).



**2.4.** Puisque  $A_{\infty k}^o$  est complètement intégralement fermée dans  $A_{\infty k}$ , et que  $|\mathbf{K}_{\infty}|$  est dense dans  $\mathbf{R}_+$ , il existe une unique norme de  $\mathbf{K}_{\infty}$ -algèbre sur  $A_{\infty k}$  dont  $A_{\infty k}^o$  est la boule unité, et cette norme est spectrale (*i.e.* multiplicative pour les puissances) [1, sorite 2.3.1 (4)]. Si l'on munit les  $A_{jk}$  de la norme (spectrale) induite, la boule unité est  $A_{jk}^o$ , et lorsque  $(j, k)$  varie, les flèches de transition du système  $(A_{jk}^o)$  (les inclusions naturelles) sont isométriques [1, sorite 2.3.1 (2c)].

Les  $A_{j0}$  sont multiplicativement normées, mais ce n'est pas nécessairement le cas de  $A_{jk}$  si  $k \neq 0$ . L'idéal  $A_{\infty 0}^{oo}$  de  $A_{\infty 0}^o$  formé des éléments topologiquement nilpotents est un idéal premier idempotent égal à  $\mathbf{K}_{\infty}^{oo} A_{\infty 0}^o$  [1, 2.2.1, 2.2.2].

**2.5.** La clé de l'étude de  $\hat{A}_{\infty 0}^o$  est son expression en termes de colimite complétée (c'est un cas particulier de [1, cor. 2.9.3]) :

*Lemme 2.5.1.* — Dans le cadre  $(\mathbf{K}_{\infty}^o, \mathbf{K}_{\infty}^{oo})$ , on a un isomorphisme canonique

$$(9) \quad \hat{A}_{\infty 0}^{oa} \xrightarrow{\sim} \widehat{\text{colim}_i A_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle} \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\}^{aa}.$$

Ici  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle$  désigne le complété  $p$ -adique de  $A_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle$  (c'est aussi le complété pour la norme multiplicative de Gauss), et  $\widehat{\text{colim}}$  le complété  $p$ -adique de la colimite [1, §2.6.3]. On a

$$(10) \quad \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle^o = \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle = \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle_{\leq 1}$$

et  $T-g$  est de norme 1. Nous renvoyons à [1, §1] pour un résumé des notions de presque-algèbre utilisées dans la suite (notamment §1.5 pour les changements de cadre).

*Théorème 2.5.2.* — Dans le cadre  $(\mathbf{K}_{\infty}^o, \mathbf{K}_{\infty}^{oo})$ ,  $\hat{A}_{\infty 0}^o$  est presque fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^o$ .

*Démonstration.* — Comme  $\hat{\mathbf{K}}_{\infty}$  est un corps perfectoïde, il existe  $\varpi \in \hat{\mathbf{K}}_{\infty}^o$  tel que  $|p| \leq |\varpi| < 1$  et admettant des racines  $\varpi^{\frac{1}{p^i}} \in \hat{\mathbf{K}}_{\infty}^o$ ; on le fixe, ainsi qu'un élément  $\varpi' \in \mathbf{K}_{\infty}^o$  tel que  $|\varpi| < |\varpi'| < 1$ . Si  $\mathcal{B}$  est une  $\hat{\mathbf{K}}_{\infty}^o$ -algèbre de Banach, on note  $\mathcal{B}^o$  l'anneau de ses éléments de puissances bornées; on a donc  $\mathcal{B}_{\leq 1} \subset \mathcal{B}^o$ , avec égalité si  $\mathcal{B}$  est spectrale [1, 2.2].

Partant de (9) et (10), nous allons tirer parti de ce que  $\hat{A}_{\infty 0}^o$  est une  $\hat{\mathbf{K}}_{\infty}^o$ -algèbre perfectoïde (c'est celle notée  $\hat{A}_{\infty}$  dans [1, ex. 3.2.3 (2)]), donc  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle$  aussi [1, ex. 3.2.3 (1)], et du fait qu'on dispose d'après Scholze d'une description en presque-algèbre des boules unité des localisations d'algèbres perfectoïdes. En effet, selon [22, cor. 6.7 i)], il existe un élément  $f_i \in \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle$ , congru à  $T-g$  modulo  $\varpi'$  et admettant des racines

$f_i^{\frac{1}{p^k}}$  dans  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ , tel que

$$(11) \quad \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\}^o \cong \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{f_i}{\varpi^i} \right\}^o.$$

En outre, selon [22, lemma 6.4], le morphisme canonique  $\widehat{\hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^\infty}} \right]} \rightarrow \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{f_i}{\varpi^i} \right\}^o$  est un presque-isomorphisme :

$$(12) \quad \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{f_i}{\varpi^i} \right\}^{aa} \cong \left( \widehat{\hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^\infty}} \right]} \right)^a$$

où  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^\infty}} \right] := \text{colim}_k \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^k}} \right] \subset \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ . Par ailleurs, le morphisme canonique

$$\widehat{\text{colim}_k \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^k}} \right]} \rightarrow \widehat{\text{colim}_k \left( \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^k}} \right] \right)}$$

est un isomorphisme, comme on le vérifie immédiatement par réduction modulo  $\varpi^n$  pour tout  $n$ . En combinant ceci aux formules (11) (12) et (4), on obtient

$$(13) \quad \begin{aligned} \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\}^{aa} &\cong \widehat{\text{colim}_k \left( \hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left[ \left( \frac{f_i}{\varpi^i} \right)^{\frac{1}{p^k}} \right] \right)}^a \\ &\cong \widehat{\text{colim}_k \left( \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U \rangle / (\varpi^{\frac{i}{p^k}} U - f_i^{\frac{1}{p^k}}) \right)}^a. \end{aligned}$$

Fixons  $(i, k)$ . Comme  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U \rangle / (\varpi^{\frac{i}{p^k}} U - f_i^{\frac{1}{p^k}})$  ne change pas si l'on remplace  $f_i^{\frac{1}{p^k}}$  par tout élément de  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  qui lui est congru modulo  $\varpi^{\frac{i}{p^k}}$ , on peut le remplacer par un  $f_{ik} \in A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle$  pour  $j$  assez grand. On peut aussi remplacer  $\varpi^{\frac{i}{p^k}}$  par un élément  $\varpi_{ik} \in K_{j_0}$  de même norme, de sorte que

$$(14) \quad \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U \rangle / (\varpi^{\frac{i}{p^k}} U - f_i^{\frac{1}{p^k}}) \cong \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik}).$$

Par ailleurs, comme  $\hat{A}_{\infty 0} \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est perfectoïde (spectrale), pour  $j$  assez grand, il existe  $g_k \in A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle$  tel que  $g_k^{\frac{1}{p^k}} \equiv g$  modulo  $\varpi$ . On peut aussi supposer qu'une uniformisante  $\varpi_j$  de  $K_{j_0}$  vérifie

$$(15) \quad |\varpi_j| \geq |\varpi'|^{\frac{1}{p^k}} > |\varpi_{ik}|.$$

Le morphisme canonique

$$(16) \quad \widehat{\text{colim}}_j A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik}) \rightarrow \hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik})$$

est un isomorphisme, comme on le voit aisément par réduction modulo  $\varpi_{ik}^n$  pour tout  $n$ . Enfin, rappelons qu'en vertu de (2) et de ce que  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle = A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle_{\leq 1}$ , on a

$$(17) \quad A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik}) = A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle \left\{ \frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}} \right\}_{\leq 1}.$$

Ceci établi, venons-en à la platitude.

