Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GUILLAUME LUPO-KREBS
HERVÉ PAJOT

Dimensions conformes, espaces Gromov-hyperboliques et ensembles autosimilaires

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), p. 153-182
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2003-2004__22__153_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **22** (2004) 153–182

DIMENSIONS CONFORMES, ESPACES GROMOV-HYPERBOLIQUES ET ENSEMBLES AUTOSIMILAIRES

Guillaume LUPO-KREBS et Hervé PAJOT

Table des matières

Résumé

Le but de ces notes est de décrire des outils d'analyse géométrique (inégalités de Poincaré, espaces de Sobolev, modules de familles de courbes, espaces tangents faibles) qui sont utiles pour estimer la dimension conforme d'un espace métrique. Nous mettrons en pratique ensuite ces outils dans le cas des bords des espaces hyperboliques, en particulier les immeubles fuchsiens et les groupes hyperboliques (avec une discussion sur la conjecture de Cannon en théorie géométrique des groupes), et le tapis de Sierpinski. La plupart de ces progrès très récents sont dus à Keith-Laakso et Bonk-Kleiner. Ces notes (en particulier le paragraphe concernant le tapis de Sierpinski) s'inspirent du rapport de stage de l'ENS Lyon du premier auteur (sous la direction du deuxième auteur).

2000 Mathematics Subject Classification : 30C65, 51E24.

1. Applications quasi-conformes dans les espaces métriques à géométrie bornée

Étant donné un homéomorphisme croissant $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, un homéomorphisme $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est dit η-quasi-symétrique si, pour tout choix de x_1, x_2 et x_3 dans X, et tout $t > 0$,

$$d_X(x_1, x_2) \leqslant t\, d_X(x_1, x_3) \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \eta(t) d_Y(f(x_1), f(x_3)).$$

L'homéomorphisme $f : X \to Y$ est dit quasi-symétrique s'il est η-quasi-symétrique pour un certain homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Les homéomorphismes quasi-symétriques ont été beaucoup étudiés dans le cas des espaces euclidiens (voir [35] par exemple), mais aussi dans le cadre des variétés riemanniennes ou des groupes de Carnot (Voir [18] et [24]).Très récemment, J. Heinonen et P. Koskela [19] ont exhibé une large classe d'espaces métriques pour lesquels un grand nombre de propriétés des homéomorphismes quasi-symétriques de $\mathbb{R}^n$ restaient vraies. Nous allons commencer par décrire ces espaces, appelés espaces de Loewner. Notons enfin que les homéomorphismes quasi-symétriques jouent un rôle important dans certaines démonstrations de résultats de rigidité de type Mostow pour les espaces symétriques (voir [29], [31]). Le point-clé est que, par exemple dans le cas d'un espace hyperbolique quaternionien X, toute quasi-isométrie $F : X \to X$ s'étend sur la sphère à l'infini ∂X de X en un homéomorphisme quasi-symétrique $f : \partial X \to \partial X$ et que réciproquement tout homéomorphisme quasi-symétrique sur le bord de X provient d'une quasi-isométrie de X. Or, ∂X peut être muni d'une structure de groupe de Carnot. Une motivation pour développer une théorie quasi-conforme dans les espaces à géométrie bornée était d'essayer d'adapter les arguments de Mostow ou Pansu dans des espaces plus singuliers que les espaces symétriques (voir par exemple [8] pour le cas des immeubles hyperboliques et [9] pour un survol des techniques quasi-conformes dans l'étude de la rigidité de Mostow). Nous reviendrons là-dessus plus loin.

Soit (X, d_X, μ_X) un espace métrique mesuré. Nous supposerons dans cette partie que pour toute boule (ouverte) $B \subset X$, $0 < \mu_X(B) < +\infty$ et que tout couple de points de X peut être joint par une courbe rectifiable (c'est-à-dire de longueur finie).

Nous aurons besoin de la définition suivante. La mesure μ_X sur X est Ahlfors-régulière de dimension Q s'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que pour tout $x \in X$, tout $R \in]0, \operatorname{diam} X[$,

$$C^{-1} R^Q \leqslant \mu_X(B(x, R)) \leqslant C R^Q.$$

Dans ce cas, Q est la dimension de Hausdorff de (X, d_X) et la mesure de Hausdorff (de dimension Q) de (X, d_X) est bilipschitz équivalente à μ_X. Par exemple, la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ est Ahlfors-régulière de dimension n. Rappelons les définitions des mesures et dimension de Hausdorff pour un espace métrique (E, d). Pour tout $s > 0$, tout $A \subset E$, la mesure de Hausdorff (de dimension s) de A est définie par

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf \Big\{ \sum_{i \in I} (\operatorname{diam} A_i)^s ; \operatorname{diam} A_i < \delta, A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \Big\} \right).$$

La dimension de Hausdorff de A, notée $\mathrm{Hdim}(A)$, est alors $\mathrm{Hdim}(A) = \inf\{s, H^s(A) = 0\}$ (ou de façon équivalente $\mathrm{Hdim}(A) = \sup\{s, H^s(A) = +\infty\}$). La mesure naturelle sur l'espace métrique (E, d) est la mesure de Hausdorff correspondant à sa dimension de Hausdorff. Nous dirons qu'un espace métrique est Ahlfors-régulier (de dimension Q) si sa mesure de Hausdorff (de dimension Q) est Ahlfors-régulière.

Soit $p \geqslant 1$. On dit que X supporte une inégalité de Poincaré $(1, p)$ s'il existe une constante absolue $C_0 > 0$ telle que

$$\frac{1}{\mu_X(B)} \int_B |u - u_B| d\mu_X \leqslant C_0 \operatorname{diam} B \left(\frac{1}{\mu_X(B)} \int_B \rho^p d\mu_X \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout choix de

- B boule (ouverte) de X,
- $u : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée dans B,
- $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ gradient supérieur de u dans B,

et où u_B est la moyenne de u sur B. Rappelons que $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est un gradient supérieur de u dans B si pour tout $x \in B$, tout $y \in B$, toute courbe rectifiable γ dans B joignant x à y, nous avons $|u(x) - u(y)| \leqslant \int_\gamma \rho$. Par exemple, si $X = \mathbb{R}^n$ et si u est lisse, $|\nabla u|$ est un gradient supérieur de u. De plus, si ρ est un autre gradient supérieur de u, alors $|\nabla u| \leqslant \rho$ presque partout. Remarquons aussi que d'après l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Poincaré $(1, 1)$ est la plus forte, au sens où elle entraîne les autres.

Soit Γ une famille de courbes dans X et soit $p \geqslant 1$. Nous définissons le p-module conforme de Γ (que l'on note $\mathrm{Mod}_p(\Gamma)$) par $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = \inf_\rho \int_X \rho^p d\mu_X$ où l'inf est pris sur toutes les fonctions mesurables positives $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ telles que $\inf_\gamma \int_\gamma \rho ds \geqslant 1$ pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$. Une telle fonction ρ est dite admissible pour la famille de courbes Γ. Si E et F sont deux continua non réduits à un point, notons $\Gamma(E, F)$ l'ensemble des courbes de X joignant E à F et posons $\mathrm{Mod}_p(E, F) = \mathrm{Mod}_p(\Gamma(E, F))$. Si nous supposons que μ_X est Ahlfors-régulière de dimension $Q > 1$, alors nous avons un contrôle du module Mod_Q par dessus. Ainsi, si $0 < 2r < R$, $E \subset \overline{B(x, r)}$ et $F \subset X \setminus B(x, R)$, alors $\mathrm{Mod}_Q(E, F) \leqslant C \left(\log \frac{R}{r}\right)^{1-Q}$. Un espace de Loewner est un espace métrique pour lequel nous avons aussi un contrôle par dessous du Q-module. De manière plus précise, nous dirons que X est un espace de Loewner (de dimension Q) s'il est Ahlfors-régulier (de dimension Q) et s'il existe un homéomorphisme croissant $\phi :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ tel que, pour tout couple de continua disjoints (et non réduits à un point) E et F de X, $\mathrm{Mod}_Q(E, F) \geqslant \phi(\Delta(E, F))$ où $\Delta(E, F) = \frac{d_X(E, F)}{\min(\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F)}$ est la distance relative entre E et F.

