Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Bruno Colbois

Spectre conforme et métriques extrémales

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), p. 93-101
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2003-2004__22__93_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **22** (2004) 93–101

SPECTRE CONFORME ET MÉTRIQUES EXTRÉMALES

Bruno COLBOIS

Résumé

Dans cette note, on résume deux articles écrits en collaboration avec A. El Soufi, et qui donnent des résultats qualitatifs sur le spectre du laplacien dans une classe conforme de métriques riemanniennes de volume fixé. La nouveauté par rapport aux deux articles est que l'on a tenté ici de dégager un certain nombre de questions se posant naturellement à la suite de ces travaux.

Soit M une variété compacte, connexe de dimension $n \geqslant 2$. À chaque métrique riemannienne g, on peut associer le laplacien $\Delta = -\operatorname{div}\operatorname{grad}$ et son spectre que l'on note

$$\operatorname{Spec}(g) = \{0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) \leqslant \lambda_2(g) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k(g) \leqslant \cdots\}.$$

Une question classique est de considérer la k-ième valeur propre comme une fonctionnelle

$$g \longrightarrow \lambda_k(g)$$

sur l'espace des métriques riemanniennes. On cherche alors les métriques critiques ou extrémales pour cette fonctionnelle.

On sait par ailleurs que $\lambda_k(c^2 g) = \frac{1}{c^2}\lambda_k(g)$ pour toute constante $c > 0$: ainsi pour que la question ci-dessus ait un sens, il convient d'imposer une normalisation. On le fait en imposant des conditions sur la géométrie, par exemple en terme de courbure, diamètre ou volume. Dans le cadre de cette note, on imposera comme première restriction de fixer le volume. Cela peut se dire de deux manières. Soit on ne considère que des métriques riemanniennes g de volume 1, soit on remplace la fonctionnelle $g \to \lambda_k(g)$ par la fonctionnelle $g \to \lambda_k(g)\operatorname{Vol}(g)^{2/n}$ qui est invariante par homothétie de la métrique. À la section 1, on examinera quelques propriétés de la fonctionnelle $\lambda_k(g)\operatorname{Vol}(g)^{2/n}$ sous cette condition. Dans un deuxième temps (section 2), une restriction supplémentaire sera exigée : on ne considérera que des métriques riemanniennes g' conformes à une

2000 Mathematics Subject Classification : 58J50, 58E11, 35P15.

métrique riemannienne donnée g, c'est-à-dire de la forme $g' = f^2 g$, avec $f > 0$, fonction de classe C^∞ sur M, et on introduira le concept de spectre conforme. Enfin, on terminera par une remarque dans le cas du laplacien agissant sur les formes différentielles.

1. Métriques extrémales.

Une première question est de savoir si, à volume 1, il existe une métrique sur M avec des valeurs propres aussi grandes ou aussi petites que désiré.

En fait, seul le premier point est intéressant. En effet, un entier k et un réel $\epsilon > 0$ étant donnés, il est facile de construire une métrique g de volume 1 sur M avec $\lambda_k(g) < \epsilon$. Pour cela, on part de n'importe quelle métrique riemannienne g_0 sur M, et on la déforme au voisinage d'un point en une haltère de Cheeger multiple (avec $k + 1$ parties épaisses reliées par des parties minces).

La question de construire des grandes valeurs propres à volume 1 s'est par contre beaucoup développée. Il convient ici de distinguer le cas de la dimension 2 et de la dimension supérieure à 2.

Métriques extrémales en dimension 2. Historiquement, J. Hersch est le premier à avoir montré que pour la sphère S^2, on avait la relation

$$\lambda_1(g)\,\mathrm{Vol}(g) \leqslant 8\pi$$

avec $8\pi = \lambda_1(g_{\mathrm{can}})\,\mathrm{Vol}(g_{\mathrm{can}})$, où g_{can} désigne la métrique à courbure constante sur la sphère. De plus, le cas d'égalité caractérise la métrique à courbure constante, voir [H].