Commençons par l'anneau noethérien  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik})$ . D'après le critère de platitude par fibres sur  $A_{j_0}^o$ , il s'agit de vérifier que

(a)  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle \left\{ \frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}} \right\}$  est plate sur  $A_{j_0}^o$ ; or, le spectre analytique de  $A_{j_0}^o$  est réunion croissante des polydisques affinoïdes de rayons  $r \in |\mathbf{K}_\infty^{oo}|$ , et pour une telle algèbre de Tate  $B_r$ ,  $B_r \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle \left\{ \frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}} \right\}$  est même plate sur  $B_r \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle$  [3, prop. 2.2.4]; et

(b)  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik}, \varpi_j) = A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (f_{ik}, \varpi_j)$  est plate sur  $A_{j_0}^o / \varpi_j$ : or dans  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle$ , on a les congruences  $f_{ik}^{p^k} \equiv f_i \equiv T - g \equiv (T^{p^k} - g_k)^{p^k}$  modulo  $\varpi'$ , d'où  $f_{ik} \equiv T^{p^k} - g_k$  modulo  $\varpi_j$ ; ceci donne  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (f_{ik}, \varpi_j) \cong (A_{j_0}^o / \varpi_j) [T^{\frac{1}{p^j}}, U] / (T^{p^k} - g_k)$ , qui est libre sur  $A_{j_0}^o / \varpi_j$ .

Ainsi  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle \left\{ \frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}} \right\}_{\leq 1}$  est plate sur  $A_{j_0}^o$ . Comme  $A_{j_0}^o$  est locale, le quotient par  $\mathfrak{m}_{A_{j_0}^o}$  de  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik})$  est  $k[T^{\frac{1}{p^j}}, U] / \bar{f}_{ik}$  où  $\bar{f}_{ik}$  est l'image de  $f_{ik}$  dans  $k[T^{\frac{1}{p^j}}]$ , et comme  $\bar{f}_{ik}$  n'est pas inversible dans  $k[T^{\frac{1}{p^j}}]$  puisque  $\bar{f}_{ik}^{p^k} \equiv T - \bar{g}$ , ce quotient est non nul. Donc  $A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle \left\{ \frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}} \right\}_{\leq 1}$  est fidèlement plate sur  $A_{j_0}^o$ .

Dès lors, il en est de même de  $\text{colim}_j A_{j_0}^o \langle T^{\frac{1}{p^j}} \rangle \left\{ \frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}} \right\}_{\leq 1}$  sur  $\text{colim}_j A_{j_0}^o = A_{\infty 0}^o$ , c'est-à-dire sur chaque  $A_{j_0}^o$ . D'après le lemme 1.1.1, la colimite complétée est encore fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^o$ , donc  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U \rangle / (\varpi_{ik} U - f_{ik})$  est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^o$  d'après (14) et (16).

De même, la colimite (en  $k$ ) complétée est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^o$ . Compte tenu de (13), on obtient que  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\}^{oa}$  est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^{oa}$  dans le cadre  $(\mathbf{K}_\infty^o, \mathbf{K}_\infty^{oo})$ , ou ce qui revient au même, dans le cadre  $(A_{\infty 0}^o, A_{\infty 0}^{oo} = \mathbf{K}_\infty^{oo} A_{\infty 0}^o)$  [1, §1.5]. Dans ce dernier cadre, l'adjoint à gauche  $(\ )_{!!}$  du foncteur de localisation  $(\ )^a$  pour les  $A_{\infty 0}^o$ -algèbres respecte la platitude fidèle [8, 3.1.3], donc  $\hat{A}_{\infty 0}^o \langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\}_{!!}^{oa}$  est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^o$ . Ces algèbres forment un système inductif (en  $i$ ). Appliquant derechef le

lemme 1.1.1, on obtient que la colimite complétée est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^{\circ}$ . En vertu de (9), on conclut que  $\hat{A}_{\infty \infty}^{oa}$  est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^{oa}$ .  $\square$

**2.6.** Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la suite, expliquons comment en déduire de la pureté :

*Corollaire 2.6.1.* — Pour tout  $(j, k)$ ,  $A_{j_0}^{\circ} \hookrightarrow A_{j_k}^{\circ}$  est pur.

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que  $A_{\infty \infty}^{\circ}$  est pur sur  $A_{\infty 0}^{\circ}$ , puisque ce dernier est pur sur chaque  $A_{j_0}^{\circ}$ .

Comme les  $A_{j_0}^{\circ}$  sont finis plats les uns sur les autres,  $A_{\infty 0}^{\circ}$  est cohérent [5, I, §2, ex. 12]. Soient alors  $P$  un  $A_{\infty 0}^{\circ}$ -module de présentation finie, et  $N$  un quelconque sous-module de type fini de  $\ker(P \rightarrow P \otimes_{A_{\infty 0}^{\circ}} A_{\infty \infty}^{\circ})$ . Comme  $A_{\infty 0}^{\circ}$  est cohérent,  $N$  est de présentation finie. Comme  $\hat{A}_{\infty \infty}^{\circ}$  est presque fidèlement plat sur  $A_{\infty 0}^{\circ}$  (th. 2.5.2), donc presque pur (cf. §A.4),  $A_{\infty \infty}^{\circ}$  est aussi presque pur sur  $A_{\infty 0}^{\circ}$ , donc  $N$  est presque nul : son annulateur  $\mathfrak{J}$  contient  $K_{\infty}^{oo}$ . Or  $\mathfrak{J}$  est un idéal de présentation finie, donc provient d'un idéal  $\mathfrak{J}_j$  de l'un des  $A_{j_0}^{\circ}$  :  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_j \otimes_{A_{j_0}^{\circ}} A_{\infty 0}^{\circ}$ . Comme  $A_{\infty 0}^{\circ}$  est fidèlement plat sur l'anneau local  $A_{j_0}^{\circ}$ , on conclut par le lemme 1.1.2 (avec  $\mathfrak{k} = A_{\infty 0}^{oo}$  et  $M = A_{j_0}^{\circ}/\mathfrak{J}_j$ ) que  $\mathfrak{J}_j = A_{j_0}^{\circ}$  et que  $N = 0$ . Donc  $P \rightarrow P \otimes_{A_{\infty 0}^{\circ}} A_{\infty \infty}^{\circ}$  est injectif.  $\square$

**2.6.1. Remarques.**

- (1) Le théorème implique que  $\hat{A}_{\infty \infty}$  est fidèlement plat sur  $A_{\infty}$ , donc aussi sur  $A[\frac{1}{p}]$ . En particulier,  $g$  est non-diviseur de zéro dans  $\hat{A}_{\infty \infty}$ .
- (2) Si  $g$  est sans facteur carré (dans l'anneau factoriel  $A[\frac{1}{p}]$ ) et non divisible par les  $T_h$ , les  $A_{j_k}$  et  $A_{j_k}^{\circ}$  sont des anneaux normaux.  
Si  $\pm g$  n'est pas produit d'un monôme en les  $T_h$  et d'une puissance  $p$ -ième dans  $A$ , on peut montrer, en utilisant le lemme de Capelli-Vahlen, que  $A_{j_k}$  est intègre. Si  $\pm g \bmod p$  n'est pas produit d'un monôme en les  $T_h$  et d'une puissance  $p$ -ième dans  $A/p$ , on peut montrer que la norme de  $A_{j_k}$  est multiplicative.
- (3) En général, même sous les hypothèses de (2), il est très difficile de déterminer les anneaux  $A_{j_k}^{\circ}$ , et plus encore leurs propriétés relatives<sup>3</sup> ; voir [18] pour le cas  $j, k \leq 1$  et [26] pour le cas  $j \leq 1, k > 1$ .
- (4) Dans la suite, nous n'aurons besoin du théorème que modulo les puissances de  $p$ , ce qui permet de se dispenser des subtilités sur les complétions et de la réduction finale au cas noethérien.