Notons que nous pouvons aussi définir la p-capacité du condenseur (E, F) (où E et F sont deux sous-ensembles quelconques de X) par

$$\mathrm{Cap}_p(E, F) = \inf \int_X \rho^p d\mu_X$$

où l'inf est pris sur tous les gradients supérieurs ρ de toutes les fonctions $u : X \to \mathbb{R}$ qui satisfont $u \leqslant 0$ sur E et $u \geqslant 1$ sur F. En fait, $\mathrm{Cap}_p(E, F) = \mathrm{Mod}_p(E, F)$ où, comme ci-dessus, $\mathrm{Mod}_p(E, F) = \mathrm{Mod}_p(\Gamma(E, F))$, et $\Gamma(E, F)$ est la famille des courbes joignant E et F.

Toutes ces notions ont été introduites par J. Heinonen et P. Koskela dans [19] où ils démontrent une caractérisation des espaces de Loewner en termes d'inégalités de Poincaré.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X un espace propre, Ahlfors-régulier de dimension $Q > 1$. Alors, X est un espace de Loewner (de dimension Q) si et seulement si X supporte une inégalité de Poincaré* $(1, Q)$.

Ainsi, les espaces euclidiens, les variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci strictement positive et à croissance du volume maximale (c'est-à-dire telles que le volume Riemannien μ vérifie, pour tout $x \in M$, tout $r \in]0, \mathrm{diam}\, M[$, $\mu(B(x, r)) \geqslant C^{-1} r^n$ où n est la dimension de la variété M), les groupes de Carnot (munis de leur métrique de Carnot-Carathéodory) sont des espaces de Loewner (voir plus loin pour une discussion plus précise). Notons que pour les espaces euclidiens et les groupes de Carnot, la propriété de Loewner peut être démontrée sans passer par l'inégalité de Poincaré (voir [26] et [16] respectivement). En fait, l'existence d'inégalités de Poincaré (et donc la propriété d'être un espace de Loewner) est liée à l'existence de "bonnes" courbes. En effet, une méthode géométrique pour démontrer une inégalité de Poincaré est d'exhiber, pour tout couple de points de l'espace, un "pinceau" de courbes joignant ces points (voir la discussion plus loin sur les bords d'immeubles hyperboliques). D'un autre côté, tout espace métrique mesuré (X, d_X, μ_X) qui est complet, dont la mesure μ_X est doublante, et qui vérifie une inégalité de Poincaré $(1, p)$ (pour un $p > 1$) est quasi-convexe, c'est-à-dire qu'il existe $C_0 \geqslant 1$ tel que pour tout couple de points x et y de X, il existe une courbe rectifiable γ d'extrémités x et y avec $l(\gamma) \leqslant C_0 d_X(x, y)$ (voir par exemple l'appendice de [12] pour une démonstration). Rappelons qu'une mesure μ_X sur l'espace métrique X est doublante s'il existe une constante $C_0 \geqslant 1$ telle que, pour tout $x \in X$, tout $R > 0$, $\mu_X(B(x, 2R)) \leqslant C_0 \mu_X(B(x, R))$. En particulier, si μ_X est Ahlfors-régulière, elle est doublante. Il est important de noter qu'il existe des espaces de Loewner Ahlfors-réguliers de dimension Q avec Q non entier (voir [7] et [25]).

Nous allons maintenant énoncer un théorème qui donne diverses caractérisations des homéomorphismes quasi-symétriques dans le cadre des espaces de Loewner. Ces caractérisations sont maintenant classiques dans le cas euclidien (voir [35]).

THÉORÈME 1.2. — *Soient X et Y deux espaces de Loewner de dimension* $Q > 1$ *et soit $f : X \to X$ un homéomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est η-quasi-symétrique ;*

(ii) *f est H-quasi-conforme ;*

(iii) *$f \in N^{1,Q}(X : Y)$ et il existe $K \geqslant 0$ telle que* $\mathrm{Lip}\, f(x)^Q \leqslant K J_f(x)$ *pour presque tout $x \in X$;*

(iv) *il existe $L \geqslant 1$ tel que* $L^{-1} \mathrm{Mod}_Q(\Gamma) \leqslant \mathrm{Mod}_Q(f(\Gamma)) \leqslant L\, \mathrm{Mod}_Q(\Gamma)$ *pour toute famille de courbes Γ de X.*

De plus, si f vérifie une des conditions précédentes, alors f est absolument continue en mesure et absolument continue le long de Q-presque toute courbe de X, et f^{-1} est aussi quasi-symétrique.

Ce résultat est quantitatif, au sens où les constantes H, K, L et la fonction η sont reliés. Donnons maintenant les définitions nécessaires à la compréhension du théorème. Un homéomorphisme $f : X \to Y$ est H-quasi-conforme si pour tout $x \in X$, nous avons

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\sup\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \leqslant r\}}{\inf\{d_Y(f(x), f(y)); d_X(x,y) \geqslant r\}} \leqslant H.$$

L'image par un homéomorphisme quasi-conforme d'une boule de rayon infiniment petit est un "ellipsoïde" dont on contrôle le rapport grand axe sur petit axe (mais dont on ne contrôle pas la taille en fonction de celle de la boule !). L'équivalence entre (i) et (ii) peut paraître étonnante, dans la mesure où la première propriété est locale alors que la seconde est globale. Il faut noter que dans $\mathbb{R}^n$, l'équivalence reste vraie en remplaçant dans (i) la limsup par une liminf (voir [18]). Attardons nous quelque temps sur la propriété (iii). Dans le cas euclidien, celle-ci dit que f est dans l'espace de Sobolev $W^{1,Q}(\mathbb{R}^Q)$ (c'est-à-dire f est dans $L^Q(\mathbb{R}^Q)$ ainsi que sa dérivée faible) et que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^Q$, $|\nabla f(x)|^Q \leqslant K|J_f(x)|$ où J_f est le jacobien de f. Dans le cas métrique, Lip f est la constante de Lipschitz locale de f, c'est-à-dire Lip $f(x) = \limsup_{d_X(x,y)\to 0} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}$, tandis que $J_f(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mu_Y(f(B(x,r)))}{\mu_X(B(x,r))}$. Pour définir un espace de Sobolev de fonctions à valeurs dans un espace métrique, nous avons besoin d'une notion de dérivation pour de telles fonctions. Pour éviter cette difficulté, l'idée est d'utiliser le plongement isométrique de Y dans l'espace de Banach des fonctions bornées sur Y, noté $l_\infty(Y)$. Commençons par définir les espaces de Sobolev pour les fonctions à valeurs réelles. Dans la suite, $p \in [1, +\infty[$. Suivant [32], nous dirons qu'une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est dans l'espace de Sobolev $N^{1,p}(X)$ si $f \in L^p(X)$ et s'il existe une fonction $\rho : X \to [0, +\infty]$ appartenant à $L^p(X)$ telle que

$$|f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))| \leqslant \int_\gamma \rho\, ds$$

pour p-presque toute courbe rectifiable $\gamma : [a,b] \to X$. Rappelons que cette dernière condition signifie que l'ensemble des courbes pour lesquelles l'inégalité n'est pas satisfaite est de p-module nul (cette notion apparaît aussi dans la conclusion du théorème). Une telle fonction ρ est appelée gradient supérieur faible de f. Définir l'espace de Sobolev $N^{1,p}$ comme étant l'espace des fonctions dans L^p dont un gradient supérieur est dans L^p n'est pas satisfaisant (voir [12] pour une définition équivalente à celle donnée ci-dessus et qui ne met en jeu que le gradient supérieur). Les espaces $N^{1,p}(X)$ peuvent être munis de la semi-norme

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \inf_\rho \|\rho\|_p$$

où l'inf est pris sur tous les gradients supérieurs faibles de f. Cette semi-norme devient une norme en prenant le quotient par la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $\| f - g\|_{1,p} = 0$. L'espace vectoriel normé ainsi obtenu est un espace de Banach et coïncide avec l'espace de Sobolev usuel $W^{1,p}(\Omega)$ quand $X = \Omega$ est un domaine de $\mathbb{R}^n$. Pour plus de détails, voir [32]. Nous allons maintenant adapter cette définition au cas des fonctions $f : X \to V$ où V est un espace de Banach. . Nous définissons $L^p(X : V)$ comme étant l'espace des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables $f : X \to V$ (c'est-à-dire telles que $\| f \| \in L^1(X)$) telles que $\| f \| \in L^p(X)$ où $\| \cdot \|$ est la norme dans V.