À la suite de cela, Yang et Yau ont démontré (voir [YY]) que pour une surface orientable de genre γ, alors

$$\lambda_1(g) \leqslant 8\pi[\frac{\gamma+3}{2}],$$

où [ ] désigne la partie entière. Ce résultat a été généralisé au cas non orientable par Li et Yau, [LY].

Cependant, la borne n'est en général pas optimale, et rechercher de telles bornes optimales est une question très difficile.

Dans le cas du tore, Nadirashvili a démontré que la borne optimale était $\frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$ et que le cas d'égalité caractérisait le tore plat équilatéral, voir [N1].

On a une borne optimale pour l'espace projectif, alors que dans le cas de la bouteille de Klein, la question reste ouverte (voir la conjecture 1.5.1 dans le récent article [JNP] sur la question).

Dans tous les autres cas, la question d'une inégalité optimale (ainsi que le savoir si le suprémum est ou non atteint) est ouverte.

Une question intéressante dans ce contexte porte sur les surfaces orientables de genre $\geqslant 2$: on peut alors se restreindre aux métriques à courbure constante -1 : là non plus, on ne sait pas en général s'il y a une inégalité optimale, ni si on peut caractériser le cas d'égalité.

Pour conclure avec la dimension 2, signalons enfin que N. Korevaar a généralisé les inégalités ci-dessus dans [K] : il existe une constante universelle $C > 0$ telle que pour tout $k > 0$ et pour une surface M de genre γ, on ait

$$\lambda_k(g) \leqslant C(\gamma + 1)k$$

pour toute métrique riemannienne g sur M.

Le cas de la dimension $n \geqslant 3$. La situation diffère de manière drastique dans ce cas par rapport à celui des surfaces. En effet, on a démontré dans [CD] que pour toute variété compacte M de dimension $n \geqslant 3$, alors

$$\sup\{\lambda_1(g)\,\mathrm{Vol}(g)^{2/n}\} = \infty$$

où le suprémum est pris sur toutes les métriques riemanniennes de M.

On peut décrire en quelques mots la manière de construire sur toute variété compacte M de dimension $n \geqslant 3$ une famille de métriques riemannienne de volume 1 et à première valeur propre $\lambda_1(g)$ arbitrairement grande, car l'idée de cette construction est sous-jacente à toutes les constructions.

Le point fondamental est que le résultat est connu dans le cas où M est la sphère S^n. Il est démontré par une estimation directe dans le cas de la dimension impaire en utilisant la structure de S^1-fibré et la variation canonique de la métrique (voir [B]), puis en adaptant cette méthode en dimension paire ([M]).

On considère une métrique riemannienne g_0 sur S^n avec $\mathrm{Vol}(g_0) = 1$ et $\lambda_1(g_0) \geqslant C$ où C est une constante que l'on peut choisir arbitrairement grande. On excise de S^n une petite boule B de rayon η et on forme la somme connexe de S^n et de M. On obtient une variété difféomorphe à M. Une autre façon intuitive de présenter la chose est de dire que l'on déforme une petite boule de M en la sphère (S^n, g_0) privée d'une petite boule B.

On se retrouve donc avec une métrique sur M telle qu'il existe une sous-variété à bord Ω de M naturellement identifiée avec $S^n - B$. On considère alors la métrique g_1 sur M dont la restriction à Ω est g_0 et qui est petite ailleurs. Avec cette nouvelle métrique, M ressemble à (S^n, g_0). On montre alors que le spectre de M se rapproche de celui de (S^n, g_0) lors de cette opération : pour le faire rigoureusement, on utilise des résultats de [A] et de [CV].

Comme conséquence de ce résultat, il est naturel d'imposer des contraintes supplémentaires : certains l'on fait en imposant une structure symplectique ou complexe (voir [BLY], [P]).

Dans un travail avec A. El Soufi [CE1], nous avons imposé à la métrique de ne varier que dans une classe conforme de métriques.

2. Le spectre conforme.

Le résultat suivant est dû à N. Korevaar [K].