La méthode est par ailleurs flexible : on peut ramifier plusieurs éléments  $g_{(1)}, \dots, g_{(m)}$  au lieu d'un seul  $g$ , en introduisant autant d'indéterminées  $T_{(1)}, \dots, T_{(m)}$  au lieu de  $T$ . On

<sup>3</sup> il n'est déjà pas facile de déterminer  $Q(A_{j_k})^{\circ}$  à cause de la ramification féroce éventuelle ; cf. [29] pour une approche algorithmique - c'est dans cet article oublié qu'est introduite la terminologie « féroce » (fierce).

peut aussi remplacer  $A$  par un anneau local complet régulier d'inégale caractéristique  $(0, p)$  de corps résiduel parfait, mais éventuellement ramifié (même si l'on n'a plus de corps perfectoïde de base, cf. [1, 3.4.5]).

### 3. Application du lemme d'Abhyankar perfectoïde à la conjecture du facteur direct

**3.1.** Soit  $B$  une extension finie de  $A = W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$ . Comme  $A$  est intégralement fermé dans  $A[\frac{1}{p}]$ ,  $A/p^m \rightarrow B/p^m$  est injectif pour tout  $m \in \mathbf{N}$ . Pour prouver la pureté de  $A \hookrightarrow B$ , on peut supposer  $B$  réduit et sans  $p$ -torsion (on peut en fait supposer  $B$  intègre [13, lemma 3], et même que  $B[\frac{1}{pg}]$  soit une extension galoisienne de  $A[\frac{1}{pg}]$ ). Prenons  $g \in A \setminus pA$  de sorte que  $B[\frac{1}{pg}]$  soit étale sur  $A[\frac{1}{pg}]$ .

La  $\hat{K}_\infty$ -algèbre  $\hat{A}_{\infty\infty}$  est perfectoïde [1, §3.6.2]. Notons  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o$  la  $A_{\infty 0}^o$ -algèbre déduite de  $\hat{A}_{\infty\infty}^o$  par application de la localisation dans le cadre  $(A_{\infty 0}^o, K_{\infty 0}^{oo}A_{\infty 0}^o)$  suivie de son adjoint à gauche, comme ci-dessus. Comme le foncteur  $(\ )_{!!}$  respecte la platitude fidèle, il découle du th. 2.5.2 que  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o$  est fidèlement plate sur  $A_{\infty 0}^o$  donc aussi sur  $A$  (et en particulier est sans  $A$ -torsion). D'après la formule (2.2.26) de [8], c'est la sous-algèbre  $A_{\infty 0}^o + K_{\infty 0}^{oo}\hat{A}_{\infty\infty}^o$  de  $\hat{A}_{\infty\infty}^o$ ; en particulier, elle est stable par multiplication par tout élément de  $(\varpi g)^{\frac{1}{p^\infty}}$ .

**3.2.** Considérons la fermeture intégrale  $\mathcal{B}^o$  de  $\hat{A}_{\infty\infty}^o$  dans la  $\hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$ -algèbre étale finie  $B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$  (galoisienne si l'on veut). Le morphisme canonique  $B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty!!}^o \rightarrow B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$  se factorise à travers un morphisme  $B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty!!}^o \rightarrow \mathcal{B}^o$  (qui devient un isomorphisme après inversion de  $pg$ ).

Voyons  $\hat{A}_{\infty\infty}^o$  et  $\mathcal{B}^o$  comme des  $K_\infty^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$ -algèbres via  $T^{\frac{1}{p^h}} \mapsto g^{\frac{1}{p^h}}$ . Un fragment du lemme d'Abhyankar perfectoïde [1, th. 0.3.1]<sup>4</sup> s'énonce :

**Théorème 3.2.1.** — Dans le cadre  $(K_\infty^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}K_\infty^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , et pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , le morphisme  $\hat{A}_{\infty\infty}^o/p^m \rightarrow \mathcal{B}^o/p^m$  est presque fidèlement plat, donc presque pur.  $\square$

**Corollaire 3.2.2.** — Dans le cadre  $(K_\infty^o + K_\infty^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}K_\infty^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , et pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , le morphisme  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o/p^m \rightarrow (B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty!!}^o)/p^m$  est presque pur.

En effet, l'énoncé du théorème, qui porte sur les  $\hat{A}_{\infty\infty}^o/p^m$ -modules, équivaut à l'énoncé analogue dans le cadre  $(K_\infty^o + K_\infty^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}K_\infty^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$  puisque la presque-nullité y a le même sens; et dans ce cadre-ci,  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o$  est presque isomorphe à  $\hat{A}_{\infty\infty}^o$ . Donc  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o/p^m \rightarrow \mathcal{B}^o/p^m$  y est presque pur, de même que  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o/p^m \rightarrow B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty!!}^o/p^m$  à travers lequel  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o/p^m \rightarrow \mathcal{B}^o/p^m$  se factorise.  $\square$

<sup>4</sup> le cas galoisien suffit.

**3.3.** Fixons provisoirement  $m \geq 2$ , notons avec une barre la réduction modulo  $p^m$  pour alléger, et démontrons que la classe  $e$  de l'extension  $0 \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{B}/\bar{A} \rightarrow 0$  est nulle en combinant les deux théorèmes précédents, suivant une idée de B. Bhatt [4].

Comme  $\widehat{A}_{\infty\infty!!}^o$  est (fidèlement) plat sur  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  de présentation finie sur  $\bar{A}$ , on a

$$\mathrm{Ext}^1(\bar{B}/\bar{A}, \bar{A}) \otimes_{\bar{A}} \widehat{A}_{\infty\infty!!}^o = \mathrm{Ext}^1((\bar{B} \otimes_{\bar{A}} \widehat{A}_{\infty\infty!!}^o) / \widehat{A}_{\infty\infty!!}^o, \widehat{A}_{\infty\infty!!}^o).$$

Le corollaire 3.2.2 joint au lemme A.4.1 implique que  $e \otimes 1$  est annulé par  $g^{\frac{1}{p^\infty}} \mathbf{K}_{\infty}^{oo}$ . Appliquons alors le lemme 1.1.2 avec

$$\mathbf{R} = \bar{A}, \quad \mathbf{M} = \bar{A}e, \quad \mathbf{S} = \widehat{A}_{\infty\infty!!}^o, \quad \mathfrak{K} = g^{\frac{1}{p^\infty}} \mathbf{K}_{\infty}^{oo} \widehat{A}_{\infty\infty!!}^o.$$

On a  $\mathfrak{K} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{S}} = 0$  et  $\mathbf{R} \cap \mathfrak{K} \neq 0$  (il contient la classe de  $pg$ ), et on conclut que  $\mathbf{M} = 0$ , c'est-à-dire  $e = 0$ .

**3.4.** On a donc obtenu l'existence d'une rétraction de  $A/p^m \rightarrow B/p^m$  pour tout  $m$ . Il en est donc de même pour  $A/(p^m, \mathbf{T}_{\leq n}^{p^m}) \rightarrow B/(p^m, \mathbf{T}_{\leq n}^{p^m})$ . Un argument de type Mittag-Leffler dû à Hochster [13, p. 30], basé sur le fait que ces retractions forment un torseur sous un  $A/p^m$ -module artinien, permet de conclure que  $A \rightarrow B$  admet une rétraction.