Muni de leurs normes naturelles, les espaces $L^p(X : V)$ sont des espaces de Banach. Nous pouvons alors définir l'espace de Sobolev $N^{1,p}(X : V)$ comme l'espace des fonctions mesurables $f \in L^p(X : V)$ telles qu'il existe une fonction mesurable $\rho : X \to [0,+\infty]$ dans $L^p(X)$ telle que

$$| f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))| \leqslant \int_\gamma \rho ds$$

pour p-presque toute courbe rectifiable $\gamma : [a,b] \to X$. Si Y est un espace métrique, l'espace de Sobolev $N^{1,p}(X : Y)$ est l'espace des fonctions $f \in N^{1,p}(X, l_\infty(Y))$ telles que $f(x) \in Y$ en dehors d'une ensemble de p-capacité nulle. Nous n'insistons pas sur la dernière condition technique. Comme précédemment, nous pouvons équiper $N^{1,p}(X : V)$ d'une semi-norme et l'espace normé obtenu en passant au quotient est un espace de Banach. Nous renvoyons à [20] pour une preuve du théorème 1.2 et plus de détails sur les espaces de Sobolev de fonctions à valeurs dans un espace métrique.

2. Dimensions conformes

La jauge conforme de l'espace métrique (X,d) est définie par

$$\mathcal{J}(X,d) = \{\delta \text{ distance sur } X \text{ ; } \mathrm{Id} : (X,d) \to (X,\delta) \text{ est quasi-symétrique}\}$$

et la dimension conforme de Pansu de (X,d) par

$$\mathrm{Cdim}(X,d) = \inf \{\mathrm{Hdim}(X,\delta); \delta \in \mathcal{J}(X,d)\}$$

où Hdim est la dimension de Hausdorff. Il est clair que la dimension conforme est un invariant de quasi-symétrie. Il existe une variante de cette dimension, que nous appellerons la dimension conforme Ahlfors-régulière. Commençons par définir la jauge conforme Ahlfors-régulière $\mathcal{J}_{AR}(X,d)$ comme étant l'ensemble des distances $\delta \in \mathcal{J}(X,d)$ pour lesquelles la mesure de Hausdorff associée $\mathcal{H}_\delta$ est Ahlfors-régulière. La dimension conforme Ahlfors-régulière de (X,d) est alors

$$\mathrm{Cdim}_{AR}(X,d) = \inf \{\mathrm{Hdim}(X,\delta); \delta \in \mathcal{J}_{AR}(X,d)\} .$$

Il est clair, par définition, que $\mathrm{Cdim}(X,d) \leqslant \mathrm{Cdim}_{AR}(X,d)$. Dans certains exemples, la dimension conforme peut être estimée grâce au résultat suivant de J. Tyson [34].

THÉORÈME 2.1. — *Soit* (X, d) *un espace métrique. Si sa jauge conforme* $\mathcal{J}(X, d)$ *contient une métrique* δ *tel que* $(X, \delta, \mathcal{H}_\delta)$ *(où* $\mathcal{H}_\delta$ *est la mesure de Hausdorff associée à* δ*) est un espace de Loewner de dimension* Q*, alors* $\mathrm{Cdim}(X, d) = Q$.

Nous dirons dans la suite qu'une distance δ sur X est une métrique de Loewner (de dimension Q) si $(X, \delta, \mathcal{H}_\delta)$ (où $\mathcal{H}_\delta$ est la mesure de Hausdorff associée à δ) est un espace de Loewner Q-régulier. Ainsi, le théorème précédent dit que si la jauge conforme de (X, d) contient une métrique de Loewner de dimension Q, alors la dimension conforme de (X, d) est égale à Q. Rappelons aussi que, d'après le théorème 1.1, la distance δ sur X est une métrique de Loewner de dimension Q si $(X, \delta, \mathcal{H}_\delta)$ admet une inégalité de Poincaré $(1, Q)$ et si $\mathcal{H}_\delta$ est Q-Ahlfors-régulière (modulo l'hypothèse que (X, δ) est propre). Ainsi, $\mathrm{Cdim}(\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}}) = n$ où d_{eucl} est la distance euclidienne. En effet, la mesure de Lebesgue (qui est, à une constante multiplicative prés, la mesure de Hausdorff de (X, d_{eucl})) est Ahlfors-régulière de dimension n et $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}})$ muni de la mesure de Lebesgue satisfait des inégalités de Poincaré $(1, 1)$. La dimension conforme d'un groupe de Carnot muni de sa distance de Carnot-Carathéodory est égale à la dimension de Hausdorff de cette distance (appelée aussi dimension homogène du groupe). L'Ahlfors-régularité de la mesure de Hausdorff de la distance de Carnot-Carathéodory est due à J. Mitchell [28], l'existence d'inégalités de Poincaré à N. Varopoulos [36] (et dans une forme plus forte à D. Jerison [21]).

Une autre version de ce théorème est donnée dans [17] (théorème 15.10) dans le cas des espaces compacts.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* (X, d) *un espace métrique compact tel que sa mesure de Hausdorff soit Ahlfors-régulière de dimension* Q $(Q > 1)$*. Alors, s'il existe une famille* Γ *de courbes de* X *telles que* $\mathrm{Mod}_Q(\Gamma) > 0$, $\mathrm{Cdim}(X, d) = Q$.

Il est clair, d'après la définition, que dans un espace de Loewner (de dimension Q), il existe une telle famille de courbes.

Démonstration. — Soit Γ la famille de courbes de X de Q-module non nulle. Alors, il existe $d > 0$ tel que si nous notons $\tilde{\Gamma}$ la famille des courbes de Γ de diamètre au moins d, alors $\mathrm{Mod}_Q(\tilde{\Gamma}) > 0$. En effet, soit Γ_j l'ensemble des courbes de Γ de diamètre $\geqslant 2^{-j}$. Alors, $\Gamma = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_j$ et donc par une propriété élémentaire du module (qui est en fait une mesure extérieure),

$$0 < \mathrm{Mod}_Q(\Gamma)) \leqslant \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Mod}_Q(\Gamma_j).$$

Donc, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Mod}_Q(\Gamma_{j_0}) > 0$ et alors $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{j_0}$ convient. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un homéomorphisme quasi-symétrique f de X dans un espace métrique Y de dimension de Hausdorff strictement plus petite que Q. Puisque X est compacte, il en résulte que f est uniformément continue. D'où, il existe $d' > 0$ tel que pour toute courbe $\gamma \in \tilde{\Gamma}$, le diamètre de $f(\gamma)$ est supérieur à d'.