THEORÈME 1. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* n. *Alors, il existe une constante* $C = C(g) > 0$ *telle que pour tout entier* k *on ait*

$$\sup\left\{\lambda_k(g')\,\mathrm{Vol}(g')^{2/n}\right\} \leqslant C(g)k^{2/n}$$

où g' *décrit l'ensemble des métriques riemanniennes conformes à la métrique* g.

Notons que pour $k = 1$, le résultat était déjà connu, avec des constantes liées au volume conforme ([LY],[EI1], [EI2]).

Le théorème ci-dessus nous permet de définir le "spectre conforme" , c'est-à-dire qu'à une variété riemannienne compacte donnée (M, g), on va associer le suprémum des k-ième valeurs propres pour toutes les métriques de volume 1 sur M conformes à g.

DÉFINITION 2. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte. Alors la* k*-ième valeur propre conforme de* $(M, [g])$ *est*

$$\lambda_k^c(M, [g]) = \sup_{g' \in [g]} \lambda_k(g') = \sup\left\{\lambda_k(g')\,\mathrm{Vol}(g')^{2/n} \mid g' \text{ est conforme à } g\right\}.$$

La suite $\left\{\lambda_k^c(M, [g])\right\}$ *constitue le spectre conforme de* $(M, [g])$.

De manière générale, on a très peu d'informations quantitatives sur le spectre conforme des variétés. Il n'est en général pas possible de le calculer. Les seules exceptions sont, à ma connaissance, contenues dans le travail de El Soufi et Ilias [EI2] dont on peut déduire la première valeur propre conforme des espace symétriques compacts de rang 1 :

- $\lambda_1^c(\mathbb{S}^n, [g_s]) = n\omega_n^{2/n}$, où ω_n est le volume de la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1,
- $\lambda_1^c(\mathbb{R}P^n, [g_s]) = 2^{\frac{n-2}{n}}(n+1)\omega_n^{2/n}$,
- $\lambda_1^c(\mathbb{C}P^d, [g_s]) = 4\pi(d+1)d!^{-1/d}$,
- $\lambda_1^c(\mathbb{H}P^d, [g_s]) = 8\pi(d+1)(2d+1)!^{-1/2d}$,
- $\lambda_1^c(\mathbb{C}aP^2, [g_s]) = 48\pi(\frac{6}{11!})^{1/8} = 8\pi\sqrt{6}(\frac{9}{385})^{1/8}$.

Dans la suite, on présente quelques résultats qualitatifs sur le spectre conforme, ainsi que quelques questions se posant naturellement. Les preuves se trouvent dans [CE1] et [CE2].

Comme premier résultat, on montre que l'on peut comparer le spectre conforme de n'importe quelle classe de métrique $[g]$ sur n'importe quelle variété compacte M au spectre conforme de la sphère standard, et qu'en fait, le spectre conforme de la sphère est toujours le plus petit :

THEORÈME 3. — *Soit M une variété compacte de dimension n, $[g]$ une classe conforme de métriques sur M, et $k \geqslant 0$ un entier. Alors*

$$\lambda_k^c(M,[g]) \geqslant \lambda_k^c(\mathbb{S}^n,[g_s]),$$

où g_s désigne la métrique canonique de la sphère.

Ce résultat était déjà connu lorsque $k = 1$ ([FN]).

Le deuxième résultat dit que deux valeurs propres consécutives du spectre conforme ne sont non seulement jamais égales, mais qu'elles diffèrent toujours par une fonction de la première valeur propre conforme de la sphère ronde.

THEORÈME 4. — *Soit M une variété compacte de dimension n, $[g]$ une classe conforme de métriques sur M, et $k \geqslant 0$ un entier. Alors*

$$\lambda_{k+1}^c(M,[g])^{n/2} - \lambda_k^c(M,[g])^{n/2} \geqslant \lambda_1^c(\mathbb{S}^n,[g_s]) = n^{n/2}\omega_n,$$

où ω_n désigne le volume de la sphère canonique de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$.