## 4. Algèbres de Cohen-Macaulay

**4.1. Préliminaires.** — Soient  $\mathbf{B}$  un anneau local noethérien de caractéristique résiduelle  $p$ ,  $\mathfrak{m}_{\mathbf{B}}$  son idéal maximal, et  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$  une suite sécante maximale ( $d = \dim \mathbf{B}$ ). Soit  $\mathbf{C}$  une extension non nécessairement noethérienne de  $\mathbf{B}$ .

*Definition 4.1.1.*

- (1) On dit que  $\mathbf{C}$  est de Cohen-Macaulay pour  $(\mathbf{B}, \underline{x})$  si  $\mathbf{C} \neq \mathfrak{m}_{\mathbf{B}}\mathbf{C}$  et si  $\underline{x}$  devient une suite régulière dans  $\mathbf{C}$ .
- (2) On dit que  $\mathbf{C}$  est une  $\mathbf{B}$ -algèbre de Cohen-Macaulay<sup>5</sup> si elle est de Cohen-Macaulay pour  $(\mathbf{B}, \underline{x})$  pour toute suite sécante maximale  $\underline{x}$ .
- (3) Supposons que  $\mathbf{C}$  contienne une suite compatible de racines  $p^m$ -ièmes d'un élément  $\pi$  non-diviseur de zéro dans  $\mathbf{C}$ . On dit que  $\mathbf{C}$  est presque de Cohen-Macaulay<sup>6</sup> pour  $(\mathbf{B}, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$  si dans le cadre  $(\mathbf{C}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}}\mathbf{C})$ ,  $\mathbf{C}$  n'est pas presque égale à  $\mathfrak{m}_{\mathbf{B}}\mathbf{C}$  (i.e.  $\mathfrak{m}_{\mathbf{B}}\mathbf{C}$  ne contient pas  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$ ) et si  $\underline{x}$  devient presque une suite régulière dans  $\mathbf{C}$  (i.e. pour tout  $i = 0, \dots, d-1$ ,  $((x_1, \dots, x_i)\mathbf{C} : x_{i+1}\mathbf{C}) / (x_1, \dots, x_i)\mathbf{C}$  est annulé par  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$ ).

<sup>5</sup> "big Cohen-Macaulay algebra" ou "balanced big Cohen-Macaulay algebra" dans la littérature anglo-saxonne.

<sup>6</sup> cette notion a été étudiée par divers auteurs à la suite de P. Roberts, mais seulement dans un cadre de presque-algèbre valuatif, typiquement  $\pi = p$ ; or la situation que nous considérerons,  $\pi = \varpi g$ , ne rentre pas dans ce cadre.

On « passe » de (1) à (2) en complétant  $C$   $\mathfrak{m}_B$ -adiquement [2, th. 1.7], et de (3) à (1) grâce à la technique des modifications partielles de Hochster [15], qui peut se résumer comme suit. Une *modification partielle de degré  $n$*  d'un  $B$ -module  $M$  relatif à  $(B, \underline{x})$  est un homomorphisme  $M \rightarrow M'$ , où, étant donnée une relation  $x_{i+1}m_{i+1} = \sum_1^i x_j m_j$  à coefficients dans  $M$ ,  $M' := M[T_1, \dots, T_i]_{\leq n} / (m_{i+1} - \sum_1^i x_j T_j) \cdot M[T_1, \dots, T_i]_{\leq n-1}$ .

**Proposition 4.1.2.** — *Soit  $B$  un anneau local noethérien de caractéristique résiduelle  $p$ . Si  $B$  admet une algèbre presque de Cohen-Macaulay  $D$  pour  $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$  (pour une suite sécante maximale  $\underline{x}$  de  $B$  et une suite de racines  $\pi^{\frac{1}{p^m}}$  d'un non-diviseur de zéro dans  $D$ ), alors  $B$  admet une algèbre de Cohen-Macaulay  $C$ .*

*Démonstration.* — [15] Considérons une suite finie  $\underline{M} = (M_1 := B \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_\ell)$  de modifications partielles de degré  $n$  relatives à  $(B, \underline{x})$ . Le lemme crucial [15, 5.1] (où l'on prend  $c = \pi^{\frac{1}{p^m}}$  pour  $m$  arbitraire) permet de construire pas à pas, partant de  $M_1 = B \rightarrow D$  et d'un entier  $n$  arbitrairement grand, un diagramme commutatif de  $B$ -modules :

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 M_2 & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & & \pi^{-\frac{1}{p^i}} D, \\
 & \nearrow & \\
 M_\ell & & 
 \end{array}$$

Comme  $\mathfrak{m}_B D$  ne contient pas  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$ , on a donc  $M_\ell \neq \mathfrak{m}_B M_\ell$ . Lorsque  $(n, \ell, \underline{M})$  varie, la colimite (filtrante) des  $M_\ell$  est alors une algèbre de Cohen-Macaulay pour  $(B, \underline{x})$  (à travers laquelle  $B \rightarrow D$  se factorise). Passant au complété  $\mathfrak{m}_B$ - adique, on obtient une  $B$ -algèbre de Cohen-Macaulay pour  $B$ .  $\square$

Voici un moyen commode pour construire des algèbres presque de Cohen-Macaulay. Soient  $B, \underline{x}, D$  comme au début du §4.1, et supposons que  $D$  contienne une suite compatible de racines  $p^m$ -ièmes d'un élément  $\pi$  non-diviseur de zéro.

**Lemme 4.1.3.** — *Supposons que les  $x_i$  soient contenus dans un sous-anneau  $A \subset B$ , local de Cohen-Macaulay, tel que  $B$  soit un  $A$ -module fini. Alors  $D$  est presque de Cohen-Macaulay pour  $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$  si et seulement si elle l'est pour  $(A, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$ . C'est le cas si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a)  $(\pi) \cap A \neq 0$  et  $D$  est presque isomorphe, dans le cadre  $(A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}], \pi^{\frac{1}{p^\infty}} A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , à une  $A$ -algèbre fidèlement plate (ne contenant pas nécessairement  $B$ ).

(b)  $(\pi) \cap A \not\subset x_1 A$ ,  $D$  est sans  $x_1$ -torsion, et  $D/x_1 D$  est presque isomorphe, dans le cadre  $(A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}], \pi^{\frac{1}{p^\infty}} A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , à une  $A/x_1 A$ -algèbre fidèlement plate.

*Démonstration.* — Comme  $\mathfrak{m}_A B$  est  $\mathfrak{m}_B$ -primaire,  $D$  n'est pas presque égale à  $\mathfrak{m}_B D$  si et seulement si elle n'est pas presque égale à  $\mathfrak{m}_A D$ , d'où la première assertion. C'est le cas si  $D$  (resp.  $D/x_1 D$ ) est presque isomorphe à une  $A$ -algèbre (resp.  $A/x_1 A$ -algèbre) fidèlement plate  $D'$  car sous les hypothèses en vigueur, l'image de  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$  dans  $D'$  ne peut être contenu dans  $\mathfrak{m}_A D'$  en vertu du lemme 1.1.2 (avec  $R = A$ ,  $S = D'$ , resp.  $A/x_1 A$ ,  $S = D'/x_1 D'$ , et  $M = A/\mathfrak{m}_A$ ).