Comme la dimension de Hausdorff de Y est strictement inférieure à Q, $H^Q(Y) = 0$ et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement B'_1, $B'_2 \ldots$ par des boules de Y de rayons respectifs $r'_1, r'_2, \ldots$ tel que $\sum_i r_i'^Q < \varepsilon$. En fait, par un théorème de recouvrement classique (voir par exemple [17] théorème 1.2), nous pouvons supposer que les boules B'_i sont disjointes, mais que $Y \subset \bigcup_i 5B'_i$. Ici, la boule $5B'_i$ est la boule de même centre que B'_i et de rayon $5r'_i$. Maintenant, puisque f est quasi-symétrique, nous pouvons trouver une constante H et des boules B_i telles que

$$(*) \qquad B_i \subset f^{-1}(B'_i) \subset f^{-1}(5B'_i) \subset HB_i.$$

Notons r_i le rayon de la boule B_i et posons

$$\rho(x) = \sum_i \frac{r'_i}{r_i} \chi_{2HB_i}(x).$$

Nous allons montrer que ρ est presque admissible pour $\tilde{\Gamma}$. En effet, si $\gamma \in \tilde{\Gamma}$,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \rho\, ds &= \sum_i \frac{r'_i}{r_i} l(\gamma \bigcap 2HB_i) \\ &\geqslant 1/10 \sum_{\{i; f(\gamma)\bigcap 5B'_i \neq \varnothing\}} 10 r'_i \frac{l(\gamma \bigcap 2HB_i)}{r_i}.\end{aligned}$$

Supposons ε assez petit pour que $8Hr_i < d$ pour tout i. D'où, $\operatorname{diam}(2HB_i) \leqslant 4Hr_i < d/2 < \operatorname{diam} \gamma$, et donc γ ne peut être contenue dans $2HB_i$. De plus, si i est tel que $f(\gamma) \bigcap 5B'_i \neq \varnothing$, alors, d'après (*), $\gamma \bigcap HB_i \neq \varnothing$. D'où, par connexité, $l(\gamma \bigcap 2HB_i) \geqslant Hr_i$. Ainsi,

$$\int_\gamma \rho\, ds \geqslant H/10 \sum_{\{i; f(\gamma)\bigcap 5B'_i \neq \varnothing\}} 10 r'_i \geqslant (H/10) H_1^\infty(f(\gamma)).$$

Ici, H_1^∞ est le contenu de Hausdorff défini par

$$H_1^\infty(F) = \sup \left\{ \sum \operatorname{diam} A_i ; F \subset \bigcup_i A_i \right\}.$$

Notons que pour un ensemble connexe F, $H_1^\infty(F) \geqslant \operatorname{diam} F$. Il en résulte

$$\int_\gamma \rho\, ds \geqslant (H/10) \operatorname{diam} f(\gamma) \geqslant (H/10) d'.$$

En particulier, $(10/H \cdot d')\rho$ est admissible pour $\tilde{\Gamma}$. Nous allons maintenant estimer $\operatorname{Mod}_Q(\tilde{\Gamma})$ grâce à cette fonction et montrer qu'il est plus petit que ε. Ce qui nous donnera une contradiction. Nous avons, en utilisant l'Ahlfors-régularité de X,

$$\begin{aligned}\operatorname{Mod}_Q(\tilde{\Gamma}) &\leqslant C \int_X \rho^Q d\mu = C \int_X \left(\sum_i \frac{r'_i}{r_i} \chi_{2HB_i} \right)^Q d\mu \leqslant C \int_X \left(\sum_i \frac{r'_i}{r_i} \chi_{B_i} \right)^Q d\mu \\ &\leqslant C \sum_i \frac{r_i'^Q}{r_i^Q} \mu(B_i) \leqslant C \sum_i r_i'^Q \leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

Le fait que l'on puisse passer de la première ligne à la deuxième ligne se démontre grâce à la fonction maximale (voir [17], exercice 2.10, page 13). La constante C n'est pas la même à chaque ligne, mais elle ne dépend pas de ε. D'où, comme la dernière inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Mod}_Q(\widetilde{\Gamma}) = 0$, ce qui contredit notre hypothèse. □

Les théorèmes 2.1 et 2.2 ont eu un précurseur, à savoir le lemme suivant de P. Pansu [31].

LEMME 2.3. — *Soit (X,d) un espace métrique tel que sa mesure de Hausdorff soit Ahlfors-régulière de dimension Q ($Q > 1$). S'il existe une famille de courbes Γ de X, munie d'une mesure ν, telle qu'il existe une constante $C \geqslant 1$ pour laquelle on ait*

$$C^{-1}r^{Q-1} \leqslant \nu\left(\gamma \in \Gamma; \gamma \bigcap B(x,r) \neq \emptyset\right) \leqslant Cr^{Q-1}$$

pour toute boule $B(x,r)$ de X, alors $\mathrm{Cdim}(X,d) = Q$.

Ce lemme a été utilisée par M. Bourdon dans [6] pour calculer la dimension conforme du bord de certains immeubles hyperboliques. Il est important de noter que l'idée sous-jacente commune aux théorèmes 2.1et 2.2, et au lemme 2.3 est que si un espace métrique (X,δ), où δ est dans la jauge conforme de (X,d), possède une "structure produit", alors la dimension conforme de (X,d) est réalisée par δ. Il existe des espaces pour lesquels on sait estimer la dimension conforme, mais pour lesquels cette dimension n'est pas réalisée (voir [1]).

Mais, étant donné un espace métrique (X,d), comment construire des distances dans la jauge conforme $\mathcal{J}(X,d)$? Nous présentons maintenant une technique développée par G. David et S. Semmes (voir par exemple [14]). Soit (X,d) un espace métrique. On dit que X est doublant s'il existe $C_d \geqslant 1$ telle que toute boule de rayon R peut être recouverte par au plus C_d boule de rayon $\frac{R}{2}$.

Remarque. — Supposons que X est de plus muni d'une mesure (positive) μ. Rappelons que l'espace métrique mesuré (X,d,μ) vérifie la condition de doublement du volume (ou que la mesure μ est doublante) s'il existe $C_{dv} \geqslant 1$ telle que pour tout $x \in X$, tout $R > 0$,

$$\mu(B(x,R)) \leqslant C_{dv}\mu\left(B\left(x,\frac{R}{2}\right)\right).$$

Il est clair que tout espace métrique muni d'une mesure doublante est doublant. Réciproquement, toute espace métrique doublant et complet peut être muni d'une mesure doublante (voir [17]).

Supposons maintenant que (X,d,μ) est un espace métrique muni d'une mesure doublante. Pour tout $\alpha > 0$, posons, pour tout couple de points (x,y) de X,

$$D_\alpha(x,y) = \left(\mu(\overline{B}(x,d(x,y)) + \mu(\overline{B}(y,d(x,y)))\right)^\alpha$$

où $\overline{B}(z,r)$ désigne la boule fermée de centre z et de rayon r. Le fait que nous devons prendre des boules fermées plutôt que des boules ouvertes est purement technique, et nous n'insisterons pas sur ce point. Alors, D_α définit une quasi-distance sur X, c'est-à-dire que D_α vérifie tous les axiomes usuels d'une distance sauf l'inégalité triangulaire. Celle-ci est remplacée par : il existe une constante $C \geqslant 1$ telle, pour tout choix de x, y et z dans X,

$$D_\alpha(x,y) \leqslant C\left(D_\alpha(x,z) + D_\alpha(z,y)\right).$$

Le cas $C = 1$ dans l'estimation précédente correspond à la vraie inégalité triangulaire. Notons que si μ est Ahlfors-régulière de dimension Q et si nous prenons $\alpha = 1/Q$, alors la distance originale d et D_α sont bilipschitz équivalentes. Le fait important est qu'il existe α_0 tel que si $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$, alors la quasi-distance D_α est bilipschiz équivalente à une vraie distance.

Un espace métrique (X, d) est dit uniformément parfait s'il existe une constante $C_{UP} > 0$ telle que pour tout $x \in X$, tout $r \in]0, \operatorname{diam} X[$, il existe $y \in X$ tel que

$$C_{UP}^{-1} r \leqslant d(x,y) \leqslant r.$$

En d'autre termes, l'anneau $B(x,r) \setminus B(x, C_{UP}^{-1} r)$ est non vide. Cette propriété dit que notre espace métrique n'a pas trop de "trous". Cependant, cette condition n'est pas trop restrictive. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor est uniformément parfait. En fait, si l'espace métrique (X, d) supporte une mesure Ahlfors-régulière, il est uniformément parfait. Donnons maintenant un résultat important. Nous utilisons les notations précédentes.