Ce théorème possède plusieurs corollaires intéressants. Tout d'abord, il donne une minoration de $\lambda_k^c(M,[g])$ en fonction de k et de la dimension n de la variété considérée, et avec le résultat de N. Korevaar, on obtient finalement

COROLLAIRE 5. — *Soit M une variété compacte de dimension n, $[g]$ une classe conforme de métriques sur M, et $k \geqslant 0$ un entier. Alors*

$$n\omega_n^{2/n}k^{2/n} \leqslant \lambda_k^c(M,[g]) \leqslant C([g])k^{2/n}.$$

Une question importante est de savoir quelles métriques sont susceptibles d'être des maxima dans leur classe conforme. Le corollaire précédent permet d'assurer que si g est une métrique de volume 1 sur M qui est telle que $\lambda_k(g) < n\omega_n^{2/n}k^{2/n}$, alors g n'est pas maximale dans $[g]$. Cela permet par exemple de répondre à une question de Yau sur le spectre de la sphère usuelle $\mathbb{S}^2$ (voir [Y] p. 686) :

COROLLAIRE 6. — *Pour tout entier $k \geqslant 2$, la métrique standard g_s de volume 1 sur la sphère $\mathbb{S}^2$ n'est pas un maximum parmi les métriques de volume 1. (On utile ici que pour la sphère de dimension 2, toute métrique est conforme à la métrique standard).*

On a un résultat semblable pour la métrique canonique de dimension 3, mais nous ne sommes pas parvenus à faire des calculs suffisamment précis pour pouvoir affirmer la même chose pour la métrique canonique de la sphère en toute dimension et pour tout entier $k \geqslant 2$.

Question 1 : Peut-on montrer que pour tout $k > 1$, la valeur propre $\lambda_k(S^n, g_s)$ ne maximise pas dans sa classe conforme $[g_s]$ de volume constant ?

Enfin, un résultat de El Soufi et Ilias [EI3] montre que si une métrique est critique pour la fonctionnelle λ_k dans sa classe conforme, alors la multiplicité de $\lambda_k(g)$ est au moins 2. On en déduit

COROLLAIRE 7. — *Une métrique riemannienne g ne peut pas maximiser simultanément deux valeurs propres consécutives dans sa classe conforme* $[g]$.

Les preuves détaillées des théorèmes et corollaires qui précèdent figurent dans [CE1]. L'idée générale de la preuve repose sur deux faits :

Fait 1 : Il est bien connu qu'une variété riemannienne ressemble, localement, à l'espace euclidien. La différence apparaît à l'ordre 2, et est contrôlée par la courbure. Lorsque l'on regarde les choses d'un point de vue conforme, une petite boule euclidienne est conforme à une boule euclidienne quelconque, elle-même conforme à la sphère canonique privée d'un voisinage d'un point. Ainsi, localement, on peut dire que tout variété riemannienne est presque conforme à n'importe quelle métrique conforme à la métrique canonique de la sphère privée d'un voisinage d'un point.

Ce fait explique pourquoi la classe conforme $[g_s]$ de la métrique canonique de la sphère est présente dans tous les énoncés.

Fait 2 : En général, lorsqu'une famille de variétés riemanniennes compactes converge au sens de Gromov-Hausdorff vers une variété limite, compacte elle aussi, on perd le contrôle du spectre, c'est-à-dire que le spectre ne converge pas vers le spectre de la limite. Cependant, pour certaines déformations extrêmement particulières, des résultats existent permettant d'assurer que la limite du spectre est le spectre de la limite : c'est par exemple le cas lorsque l'on multiplie une métrique g par ϵ sur une partie fixée de la variété M et qu'on laisse tendre ϵ vers 0. On trouve ces résultats dans [A], [CV] et [T]. Notons qu'une telle déformation est conforme.

À l'aide de ces deux faits, l'idée consiste alors à déformer localement les variétés desquelles on part pour les faire ressembler à des sphères.