Par ailleurs,  $((x_1, \dots, x_i)A : x_{i+1}A)/(x_1, \dots, x_i)A = 0$  puisque  $A$  est de Cohen-Macaulay, et par platitude  $((x_1, \dots, x_i)D' : x_{i+1}D')/(x_1, \dots, x_i)D' = 0$ , donc  $((x_1, \dots, x_i)D : x_{i+1}D)/(x_1, \dots, x_i)D$  est annulé par  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$ . On conclut de même dans le cas (b), remplaçant  $A$  par son quotient de Cohen-Macaulay  $A/x_1 A$  et  $(x_1, \dots, x_i)$  par  $(x_2, \dots, x_i)$ .  $\square$

**4.2. Preuve du théorème 0.7.1.** — Après les travaux de Hochster et al., on peut se limiter, et on se limitera, au cas où  $B$  est d'inégale caractéristique  $(0, p)$ . On peut compléter, puis quotienter par le nilradical, ce qui nous ramène au cas où  $B$  est local complet réduit sans  $p$ -torsion et de caractéristique résiduelle  $p$ . Soient  $n + 1$  sa dimension,  $k$  son corps résiduel et  $\Lambda \subset W(k^{\frac{1}{p^\infty}})$  son anneau de coefficients. Il est loisible de remplacer  $B$  par l'extension (fidèlement plate)  $B \hat{\otimes}_\Lambda W(k^{\frac{1}{p^\infty}})$ , et donc  $\Lambda$  par  $W(k^{\frac{1}{p^\infty}})$ . Le choix d'une suite sécante maximale  $\underline{x}$  de  $B$  avec  $x_1 = p^2$  permet d'écrire  $B$  comme extension finie de  $A := \Lambda[[T_1, \dots, T_n]]$ , où  $T_i$  s'envoie sur  $x_{i+1}$ , ce qui nous place dans la situation du §3.1.

Soit  $g \in A \setminus pA$  tel que  $B[\frac{1}{pg}]$  soit étale sur  $A[\frac{1}{pg}]$ . Avec les notations de 3.2, prenons

$$(18) \quad D := \mathcal{B}^o, \quad \pi^{\frac{1}{p^m}} := (\varpi g)^{\frac{1}{p^m}}$$

(non-diviseur de zéro dans  $D$ ). Alors  $(\pi) \cap A = pgA \not\subset p^2 A$ , la  $\hat{A}_{\infty\infty!!}^o$ -algèbre  $D$  est sans  $p$ -torsion, et  $D/p^2 D$  est presque isomorphe, dans le cadre  $(\hat{A}_{\infty\infty!!}^o, (\varpi g)^{\frac{1}{p^\infty}} \hat{A}_{\infty\infty!!}^o)$ , à  $(D/p^2 D)_{!!}^a$  qui est fidèlement plate sur  $A/p^2 A$  par les th. 2.5.2 et 3.2.1. On conclut du lemme 4.1.3 que  $D$  est presque de Cohen-Macaulay pour  $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$ . Par la prop. 4.1.2, il existe donc une  $B$ -algèbre de Cohen-Macaulay.  $\square$

**4.2.1. Remarque.** — Toute  $B$ -algèbre de Cohen-Macaulay  $C$  est une  $A$ -algèbre de Cohen-Macaulay. Comme  $A$  est régulier,  $C$  est fidèlement plate sur  $A$  [17, 1.2.d].<sup>7</sup>

<sup>7</sup> rappelons l'argument pour la platitude. Tout  $A$ -module de type fini  $M$  est de dimension projective  $\leq n + 1$ , donc  $\text{Tor}_i^A(M, C) = 0$  pour tout  $i > n + 1$ . On procède par récurrence descendante sur  $i > 0$  : par dévissage, on peut supposer



**4.3. Preuve du théorème 0.7.2.** — Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $R$ ,  $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$  est un anneau local régulier complet, donc excellent, de sorte que le normalisé de  $S \otimes_R \hat{R}_{\mathfrak{m}}$  est un produit fini d'anneaux locaux complets intègres  $S_{\mathfrak{m},i}$  finis sur  $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ . D'après le th. 0.7.1 (et [17] en égale caractéristique), il existe une  $S_{\mathfrak{m},i}$ -algèbre de Cohen-Macaulay  $T_{\mathfrak{m},i}$ . D'après la remarque précédente,  $T_{\mathfrak{m},i}$  est fidèlement plat sur  $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ , donc plat sur  $R$ , et comme  $R$  est noethérien,  $T := \prod_{\mathfrak{m},i} T_{\mathfrak{m},i}$  est encore plat sur  $R$ ; et c'est une  $S$ -algèbre qui vérifie  $\mathfrak{m}T \neq T$ .  $\square$

**4.4. Problème de «fonctorialité faible» des algèbres de Cohen-Macaulay.** — Il s'agit du problème suivant (qui contrôle tout l'écheveau des conjectures homologiques, en inégale caractéristique) : *tout homomorphisme local  $B \xrightarrow{\beta} B'$  d'anneaux locaux complets intègres de caractéristique  $(0, p)$  s'inscrit-il dans un carré commutatif*

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\gamma} & C' \end{array}$$

où  $C$  et  $C'$  sont de Cohen-Macaulay pour  $B$  et  $B'$  respectivement ?

Dans cette direction, on a la proposition suivante qui se démontre par la même technique de modifications partielles que la prop. 4.1.2 (cf. [15]).

**Proposition 4.4.1.** — *Soit  $\underline{x}$  (resp.  $\underline{x}'$ ) une suite sécante maximale pour  $B$  (resp.  $B'$ ). On suppose que  $\beta$  s'inscrit dans un carré commutatif*

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \xrightarrow{\delta} & D' \end{array}$$

où  $D$  (resp.  $D'$ ) est presque de Cohen-Macaulay pour  $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^{\infty}}})$  (resp.  $(B', \underline{x}', \pi'^{\frac{1}{p^{\infty}}})$ ), et  $\delta(\pi^{\frac{1}{p^m}})$  divise  $\pi'^{\frac{1}{p^m}}$ . Alors  $\beta$  s'inscrit aussi dans un carré commutatif (19) comme ci-dessus.

Si l'on cherche à construire  $\delta$  par la méthode du §4.2, trois problèmes surgissent :

(1) *Passage à des corps résiduels parfaits.* — L'extension des scalaires  $B \hat{\otimes}_{\Lambda} W(k^{\frac{1}{p^{\infty}}})$  n'est pas (faiblement) fonctorielle en  $(B, k)$ . Ce problème disparaît si l'extension des corps résiduels  $k \rightarrow k'$  est séparable. Dans ce cas, l'image d'un anneau de coefficients  $\Lambda$  pour  $B$  est contenu

---

$M = A/\mathfrak{P}$  pour  $\mathfrak{P}$  premier. Si  $(x_1, \dots, x_i)$  est une suite régulière maximale contenue dans  $\mathfrak{P}$ ,  $M$  se plonge dans  $N := A/A(x_1, \dots, x_i)$ . Or  $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, C) = 0$  puisque  $C$  est une  $A$ -algèbre de Cohen-Macaulay. La suite exacte  $\mathrm{Tor}_{i+1}^{\Lambda}(N/M, C) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, C) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, C)$  est donc à termes nuls.

dans un anneau de coefficients de  $B'$  ([20, 29.5. et 29.6]), et on peut alors remplacer  $k$  et  $k'$  par leurs clôtures parfaites.

(2) *Construction de  $A \rightarrow A'$ .* — La méthode du §4.2 suggère d'inscrire  $\beta$  dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array}$$

où  $A$  et  $A'$  sont locaux complets réguliers non ramifiés (de corps résiduels respectifs  $k$  et  $k'$ ) et les flèches verticales sont des monomorphismes finis. C'est impossible en général, comme le montre l'exemple de  $B := \mathbf{Z}_p[[T]] \rightarrow B' := \mathbf{Z}_p[[T, U]]/(T^2 - TU + p) = \mathbf{Z}_p[[T, \frac{U}{T}]]$  : aucun paramètre de  $B/p$  ne s'envoie sur un paramètre de  $B'/p = \mathbf{F}_p[[T, U]]/T(T - U)$ . Toutefois, compte tenu de la remarque 2.6.1 (4), il n'est pas nécessaire de supposer  $A'$  non ramifié, donc le problème disparaît si  $B'$  est *régulier*.