Proposition 2.4. — *Si (X, d) est un espace uniformément parfait qui supporte une mesure doublante, alors pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$, D_α est dans la jauge conforme $\mathcal{J}(X, d)$ de (X, d) et elle est Ahlfors-régulière de dimension $1/\alpha$ (donc de dimension de Hausdorff $1/\alpha$).*

Pour être rigoureux, la conclusion dit que D_α (qui n'est pas en général une vraie distance) est bilipschitz équivalente à une distance qui est dans la jauge conforme de (X, d) et qui est Ahlfors-régulière de dimension $1/\alpha$. Il est clair qu'en pratique, il est bien difficile d'estimer le α_0 optimal ! Si nous pouvons le faire, nous obtenons, d'après la proposition, une estimation du type $\operatorname{Cdim}(X, d) \leqslant 1/\alpha_0$.

En fait, si X est doublant, il existe une fonction (appelée fonction de recouvrement) $C_d : [0, \frac{1}{2}] \to]0, +\infty[$ telle que toute boule de rayon R peut être recouverte par au plus $C_d(\varepsilon)$ boules de rayon $\varepsilon.R$. En outre, cette fonction peut s'écrire sous la forme $C_d(\varepsilon) = C.\varepsilon^{-\beta}$ avec $C \geqslant 1$ et $\beta = \beta(C_d) > 0$. La dimension d'Assouad de X est alors $\inf \beta(C_d)$ où l'inf est pris sur toutes les fonctions de recouvrement C_d de X. Par exemple, la dimension d'Assouad de $\mathbb{R}^n$ est n. De même, la dimension d'Assouad d'un espace métrique qui est Ahlfors-régulier de dimension Q est Q. De manière générale, la dimension d'Assouad est supérieure à la dimension de Hausdorff. Notons aussi que les espaces doublants sont exactement les espaces de dimension de Assouad finie. Comme la condition de doublement métrique est un invariant de quasi-symétrie, il en est de même de la finitude de la dimension d'Assouad.

Définissons la dimension conforme d'Assouad comme l'inf des dimensions d'Assouad des (X, δ) où δ est dans la jauge conforme de (X, d). Comme la dimension d'Assouad est toujours supérieure à la dimension de Hausdorff, la dimension conforme d'Assouad domine la dimension conforme de Pansu. Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on pose $d_\varepsilon(x, y) = d(x, y)^\varepsilon$. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, d_ε est une distance sur X et l'application identité Id : $(X, d) \to (X, d_\varepsilon)$ est quasi-symétrique (avec $\eta(t) = t^\varepsilon$). Énonçons le théorème de plongement d'Assouad.

THÉORÈME 2.5. — *Tout espace métrique doublant (X, d_ε) (avec $\varepsilon \in]0, 1[$) admet un plongement bilipschitzien dans un espace euclidien.*

Le résultat est faux si $\varepsilon = 1$, par exemple pour le groupe de Heisenberg. Ceci découle du théorème de différentiabilité pour les fonctions lipschitziennes due à Pansu [31]. Un problème ouvert est de déterminer les espaces métriques qui peuvent être plongés de façon bilipschitzienne dans un espace euclidien.

Remarque. — En fait, un espace métrique peut être plongé quasi-symétriquement dans un espace euclidien si et seulement si il est doublant (voir [17]).

Il découle de tout ce qui précède (voir [17]) le

THÉORÈME 2.6. — *Soit (X, d) un espace métrique complet, uniformément parfait de dimension de Assouad Q_0 finie. Alors, pour tout $Q > Q_0$, il existe un homéomorphisme quasi-symétrique de (X, d) dans un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ (pour un certain n) qui est Ahlfors-régulier de dimension Q.*

Il en résulte que pour un tel espace métrique (X, d), la dimension d'Assouad domine la dimension conforme Ahlfors-régulière $\mathrm{Cdim}_{AR}(X, d)$. Remarquons que si (X, d) est Alhfors-régulier de dimension Q, alors (X, d) est doublant (et donc de dimension d'Assouad finie) et uniformément parfait. Comme alors Q est égale à la dimension d'Assouad de (X, d) (voir plus haut), la dimension conforme Ahlfors-régulière domine la dimension conforme d'Assouad. Donc, pour un espace Ahlfors-régulier complet, la dimension conforme d'Assouad et la dimension conforme Ahlfors-régulière coïncident. Ce résultat s'étend sans problème aux espaces uniformément parfaits, complets (et doublants pour que la dimension conforme d'Assouad soit fini), puisque ces espaces sont quasi-symétriquement équivalents à des espaces Ahlfors-réguliers (corollaire 14.15 de [17]).

3. Espaces tangents faibles

Nous avons vu que si nous pouvons trouver une famille de courbes de Q-module non nulle dans un espace (X, d) Ahlfors-régulier de dimension Q, alors la dimension conforme de (X, d) est Q. Le but de ce paragraphe est de présenter un raffinement de ce résultat du à S. Keith et T. Laakso [23]. Ceux-ci démontrent que pour un espace (X, d)

Ahlfors-régulier de dimension Q, la dimension conforme Ahlfors-régulière est Q si nous pouvons trouver une famille de courbes dans un espace tangent faible qui soit de p-module non nulle pour un certain $p \geqslant 1$ (et non pas pour Q!). Comme l'espace (X, d) est un espace tangent faible de lui-même, nous retrouvons le résultat du paragraphe 2. Nous allons maintenant donner plusieurs définitions équivalentes des espaces tangents faibles et énoncer de façon plus précise les résultats de Keith et Laakso.

Un espace métrique pointé (X, d, p) est un espace métrique (X, d) avec le choix d'une origine $p \in X$.

Rappelons que, si (X, d) est un espace métrique doublant, le théorème de plongement d'Assouad nous dit que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, l'espace métrique (X, d^{ε}) admet un plongement bilispchitzien dans un espace euclidien. Notre première définition va utiliser ce fait.

DÉFINITION 3.1. — *Nous dirons que les espaces métriques pointés (X_j, d_j, p_j) (que l'on suppose doublants et complets) convergent vers l'espace métrique pointé (X, d, p) s'il existe $\alpha \in]0,1]$, $K > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tels que*

(i) *Il existe des plongements bilipschitziens (de constante K) $f_j : (X_j, d_j^{\alpha}) \to (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}})$ et $f : (X, d^{\alpha}) \to (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}})$ avec $f_j(p_j) = f(p) = 0$.*

(ii) *Les ensembles $f_j(X_j)$ convergent vers $f(X)$ au sens où*

$$\lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in f_j(X_j) \bigcap B(0,R)} d_{\text{eucl}}(x, f(X)) = 0,$$

et

$$\lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in f(X) \bigcap B(0,R)} d_{\text{eucl}}(x, f_j(X_j)) = 0,$$

pour tout $R > 0$.

(iii) *La fonction $d_j(f_j^{-1}(x), f_j^{-1}(y))$ de $f_j(X_j) \times f_j(X_j)$ dans $\mathbb{R}$ converge vers $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ sur $f(X) \times f(X)$ au sens où, pour tout choix de x et y dans $\mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{j \to +\infty} d_j(f_j^{-1}(x), f_j^{-1}(y)) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

Il est intéressant de noter que si les (X_j, d_j, p_j) sont des espaces métriques pointés (complets et doublants, de constantes de doublement uniformément bornées), et si nous fixons $\alpha \in]0,1]$, $K > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une famille de plongement K-bilipshitziens $f_j : (X_j, d_j^{\alpha}) \to (R^n, d_{\text{eucl}})$ avec $f_j(p_j) = 0$, alors il existe une sous-suite de (X_j, d_j, p_j) qui converge au sens précédent vers un espace métrique pointé (X, d, p).

Fixons maintenant un espace métrique (X, d) que l'on suppose doublant et complet. Pour tout $p \in X$ et tout $t \in]0, \operatorname{diam} X]$, on note $X_{p,t}$ l'espace mesuré pointé $(X, t^{-1}d, p)$. Un espace tangent faible de (X, d) est une limite (au sens précédent) d'une suite d'espaces métriques pointés X_{p_j,t_j}. Nous ne demandons pas que $t_j \to 0$ quand $j \to +\infty$. D'où, les espaces $X_{p,t}$ sont eux mêmes des espaces tangents faibles de X, qui est d'ailleurs un espace tangent faible de lui-même. De plus, toute suite de (p, t) admet une sous-suite pour laquelle les $X_{p,t}$ convergent. D'après la remarque précédente (après la définition de la convergence), tous les espaces tangents faibles peuvent être obtenus à partir des plongement d'Assouad (mais ceux-ci sont en pratique difficiles à déterminer). Pour plus de détails, voir [14].