Dans le cas du théorème 1, on déforme la variété de sorte à ce qu'elle ressemble de plus en plus à la sphère munie d'une métrique g de $[g_s]$ telle que $\lambda_k(g)$ approche $\lambda_k^c(\mathbb{S}^n, [g_s])$. Dans le cas du théorème 2, la métrique converge vers la somme connexe de la variété M munie d'une métrique g telle que $\lambda_k(g)$ approche $\lambda_k^c(M, [g])$ et d'une sphère.

Cette approche, ainsi que les résultats obtenus, amènent quelques questions naturelles :

Question 2 : Soit (M, g) telle que $\lambda_k^c(M, [g]) = \lambda_k^c(\mathbb{S}^n, [g_s])$. Est-ce que M est une sphère et est-ce que g est dans la classe conforme de g_s ?

Question 3 : On a le sentiment que dès que l'on cherche à maximiser λ_k dans sa classe conforme pour $k \geqslant 2$, des métrique singulières apparaissent naturellement. Aussi peut-on demander s'il existe un exemple de métrique régulière avec λ_k extrémale, pour un

$k \geqslant 2$. Par ailleurs, Nadirashvili a montré [N2] que pour la sphère de dimension 2, le maximum de λ_2 était atteint par une métrique critique correspondant à la somme connexe en un point de deux sphères rondes de volume moitié. Peut-on démontrer la même chose dans d'autres cas ?

Question 4 : A. El Soufi et S. Ilias ont montré que le fait d'être critique impliquait la présence de multiplicité. Pourrait-on généraliser ce résultat dans un certain sens lorsque les points critiques sont liés à des métriques singulières ?

3. Le cas des formes différentielles.

Les questions qui se posent dans le cadre des fonctions se posent naturellement pour les formes différentielles, à partir de la dimension 3, puisqu'en dimension 2, le spectre des formes différentielles est déterminé par celui des fonctions.

Concernant la construction de grandes valeurs propres, le résultat de [CD] à été généralisé comme suit par Gentile-Pagliara dans le cas des formes différentielles, voir [GP] : Soit M une variété compacte de dimension $n \geqslant 4$ et p compris entre 2 et $n-2$. Si $\lambda_{1,p}$ désigne la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-De Rham sur les p-formes différentielles, on a

$$\sup\{\lambda_{1,p}(g)\} = \infty$$

où le suprémum est pris sur toutes les métriques riemanniennes de volume 1 sur M.

Le résultat principal contenu dans [CE2] dit que le même résultat est vrai si on se restreint aux métriques de volume 1 conformes à une métrique donnée sur M. Ainsi, le spectre conforme tel que défini pour les fonctions ne présente pas d'intérêt pour les p-formes différentielles, $2 \leqslant p \leqslant n-2$.

Le cas des 1-formes différentielles est particulier. On a

Question 5 : On peut définir comme pour les fonctions un spectre conforme pour les 1-formes différentielles que l'on notera $\{\lambda^c_{k,1}(g)\}_{k=1}^{\infty}$. Existe-t-il comme pour les fonctions une constante $C = C(n,k)$ indépendante de g telle que

$$\lambda^c_{k,1}(g) \geqslant C(n,k)$$

avec $\lim_{k\to\infty} C(n,k) = \infty$?

La difficulté vient du fait qu'au voisinage de métriques extrémales pour les fonctions, on ne maîtrise pas le comportement des 1-formes différentielles.

Question 6 : Avec les notations de la question 5 : peut-on estimer l'écart $\lambda^c_{k+1,1}(g) - \lambda^c_{k,1}(g)$?

Par contre, autant il est facile de construire des petites valeurs propres dans toute classe conforme et à volume constant dans le cas des fonctions, autant cela n'est pas évident, du moins à ma connaissance, dans le cas des formes différentielles :

Question 7 : Soit (M, g) un variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 4$. Soit $2 \leqslant p \leqslant n-2$. Désignons par $\lambda_{1,p}(g')$ la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-De Rham agissant sur les p-formes différentielles.