(3) *Condition  $\delta(\varpi g)^{\frac{1}{p^m}} \mid (\varpi g')^{\frac{1}{p^m}}$ .* — Pour la remplir, il suffit de multiplier  $g'$  par  $\delta(g)$  dès lors que  $\beta(g)$  est non-diviseur de zéro dans  $D'$ , mais cette condition pose problème : par exemple, on a  $\beta(g) = 0$  dès que l'image de  $\text{Spec}B'[\frac{1}{p}] \rightarrow \text{Spec}B[\frac{1}{p}]$  est contenue dans le lieu singulier de  $\text{Spec}B[\frac{1}{p}]$ .

Supposons  $\beta$  injectif,  $k \rightarrow k'$  séparable, et  $B'$  régulier, ce qui résout les trois problèmes à la fois. En suivant 4.2, on construit alors  $A_\infty$ ,  $A'_\infty$  et  $\hat{A}_{\infty\infty}$ , la fermeture intégrale  $D$  de  $\hat{A}_{\infty\infty}^o$  dans  $B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$ , puis  $D' := g^{-\frac{1}{p^\infty}} \hat{A}'_\infty \langle \zeta_{p^\infty}, g^{\frac{1}{p^\infty}}, T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o$ , qui est intégralement fermé dans  $D'[\frac{1}{p}]$  car  $D'[\frac{1}{p}]$  est perfectoïde sur  $\hat{K}_\infty$ , cf. [1, 4.2.3]. Compte tenu de la remarque 2.6.1 (4),  $D'/p^2$  est presque isomorphe à une algèbre fidèlement plate sur  $B'/p^2$ , et on obtient alors le carré cherché (20), puis (19) grâce à la prop. 4.4.1.

En conclusion, *le problème de fonctorialité faible a une réponse positive si  $\beta$  est injectif,  $k \rightarrow k'$  séparable, et  $B'$  régulier*. Par un argument connu (cf. [17, 2.3], en notant que l'hypothèse de pureté se conserve par complétion et passage aux corps résiduels parfaits en vertu du lemme A.2.2 ci-dessous), on en déduit :

**Théorème 4.4.2.** — *Soit  $B \hookrightarrow B'$  une extension pure d'anneaux locaux noethériens de caractéristique  $(0, p)$ . On suppose  $B'$  régulier et l'extension des corps résiduels séparable. Alors  $B$  est un anneau de Cohen-Macaulay.  $\square$*

## Remerciements

Ma vive reconnaissance va à Luisa Fiorot, qui m'a fait connaître la conjecture du facteur direct fin 2012, et m'a expliqué son importance dans la problématique de la descente.

## Annexe A: Pureté

Comme la conjecture du facteur direct est un énoncé de pureté (au sens d'injectivité universelle), nous rassemblons ici quelques résultats concernant cette notion.

### A.1 Sous-modules purs et modules générateurs

Soient  $R$  un anneau commutatif unitaire,  $N$  un  $R$ -module. On dit qu'un sous-module  $M \subset N$  est *pur* si pour tout  $R$ -module  $P$ ,  $P \otimes_R M \rightarrow P \otimes_R N$  est injectif. Comme tout module est colimite filtrante de modules de présentation finie, on peut se borner aux modules  $P$  de présentation finie. Le résultat suivant est dû à D. Lazard.

#### Lemme A.1.1.

- (1)  $M \subset N$  est pur si et seulement si pour tout module de présentation finie  $P$ ,  $\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N/M)$  est surjectif.
- (2) En particulier, si  $N/M$  est de présentation finie,  $M \subset N$  est pur si et seulement si  $M$  est facteur direct de  $N$ .
- (3) En général,  $M \hookrightarrow N$  est pur si et seulement si il est colimite filtrante de monomorphismes scindés de  $R$ -modules.
- (4) Si  $M \subset N$  est pur, alors pour tout  $R$ -module  $P$  et tout  $i \geq 0$ ,  $\text{Tor}_i^R(P, M) \rightarrow \text{Tor}_i^R(P, N)$  est injectif.
- (5) Si  $N$  est plat, alors  $M$  est un sous-module pur de  $N$  si et seulement si  $N/M$  est plat.
- (6) Si  $S$  est une  $R$ -algèbre (commutative), tout morphisme pur de  $S$ -modules est pur en tant que morphisme de  $R$ -modules.  $\square$

Voir [19, I.2] (et noter que (4), qui ne figure pas dans *loc. cit.*, découle de (3) car les colimites filtrantes commutent aux  $\text{Tor}$  par exactitude).

Un  $R$ -module  $M$  est *générateur* si tout  $R$ -module  $N$  est engendré par les images des applications  $R$ -linéaires de  $M$  dans  $N$ .

*Lemme A.1.2* [6, §5, n. 2, Th. 1]. —  $M$  est générateur si et seulement si  $R$  est facteur direct d'une puissance  $M^n$  (en particulier  $M$  est fidèle).  $\square$

### A.2 Extensions pures d'anneaux

On dit qu'un (mono)morphisme d'anneaux  $R \hookrightarrow S$  est *pur* (ou encore que la  $R$ -algèbre (fidèle)  $S$  est *pure*) si  $R$  est un sous- $R$ -module pur de  $S$  : autrement dit, pour tout  $R$ -module (de présentation finie)  $P$ ,  $P \rightarrow P \otimes_R S$  est injectif. En passant par l'algèbre symétrique sur  $P$ , on voit  $R \hookrightarrow S$  est pur si et seulement si il est *universellement injectif* en tant que morphisme d'anneaux, *i.e.*  $R' \rightarrow S \otimes_R R'$  est injectif pour toute  $R$ -algèbre  $R'$  (et on peut se limiter aux  $R'$  de présentation finie puisque toute  $R$ -algèbre est colimite filtrante de telles algèbres).

**Lemme A.2.1.**

- (1) *Les monomorphismes purs sont stables par composition, produit, changement de base, et colimite filtrante. En outre, si un composé  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$  est pur, il en est de même de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ .*
- (2) *Si un composé  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$  est plat, et  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$  est pur, alors  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$  est plat.*
- (3)  *$\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  est pur si et seulement si le foncteur de changement de base  $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbf{S}}$  est fidèle. En particulier,  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  est fidèlement plat si et seulement si il est pur et plat.*
- (4) *Supposons que  $\mathbf{S}$  soit de présentation finie en tant que  $\mathbf{R}$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
  - (a)  *$\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  est pur,*
  - (b)  *$\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  est scindé, i.e. admet une rétraction  $\mathbf{R}$ -linéaire,*
  - (c)  *$\mathbf{S}$  est un  $\mathbf{R}$ -module générateur.*

Le point (1) est formel, cf. [24, prop 1.2].

(2) Si  $\mathbf{M}$  est un sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{T}}$  est injectif (par platitude de  $\mathbf{T}$  sur  $\mathbf{R}$ ), et comme  $\mathbf{M}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{T}}$  l'est aussi (par pureté de  $\mathbf{T}$  sur  $\mathbf{S}$ ), il en est de même de  $\mathbf{M}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{S}}$ .