DÉFINITION 3.2. — *Une suite (X_j, d_j, p_j) d'espaces métriques pointés converge vers un espace métrique pointé (X, d, p) si pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, un sous-ensemble M de X, des sous-ensembles M_j de X_j et des bijections $f_j : M_j \to M$ telles que pour tout $j \geqslant N$, nous avons*

(i) $p \in M$, $p_j \in M_j$ *et* $f_j(p_j) = p$.

(ii) *L'ensemble M est ε-dense dans la boule $B(p, R)$ de X et les ensembles M_j sont ε-denses dans les boules $B(p_j, R)$ de X_j.*

(iii) $|d_j(x, y) - d(f_j(x), f_j(y))| < \varepsilon$ *pour tout x, y dans M_j.*

Le fait que les deux définitions de convergence pour les espaces métriques pointés sont équivalentes est un exercice simple de manipulations des définitions. Un espace métrique complet Z est alors un espace tangent faible de (X, d) s'il existe une suite (t_j) de réels positifs, des points $p \in Z$, $p_j \in X$ tels que la suite d'espaces métriques pointés $(X, d/t_j, p_j)$ tend vers l'espace métrique pointé Z (avec origine en p).

Nous allons enfin définir la notion d'espaces tangents faibles pour un espace métrique mesuré (c'est-à-dire nous ajoutons la convergence de mesures), en commençant par donner une troisième définition de la convergence pour une suite d'espaces métriques. Cette convergence est usuellement appelée "Convergence au sens de Gromov-Hausdorff mesurée". Commençons par quelques définitions classiques. Nous renvoyons par exemple [11] pour plus de détails. Notons $U_r(S)$ le r-voisinage de l'ensemble $S \subset X$, c'est-à-dire

$$U_r(S) = \bigcup_{x \in S} B(x, r) = \{y \in X | d(y, S) < r\}.$$

La distance de Hausdorff de A à B, ensembles de X, notée $d_H(A, B)$ est :

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset U_r(B) \quad \text{et} \quad B \subset U_r(A)\}.$$

Notons que, si X est compact, l'ensemble des compacts de X muni de la distance de Hausdorff est compact. Soient X et Y deux espaces métriques, et $r > 0$. Leur distance de Gromov-Hausdorff, notée $d_{GH}(X, Y)$ est définie ainsi : $d_{GH}(X, Y) > r$ si et seulement si il existe un espace métrique Z, deux isométries $i_x : X \to Z$ et $i_y : Y \to Z$ telles que

$$d_H\left(i_x(X), i_y(Y)\right) < r.$$

Ceci définit bien une distance sur l'espace des classes d'isométries d'un espace métrique compact. La dernière définition découle de la convergence pour la distance de Gromov-Hausdorff.

DÉFINITION 3.3. — *La suite d'espaces métriques pointés et mesurés* $\left\{(X_j, d_j, \mu_j, p_j)\right\}$ *converge vers* (X, d, μ, p) *s'il existe :*

$$\left\{\begin{array}{ll} (Z, l, q) & \text{un espace métrique propre pointé} \\ i : X \to Z \text{ et } i_j : X_j \to Z & \text{des isométries} \end{array}\right.$$

tels que pour tout j, $i_j(p_j) = q = i(p)$, $\left\{i_j(X_j)\right\}$ *converge vers* $i(X)$ *(au sens du (ii) de la définition 1) et* $\left\{i_j * \mu_j)\right\}$ *converge faiblement vers* $i * \mu$ *(convergence des mesures poussées). Ici, tous les espaces métriques sont supposés être propres et complets. Nous dirons que l'espace mesuré pointé* (Y, l, ν, y) *est espace tangent faible de* (X, d, μ) *s'il existe*

$$\left\{\begin{array}{ll} (r_j) \text{ et } (s_j) & 0 < r_j < \operatorname{diam}(X, d) \quad \text{et} \quad 0 < s_j \\ (x_j) & \text{points de } X \end{array}\right.$$

telles que $\left\{(X, d/r_j, s_j\mu, x_j)\right\}$ *converge vers* (Y, l, ν, y).

Avant d'énoncer les résultats de Keith et Laakso, nous avons besoin d'une dernière définition. Nous dirons que l'espace métrique mesuré (X, d, μ) a un uniformément grand p-module de constante δ pour $p \geqslant 1$ et $\delta > 0$ si pour tout $x \in X$, tout $0 < r \leqslant \operatorname{diam} X$:

$$\operatorname{Mod}_p(\Gamma) \geqslant \delta.\mu(B(x, r))\frac{1}{r^p}$$

où Γ est l'ensemble des familles de courbes dans $B(x, r)$ de diamètre au moins δr.

THÉORÈME 3.4. — *Soient* $Q \geqslant 1$ *et* (X, d, μ) *un espace métrique mesuré Q-Ahlfors régulier de dimension conforme d'Assouad égale à Q. Alors il existe un espace faiblement tangent (au sens de la définition 3) à* (X, d, μ) *ayant un uniformément grand 1-module.*

Nous donnerons une application du théorème 3.4 dans le dernier paragraphe, à savoir que la dimension conforme d'Assouad, et donc la dimension conforme Ahlfors-régulière, du tapis de Sierpinski est strictement inférieure à sa dimension de Hausdorff. L'idée est que le tapis de Sierpinski, muni de la distance euclidienne induite et de la mesure de Hausdorff associée, est Ahlfors-régulier. Tout espace tangent faible du tapis contient une copie du tapis. Comme le tapis n'admet pas de familles de courbes de 1-module non nul, nous pourrons conclure. Du théorème 3.4, Keith et Laakso déduisent le

THÉORÈME 3.5. — *Soit* (X, d, μ) *un espace Alhfors-régulier de dimension Q. Alors, la dimension conforme d'Assouad de* (X, d) *est Q si et seulement si il existe un espace tangent faible de* (X, d) *qui est de p-module non nul (pour un* $p \geqslant 1$*).*

Nous allons maintenant voir que sous certaines conditions faibles d'auto-similarité, les espaces tangents faibles d'un espace sont, à homéomorphisme quasi-möbius près, l'espace lui-même privé d'un point. Attention, dans la suite, nous utiliserons la définition 2 et nous supposerons que les espaces tangents faibles sont limites de suites $(X, t_j^{-1}d, p)$

avec $\lim_{j\to+\infty} t_j = 0$ (afin d'éliminer les espaces tangents faibles triviaux) Commençons par quelques définitions. L'idée ici est d'essayer dans le cas métrique général de transposer la situation classique de l'action des transformations de Möbius sur la sphère de Riemann. Étant donnés un 4-uplet de quatre points distincts (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'espace métrique (X, d), leur birapport, noté $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, est le nombre

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{d(x_1, x_3)d(x_2, x_4)}{d(x_1, x_4)d(x_2, x_3)}.$$

Soit $\eta : [0, \infty[\to [0, \infty[$ un homéomorphisme. Nous dirons qu'un homéomorphisme f entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est η-quasi-Möbius si pour tout 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4), nous avons

$$[f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)] \leqslant \eta([x_1, x_2, x_3, x_4]).$$

Un homéomorphisme quasi-symétrique est quasi-Möbius, et réciproquement, si l'espace de départ est borné, tout homéomorphisme quasi-Möbius est quasi-symétrique. Soit G un groupe agissant sur l'espace métrique (X, d) par homéomorphismes. Étant donné un homéomorphisme $\eta : [0, \infty[\to [0, \infty[$, nous dirons que l'action de G sur X est η-quasi-Möbius si tout $g \in G$ induit un homéomorphisme η-quasi-Möbius sur X. Nous dirons que l'action de G sur X est uniformément quasi-Möbius si elle est η-quasi-Möbius pour un certain homéomorphisme $\eta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Si X est localement compact, nous dirons que l'action de G sur X est cocompacte s'il existe un compact K de X tel que $X = \bigcup_{g\in G} g(K)$. Soit $\mathrm{Tri}(X)$ l'espace des triplets distincts de X. Si G agit sur X, G induit une action sur $\mathrm{Tri}(X)$ par, pour tout $g \in G$, tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Tri}(X)$,

$$g(x_1, x_2, x_3) = (g(x_1), g(x_2), g(x_3)).$$

Alors, si X est compact, l'action induite de G sur $\mathrm{Tri}(X)$ est cocompacte si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Tri}(X)$, il existe $g \in G$ tel que $d(g(x_i), g(x_j)) \geqslant \delta$ pour tout $i \neq j$. En d'autres termes, tout triplet peut être envoyé par le groupe G sur un triplet dont toutes les distance respectives entre deux éléments sont uniformément bornées.