Est-ce que

$$\inf \left\{\lambda_{1,p}(g') \operatorname{Vol}(g')^{2/n} \mid g' \text{ est conforme à } g\right\} = 0\,?$$

On peut aussi poser la question pour les valeurs propres suivantes en cas de réponse positive.

Il faut noter que les exemples connus de petites valeurs propres pour les formes différentielles sont obtenus grâce à des métriques qui s'effondrent, ce qui est dans un sens à l'opposé d'une déformation conforme.

Références

[A] Anné C., *Spectre du laplacien et écrasement d'anses*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **20** (1987), 271–280.

[B] Bleecker D., *The Spectrum of a Riemannian manifold with a unit Killing vector field*, Trans. Amer. Math. Soc., **275** (1983), 409–416.

[BLY] Bourguignon J-P., Li P., Yau S-T., *Upper bound for the first eigenvalue of algebraic submanifolds*, Comm. Math. Helv., **69** (1994), 199–207.

[CD] Colbois B., Dodziuk J., *Riemannian metrics with large* λ_1, Proc. Am. Math. Soc., **122-3** (1994), 905–906.

[CE1] Colbois B., El Soufi A., *Extremal Eigenvalues of the Laplacian in a Conformal Class of Metrics, The "Conformal Spectrum"*, Annals of Global Analysis and Geometry, **24**, (2003), 337–349.

[CE2] Colbois B., El Soufi A., *Eigenvalues of the Laplacian acting on p-forms and metric conformal deformations*, à paraître à Proc. Am. Math. Soc.

[CV] Colin de Verdière Y., *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien*, Comment. Math. Helvetici, **61** (1986), 254–270.

[EI1] El Soufi A., Ilias S., *Le volume conforme et ses applications d'après Li et Yau*, Sémin. Théor. Spectrale Géom., Institut Fourier, année 1983-1984, N°VII, (1984).

[EI2] El Soufi A., Ilias S., *Immersion minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme*, Math. Ann., **275** (1986), 257–267.

[EI3] El Soufi A., Ilias S., *Extremal metrics for the* λ_1 *functional in a conformal class*, Proc. Am. Math. Soc., **131**-5(2003), 1611–1618.

[FN] Friedlander L., Nadirashvili N., *A differential invariant related to the first eigenvalue of the Laplacian*, Int. Math. Res. Not., **17**, (1999), 939–952.

[GP] Gentile G., Pagliara V., *Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p*, Proc. Am. Math. Soc., **123**-12 (1995), 3855–3858.

[H] Hersch J., *Quatre propriétés isopérimétriques des membranes sphériques homogènes*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **270** (1970), 1645–1648.

[JNP] Jakobson D., Nadirashvili N., Polterovich I., *Extremal Metric for the First Eigenvalue on a Klein Bottle*, Preprint 2003.

[K] Korevaar N., *Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics*. J. Differ. Geom., **37**-1 (1993), 73–93.

[LY] Li P., Yau S.T., *A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math., **69**, (1982), 269–291.

[M] MUTO H., *The first eigenvalue of the Laplacian on even dimensional spheres*, Tohoku Math. J., **32** (1980), 427–432.

[N1] NADIRASHVILI N., *Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces*, GAFA, **6** (1996), 877–897.

[N2] NADIRASHVILI N., *Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere*, J. Differential Geom., **61** (2002), 335–340.

[P] POLTEROVICH L., *Symplectic aspects of the first eigenvalue*, J. Reine Angew. Math., **502** (1998), ?–17.

[T] TAKAHASHI J., *Collapsing of connected sums and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Geom. Phys., **40**, 201–208. (2002)

[Y] YAU S.T., *Problem section. Seminar in differential geometry*, Ann. Math. Stud., **102** (1982), 669–706.

[YY] YANG P., YAU S.T., *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **7** (1980), 55–63.

Bruno COLBOIS
Université de Neuchâtel
Laboratoire de Mathématiques
13 rue E. Argand
2007 NEUCHÂTEL (Suisse)

`Bruno.Colbois@unine.ch`