(3) Soit  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$  un morphisme dans  $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$  qui devient nul après changement de base, de sorte que le composé  $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{S}}$  est nul. Si  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$  est pur,  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{S}}$  est injectif, donc  $f$  est nul. Réciproquement, soit  $\mathbf{P}$  un  $\mathbf{R}$  module et  $\mathbf{N}$  le noyau de  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$ . Par  $\mathbf{S}$ -linéarité  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$  est nul. Si le changement de base est fidèle,  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{P}$  est donc nul, de sorte que  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$  est injectif.

Les implications (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c) de (4) découlent en effet directement des lemmes précédents, et (b)  $\Rightarrow$  (a) est banale. Pour (c)  $\Rightarrow$  (b), noter que pour tout couple  $(s, \check{s}) \in \mathbf{S} \times \mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  tel que  $\check{s}(s) = 1_{\mathbf{R}}$ , la composition de la multiplication par  $s$  dans  $\mathbf{S}$  et de  $\check{s}$  est une rétraction de  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$ .  $\square$

**Lemme A.2.2.** — *Soit  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$  un homomorphisme local pur d'anneaux noethériens locaux. Alors l'homomorphisme  $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \hat{\mathbf{S}}$  entre complétés est pur.*

Soit  $\hat{\mathbf{S}}^{\mathbf{R}}$  le complété  $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}\mathbf{S}$ -adique de  $\mathbf{S}$ . C'est un anneau local noethérien de complété  $\hat{\mathbf{S}}$ , ce qui ramène à montrer la pureté de  $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \hat{\mathbf{S}}^{\mathbf{R}}$ . Soit  $\mathbf{P}$  est un  $\mathbf{R}$ -module de type fini. Par pureté de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ , l'homomorphisme  $\lim \mathbf{P}/\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}^n \mathbf{P} \rightarrow \lim \mathbf{P}_{\mathbf{S}}/(\mathfrak{m}_{\mathbf{R}})^n \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$  est injectif, et en vertu du théorème de Krull, s'identifie à  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{R}}} \rightarrow \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{S}}^{\mathbf{R}}}$ .  $\square$

### A.3 Un critère de pureté de Hochster

Voici une variante de [14, 6.3 et 6.1 (2 $\Rightarrow$  5)].

**Proposition A.3.1.** — *Soient  $\mathbf{R}$  un anneau local (non nécessairement noethérien) d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et  $r$  un élément de  $\mathfrak{m}$  tel que  $\mathbf{R}$  soit  $r$ -adiquement séparé.*

*Soit  $\sigma$  un endomorphisme local de  $\mathbf{R}$  tel que  $\mathbf{R}$  soit libre sur  $\sigma(\mathbf{R})$  et que  $\bigcap_m (\sigma^m(\mathfrak{m}).\mathbf{R})$  soit contenu dans  $r\mathbf{R}$ . Soit enfin  $\mathbf{S}$  une extension de  $\mathbf{R}$  telle que  $\sigma$  se prolonge en un endomorphisme injectif de  $\mathbf{S}$ .*

*Considérons les conditions*

- (a)  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  est pur,
- (b)  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  est scindé,
- (c) Le dual  $\mathbf{S}^\vee := \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  est non nul.

On a les implications  $(c) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (a)$ . En outre  $(a) \Rightarrow (b)$  si  $\mathbf{R}$  est (noethérien) régulier et  $\mathbf{S}$  entier sur  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* — L'implication  $(b) \Rightarrow (a) + (c)$  est triviale.

Prouvons  $(c) \Rightarrow (b)$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{S}^\vee \setminus \{0\}$ . Comme  $\mathbf{R}$  est  $r$ -adiquement séparé, on peut, en divisant  $\lambda$  par une puissance convenable de  $r$ , supposer qu'il existe  $s \in \mathbf{S}$  tel que  $\lambda(s) \notin r\mathbf{R}$ ; quitte à précomposer  $\lambda$  avec la multiplication par  $s$ , on peut même supposer  $\lambda(1) \notin r\mathbf{R}$ . Il existe alors  $m$  tel que  $\lambda(1) \notin \sigma^m(\mathfrak{m})\mathbf{R}$ . Comme  $\mathbf{R}$  est libre sur  $\sigma^m\mathbf{R}$  (qui est un anneau local d'idéal maximal  $\sigma^m(\mathfrak{m})$ ), il existe un facteur direct (libre) de type fini  $\mathbf{M}$  tel que  $\lambda(1) \in \mathbf{M} \setminus \sigma^m(\mathfrak{m})\mathbf{M}$ , et on peut donc trouver d'après Nakayama une forme  $\sigma^m\mathbf{R}$ -linéaire  $\mu$  sur  $\mathbf{N}$  qui envoie  $\lambda(1)$  sur 1, qu'on prolonge à  $\mathbf{R}$  par 0 sur un supplémentaire de  $\mathbf{M}$ . La restriction à  $\sigma^m\mathbf{S}$  de  $\mu\lambda$  est alors une rétraction  $\sigma^m\mathbf{R}$ -linéaire de  $\sigma^m\mathbf{S}$  sur  $\sigma^m\mathbf{R}$ . Par transport de structure via  $\sigma^m$ , on obtient une rétraction  $\mathbf{R}$ -linéaire de  $\mathbf{S}$  sur  $\mathbf{R}$ .

Prouvons ensuite  $(a) \Rightarrow (c)$  si  $\mathbf{R}$  est régulier et  $\mathbf{S}$  entier sur  $\mathbf{R}$ .  $\mathbf{S}$  est alors colimite filtrante de sous- $\mathbf{R}$ -algèbres finies  $\mathbf{S}_\alpha$  qui sont pures. Si  $d$  est la dimension de Krull de  $\mathbf{R}$ , le groupe de cohomologie locale  $\mathbf{H}_m^d(\mathbf{R})$  est non nul, et s'injecte dans  $\mathbf{H}_m^d(\mathbf{S}_\alpha)$  puisque  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}_\alpha$  est scindé. Par passage à la colimite,  $\mathbf{H}_m^d(\mathbf{S})$  est non nul. Soit alors  $\mathbf{E}$  l'enveloppe injective du corps résiduel de  $\mathbf{R}$ . Par dualité locale,  $\mathbf{H}_m^d(\mathbf{S})$  s'identifie à  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}^\vee, \mathbf{E})$ , donc  $\mathbf{S}^\vee$  est non nul.  $\square$

*Applications* — L'implication  $(c) \Rightarrow (b)$  fournit une preuve très courte de la conjecture du facteur direct en caractéristique  $p > 0$  [14, 6.2], en prenant  $r = 0$  et  $\sigma$  égal à l'endomorphisme de Frobenius, qui est plat si  $\mathbf{R}$  est régulier, et fini si  $\mathbf{R}$  est local complet de corps résiduel parfait (cas auquel on se ramène).

Par ailleurs, soit  $\mathbf{R} := \mathbf{V}[[\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n]]$  (où  $\mathbf{V}$  est un anneau de valuation discrète quelconque d'uniformisante  $r$ , ou un corps), et soit  $\sigma$  l'endomorphisme  $\sigma$  de  $\mathbf{R}$  qui élève chaque  $\mathbf{T}_i$  à une puissance fixée  $> 1$  quelconque. Alors  $\mathbf{R}$  est libre sur  $\sigma(\mathbf{R})$  et  $\bigcap (\sigma^m(\mathfrak{m})\mathbf{R}) = r\mathbf{R}$ , et  $\sigma$  s'étend en un endomorphisme injectif de la fermeture intégrale  $\mathbf{R}^+$  de  $\mathbf{R}$  dans une clôture algébrique du corps de fractions. D'après la conjecture du facteur direct,  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}^+$  est pur, et l'implication  $(a) \Rightarrow (b)$  de la proposition entraîne alors que  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}^+$  admet une rétraction  $\mathbf{R}$ -linéaire.