Nous allons enfin compactifier notre espace métrique (X, d) dans le cas où il est non borné mais localement compact. Fixons un point base p dans X et notons $\hat{X} = X \bigcup \{\infty\}$. Posons $h_p(x) = 1/(1 + d(x, p))$ si $x \in X$ et $h_p(\infty) = 0$. Enfin, définissons $\rho_p(x, y) = h_p(x)h_p(y)d(x, y)$ pour x, y dans X. Nous prolongeons ρ_p en posant $\rho_p(x, \infty) = \rho_p(\infty, x) = h_p(x)$ et $\rho_p(\infty, \infty) = 0$. Il faut voir ρ_p comme l'analogue de la métrique chordale sur la sphère de Riemann. Cependant, ρ_p n'est pas une vraie distance, car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Nous la modifions alors en conséquence en posant, pour tout x et tout y dans $\hat{X}$,

$$\hat{d}_p(x, y) = \inf \sum_{k=0}^{j-1} \rho_p(x_k, x_{k+1})$$

où l'inf est pris sur toutes les suites finies de points $x_0, \ldots, x_k$ avec $x_0 = x$ et $x_k = y$. Alors, $\hat{d}_p$ est une vraie distance sur $\hat{X}$ et l'identité $\mathrm{Id} : (X, d) \to (X, \hat{d}_p)$ est quasi-Möbius (la distance à droite est la restriction de $\hat{d}_p$ sur X).

Nous pouvons alors énoncer un théorème de Bonk et Kleiner [3].

THÉORÈME 3.6. — *Soit (X, d) un espace métrique compact qui est de plus uniformément parfait et doublant. Supposons qu'il existe une action G uniformément quasi-Möbius sur X qui induit une action cocompacte sur* $\mathrm{Tri}(X)$. *Alors, pour tout espace tangent faible (Z, p) de X, il existe un homéomorphisme quasi-Möbius $h : (\hat{Z}, \hat{d}_p) \to X$. De plus, la restriction de h à Z est un homéomorphisme quasi-Möbius à valeurs dans $X \setminus \{h(\infty)\}$.*

Ainsi, à homéomorphisme quasi-Möbius près, pour un tel espace métrique (X, d), tout espace tangent faible est l'espace lui-même privé d'un point ! En particulier, ceci est vrai pour le bord à l'infini d'un groupe hyperbolique au sens de Gromov (voir plus loin pour la définition et plus de détails).

4. Cas des espaces Gromov-hyperboliques

4.1. Jauge conforme d'un espace hyperbolique

Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, c'est-à-dire tel que tout couple de points de X peut être joint par une courbe rectifiable dont la longueur est égale à $d_X(x, y)$. On dit que X est Gromov-hyperbolique s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout triangle géodésique de X de sommets x, y et z, tout côté est contenu dans le δ-voisinage de l'union des deux autres. Par exemple, toute variété Riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle négative est Gromov-hyperbolique. Notons que la Gromov-hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie. On rappelle qu'une application $F : Z_1 \to Z_2$ entre deux espaces métriques (Z_1, d_1) et (Z_2, d_2) est une quasi-isométrie s'il existe $C > 0$, $D > 0$ tels que

$$C^{-1} d_1(\xi_1, \eta_1) - D \leqslant d_2(F(\xi_1), F(\eta_1)) \leqslant C d_1(\xi_1, \eta_1) + D$$

pour tout ξ_1, η_1 de Z_1 et $d_2(\xi_2, F(Z_1)) \leqslant D$ pour tout $\xi_2 \in Z_2$.

Un rayon géodésique r de X est un plongement isométrique $r : [0, +\infty[\to X$. Deux rayons géodésiques r_1 et r_2 sont dits équivalents si $\sup\{d_X(r_1(t), r_2(t)); t \in [0, +\infty[\}$ est fini. Le bord à l'infini de X, que l'on note ∂X, est l'ensemble des classes d'équivalence des rayons géodésiques partant d'une origine fixée $x_0 \in X$ (c'est-à-dire tel que $r(0) = x_0$). On définit le produit de Gromov $\{\xi|\eta\}_{x_0}$ de ξ, $\eta \in \partial X$ par $\{\xi|\eta\}_{x_0} = d_X(x_0, (\xi, \eta))$ où (ξ, η) est une géodésique dans X joignant ξ à η.

Une métrique δ sur ∂X est dite visuelle de paramètre a s'il existe $C > 0$ telle que

$$C^{-1} a^{-\{\xi|\eta\}_{x_0}} \leqslant \delta(\xi, \eta) \leqslant C a^{-\{\xi|\eta\}_{x_0}}$$

pour tout ξ, η dans ∂X. D'après un théorème de M. Gromov, de telles métriques existent toujours sur ∂X. Remarquons que si δ_1 et δ_2 sont deux métriques visuelles sur ∂X, alors

Id : $(\partial X, \delta_1) \to (\partial X, \delta_2)$ est quasi-symétrique. La jauge conforme naturelle du bord d'un espace hyperbolique est la jauge conforme de $(\partial X, \delta)$ où δ est une métrique visuelle sur ∂X. On la note $\mathscr{J}(\partial X)$. De même, la dimension conforme de ∂X (que l'on note $\mathrm{Cdim}(\partial X)$) est la dimension conforme associée à la jauge $\mathscr{J}(\partial X)$. Nous renvoyons, par exemple, à [13] pour plus de détails sur les espaces et groupes hyperboliques.

Nous allons motiver l'étude des structures quasi-conformes au bord des espaces Gromov-hyperboliques en montrant comment elles peuvent être utiles pour démontrer des théorèmes de rigidité quasi-isométrique pour certains immeubles hyperboliques et en expliquant comment elles permettent d'attaquer la conjecture de Cannon pour les groupes hyperboliques.

4.2. Rigidité quasi-isométrique des immeubles fuchsiens

Commençons par définir les exemples les plus simples d'immeubles hyperboliques, à savoir les immeubles $I_{p,q}$.

THÉORÈME 4.1. — *Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \geqslant 5$ et $q \geqslant 3$. Alors, il existe un unique 2-complexe cellulaire simplement connexe (noté $I_{p,q}$) tel que*

(i) *Ses cellules sont des p-gones hyperboliques réguliers à angle droit.*

(ii) *Deux de ses cellules ont en commun au plus un point ou une arête.*

(iii) *Le link en chaque sommet est le graphe bipartite complet à $q + q$ sommets.*

Nous rappelons que le link au sommet x du complexe X est le graphe L_x dont les sommets sont les arêtes de X contenant x et tel que deux sommets i et j de L_x sont joints par une arête si une face de X contient les deux arêtes représentant i et j. Ainsi, le link L_x décrit la combinatoire de X dans un voisinage de x. À partir de maintenant, une cellule de $I_{p,q}$ est appelée chambre et un appartement de $I_{p,q}$ est une copie du plan hyperbolique muni de son pavage par ses chambres. Le complexe cellulaire $I_{p,q}$ a une structure d'immeuble :

(a) Deux de ses chambres c et c' de $I_{p,q}$ partagent au moins un appartement de $I_{p,q}$;

(b) Si A et A' sont deux appartements contenant c et c', alors il existe un isomorphisme cellulaire $\phi : A \to A'$ qui laisse invariant $A \bigcap A'$.