A.4 *Presque-pureté*

Soit  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2)$  un cadre tel que  $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{m}$  soit plat sur  $\mathfrak{A}$ . Soient  $R$  une  $\mathfrak{A}$ -algèbre, et  $N$  un  $R$ -module. L'adjoint à gauche  $(\ )_! = \tilde{\mathfrak{m}} \otimes (\ )_*$  de la localisation  $(\ )^a$  est exact et commute à  $\otimes$  [8, 2.2.24, 2.4.35].

On dit qu'un homomorphisme  $M \rightarrow N$  de  $R$ -modules est *presque pur* si pour tout  $R$ -module  $P$ ,  $P \otimes_R M \rightarrow P \otimes_R N$  est presque injectif (ici encore, il suffit de tester sur les modules  $P$  de présentation finie). Cela équivaut à dire que  $M_!^a \subset N_!^a$  est pur. Si  $M'$  est un module intermédiaire (avec  $M' \rightarrow M$  presque injectif),  $M \rightarrow M'$  est encore presque pur.

*Lemme A.4.1.* — *Si  $M \subset N$  est presque pur, alors pour tout  $R$ -module de présentation finie  $P$ ,  $\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N/M)$  est presque surjectif. En particulier, si  $N/M$  est de présentation finie sur l'anneau  $R$  (au sens usuel),  $M$  est alors presque facteur direct de  $N$ , et donc la classe de  $N$  dans le  $R$ -module  $\text{Ext}^1(N/M, M)$  est presque nulle.*

*Démonstration.* — D'après le lemme A.1.1 (1),  $M \subset N$  est presque pur si et seulement si pour tout  $R$ -module de présentation finie  $P$ ,  $\text{Hom}_R(P, N_!^a) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N_!^a/M_!^a)$  est surjectif, donc  $\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N/M)$  est presque surjectif. Si  $N/M$  est de présentation finie, on peut prendre  $P = N/M$ , d'où l'existence, pour tout  $\eta \in \mathfrak{m}$ , d'un élément  $f \in \text{Hom}_R(N/M, N)$  dont la projection dans  $\text{End}_R(N/M)$  est  $\eta \cdot \text{id}$ .  $\square$

Un homomorphisme de  $\mathfrak{A}$ -algèbres  $R \rightarrow S$  est *presque pur* s'il l'est en tant qu'homomorphisme de  $R$ -modules. Cela équivaut à dire que  $R_{!!}^a \rightarrow S_{!!}^a$  est pur (le point est que l'adjoint à gauche  $(\ )_{!!}$  de la localisation des  $\mathfrak{A}$ -algèbres commute à  $\otimes$ , et qu'un homomorphisme  $\phi$  de  $\mathfrak{A}$ -algèbres est presque injectif si et seulement si  $\phi_{!!}^a$  est injectif, cf. [8, 3.1.3 (ii), 3.4.2]). Si un composé  $R \rightarrow S \rightarrow T$  est presque pur, il en est de même de  $R \rightarrow S$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. ANDRÉ, Le lemme d'Abhyankar perfectoïde, *Publ. Math. IHES* (2016), [10.1007/s10240-017-0096-x](https://doi.org/10.1007/s10240-017-0096-x), ce volume.
- [2] J. BARTIJN and J. STROOKER, Modifications minimales, in *Sém. d'algèbre de Paris*, Lecture Notes in Math., vol. 1029, pp. 192–217 1983.
- [3] V. BERKOVICH, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Math. Surveys and Monographs, vol. 33, AMS, Providence, 1990.
- [4] B. BHATT, Almost direct summands, *Nagoya Math. J.*, **214** (2014), 195–204.
- [5] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, chapitres 1 à 7*, Masson, Paris, 1985.
- [6] N. BOURBAKI, *Algèbre, chapitre 8, nouvelle éd.*, Springer, Berlin, 2012.
- [7] T. BRIDGELAND and S. IYENGAR, A criterion for regular local rings, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.*, **342** (2006), 723–726.
- [8] O. GABBER and L. RAMERO, *Almost Ring Theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1800, Springer, Berlin, 2003.
- [9] D. DOBBS, On purity and related universal properties of extensions of commutative rings, *Tamkang J. Math.*, **41** (2010), 253–259.
- [10] S. DUTTA, On the canonical element conjecture, *Trans. Am. Math. Soc.*, **299** (1987), 803–811.
- [11] E. EVANS and P. GRIFFITH, The syzygy problem, *Ann. Math.*, **114** (1981), 323–333.
- [12] R. HEITMANN, The direct summand conjecture in dimension three, *Ann. Math.*, **156** (2002), 695–712.

- [13] M. HOCHSTER, Contracted ideals from integral extensions of regular rings, *Nagoya Math. J.*, **51** (1973), 25–43.
- [14] M. HOCHSTER, Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture, *J. Algebra*, **84** (1983), 503–553.
- [15] M. HOCHSTER, Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann’s theorem, *J. Algebra*, **254** (2002), 395–408.
- [16] M. HOCHSTER, Homological conjectures, old and new, *Ill. J. Math.*, **51** (2007), 151–169.
- [17] M. HOCHSTER and C. HUNEKE, Applications of the existence of big Cohen-Macaulay algebras, *Adv. Math.*, **113** (1995), 45–117.
- [18] J. KOH, Degree  $p$  extensions of an unramified regular local ring of mixed characteristic  $p$ , *J. Algebra*, **99** (1986), 310–323.
- [19] D. LAZARD, Autour de la platitude, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **97** (1969), 81–128.
- [20] H. MATSUMURA, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [21] T. MIHARA, On Tate acyclicity and uniformity of Berkovich spectra and adic spectra, *Isr. J. Math.*, **216** (2016), 61–105.
- [22] P. SCHOLZE, Perfectoid spaces, *Publ. Math. IHÉS*, **116** (2012), 245–313.
- [23] T. OHI, Direct summand conjecture and descent for flatness, *Proc. Am. Math. Soc.*, **124** (1996), 1967–1968.
- [24] J.-P. OLIVIER, Descente par morphismes purs, *C. R. Math. Acad. Sci.*, **271** (1970), 821–823.
- [25] C. PESKINE and L. SZPIRO, Dimension projective finie et cohomologie locale, *Publ. Math. IHÉS*, **42** (1973), 323–395.
- [26] N. RANGANATHAN, Splitting in module-finite extension rings and the vanishing conjecture for maps of Tor, Ph.D. Thesis, University Michigan, 2000.
- [27] M. RAYNAUD and L. GRUSON, Critères de platitude et de projectivité, *Invent. Math.*, **13** (1971), 1–89.
- [28] K. SHIMOMOTO, An application of the almost purity theorem to the homological conjectures, *J. Pure Appl. Algebra*, **220** (2014), 621–632.
- [29] S. WILLIAMSON, Ramification theory for extensions of degree  $p$ , *Nagoya Math. J.*, **41** (1971), 149–168.
- [30] A. YEKUTIELI, Flatness and completion revisited, *Algebr. Represent. Theory* (2016), [10.1007/s10468-017-9735-7](https://doi.org/10.1007/s10468-017-9735-7).

Institut de Mathématiques de Jussieu,  
4 place Jussieu,  
75005 Paris, France  
[yves.andre@imj-prg.fr](mailto:yves.andre@imj-prg.fr)

*Manuscrit reçu le 28 août 2016*  
*Manuscrit accepté le 20 novembre 2017*  
*publié en ligne le 7 décembre 2017.*