Soient x et x' deux points de $I_{p,q}$, alors il existe deux chambres c et c' telles que $x \in c$ et $x' \in c'$. D'après (a), il existe un appartement A contenant c et c'. On pose $d(x,x') = d_A(x,x')$ (où d_A désigne la distance dans le plan hyperbolique A). D'après (b), cette définition de d ne dépend pas du choix de A. Alors, $I_{p,q}$ muni de cette métrique d est un espace Gromov-hyperbolique.

Dans [6], M. Bourdon munit le bord de $I_{p,q}$ d'une métrique $\delta_{p,q}$ (dépendant du point-base) de sorte que, si on note $\mu_{p,q}$ la mesure de Hausdorff associée à $\delta_{p,q}$, l'espace métrique mesuré $(\partial I_{p,q}, \delta_{p,q}, \mu_{p,q})$ est géodésique, compact et Ahlfors-régulier de dimension $Q_{p,q} = 1 + \frac{\log(q-1)}{\mathrm{Argch}(\frac{p-2}{2})}$. De plus, $\delta_{p,q}$ appartient à la jauge conforme de $\partial I_{p,q}$ et $\mathrm{Cdim}\, \partial I_{p,q} = Q_{p,q}$.

THÉORÈME 4.2 ([7]). — *L'espace métrique mesuré* $(\partial I_{p,q}, \delta_{p,q}, \mu_{p,q})$ *supporte une inégalité de Poincaré* $(1, 1)$.

Donc, d'après le théorème 1.1, $\partial I_{p,q}$ est un espace de Loewner. De plus, il n'est pas de dimension entière. Nous avons vu dans le premier paragraphe qu'une méthode géométrique pour démontrer une inégalité de Poincaré est d'exhiber, pour tout couple de points de l'espace, un pinceau de courbes. Illustrons ceci dans le cas du bord d'un $I_{p,q}$. Pour cela, fixons ξ, $\eta \in \partial I_{p,q}$, un appartement A dont le bord contient ξ et η et une chambre c de A contenant le point base x_0. On va oublier dans la suite les indices p et q.

Remarque. — En général, une telle chambre n'existe pas. Mais, on peut changer le point base dans un voisinage de x_0 de sorte qu'il existe une chambre ayant les propriétés requises. Les deux métriques correspondantes sont alors bilipschitz équivalentes. Ce qui ne changera pas les estimations obtenues.

Notons K le sous-groupe du groupe des isométries de $I_{p,q}$ qui fixe point par point c et H le sous-groupe de K qui fixe ξ et η. Alors, K et H agissent par isométries sur $\partial I_{p,q}$. Considérons la projection continue et surjective $\Pi : K \times \partial A \to \partial I_{p,q}$ définie par $\Pi(k, s) = ks$. Alors, μ est la mesure image de $dk \times da$ par Π, où dk est la mesure de Haar de K et da est la mesure de longueur sur ∂A (en d'autres termes, μ a une structure produit). Soit $[\xi, \eta]$ le segment géodésique de ∂A joignant ξ et η. Alors, le pinceau de courbes cherché joignant ξ et η est l'ensemble des courbes $h([\xi, \eta])$, $h \in H$. L'estimation importante est qu'il existe $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\gamma_t(H_t) \leqslant (\inf(t, \delta(\xi, \eta) - t))^{Q-1} \leqslant C\gamma_t(H_t), \tag{1}$$

où $\theta(t)$ est le point de $[\xi, \eta]$ à distance t de ξ, $H_t = H(\theta(t))$ est la fibre "au-dessus" de $\theta(t)$ et γ_t est la mesure image de dk par Π quand on se restreint à cette fibre. On obtient l'inégalité de Poincaré $(1, 1)$ en intégrant par rapport à t l'estimation $|u(\xi) - u(\eta)| \leqslant \int_{\gamma_t} \rho ds$ (où ρ est un gradient supérieur de u) et en utilisant (1).

THÉORÈME 4.3 ([9]). — *Toute quasi-isométrie de* $F : I_{p,q} \to I_{p',q'}$ *est à distance bornée d'une isométrie* $\phi : I_{p,q} \to I_{p',q'}$

En particulier, ceci implique que si (p, q) et (p', q') sont différents, alors les immeubles $I_{p,q}$ et $I_{p',q'}$ ne sont pas quasi-isométriques. On rappelle que la conclusion du théorème dit que $\sup\left\{\delta_{p',q'}(F(x), \phi(x)); x \in I_{p,q}\right\} < +\infty$. Signalons que les théorèmes 4.2 et 4.3 sont vrais pour une classe plus large d'immeubles hyperboliques, à savoir les immeubles fuchsiens à angle droit (voir [9]).

Nous allons maintenant donner une idée de la preuve. Pour simplifier, on va supposer que $p = p'$ et $q = q'$, et on oublie les indices. Si $F : I \to I$ est une quasi-isométrie, alors F induit sur le bord de ∂I un homéomorphisme quasi-symétrique f. Réciproquement, tout homéomorphisme quasi-symétrique $f : \partial I \to \partial I$ est induit par une quasi-isométrie de I. Ceci provient d'un résultat de F. Paulin. Il en résulte que notre démonstration va consister à montrer que tout homéomorphisme quasi-symétrique de ∂I est "conforme" (théorème de type Rademacher-Stepanov) puis que tout homéomorphisme conforme sur ∂I est induit par une isométrie de I (théorème de type Liouville). Cette démarche est inspirée par les travaux de G. D. Mostow [29] sur la rigidité des espaces symétriques et elle est identique à celle utilisée par P. Pansu [31] pour démontrer la rigidité des quasi-isométries des espaces hyperboliques quaternioniens.

Soit $f : \partial I \to \partial I$ un homéomorphisme quasi-symétrique. Nous avons vu dans la section 1 qu'alors f est absolument continue le long de presque (au sens du Q-module) toute courbe rectifiable de ∂I. Fixons maintenant $\xi \in \partial I$ et soit ∂A le bord d'un appartement contenant ξ. Considérons s la paramétrisation par longueur d'arc de ∂A telle que $s(0) = \xi$. On dit que f est différentiable en ξ le long de ∂A si $\lim_{t \to 0} \frac{\delta(f(s(t)), f(s(0)))}{|t|}$ existe et est fini. Dans ce cas, on la note $f'_{\partial A}(\xi)$. Supposons que le long de tout bord d'appartement ∂A contenant ξ, f est différentiable en ξ. Alors, il existe $f'(\xi) \in \mathbb{R}^+$ tel que $f'(\xi) = f'_{\partial A}(\xi)$ pour tout choix possible de A. Ceci provient de l'observation suivante : si $\xi \in \partial A \bigcap \partial B$, alors il existe ∂C contenant ξ tel que ∂C coïncide à droite de ξ avec ∂A (respectivement à gauche de ξ avec ∂B). En utilisant cette remarque, l'absolue continuité de f et la structure produit de μ, on montre que pour μ-presque tout $\xi \in \partial I$, il existe $f'(\xi) \in]0, +\infty[$ telle que $f'(\xi) = f'_{\partial A}(\xi)$ pour tout bord d'appartement ∂A contenant ξ.

En utilisant la structure de l'ensemble des géodésiques de ∂I et en adaptant la preuve classique du théorème de Rademacher-Stepanov dans $\mathbb{R}^n$, on démontre que f est conforme, c'est-à-dire que pour μ-presque tout $\xi \in \partial I$, $f'(\xi) = L_f(\xi) = l_f(\xi)$ où

$$L_f(\xi) = \limsup_{r \to 0} \frac{\sup\{\delta(f(\xi), f(\eta)); \delta(\xi, \eta) \leqslant r\}}{r}$$
$$l_f(\xi) = \liminf_{r \to 0} \frac{\inf\{\delta(f(\xi), f(\eta)); \delta(\xi, \eta) \geqslant r\}}{r}.$$

La dernière étape consiste à prouver un théorème de type Liouville en utilisant le birapport de J. Ferrand et un critère à la Sullivan.

4.3. Groupes hyperboliques et conjecture de Cannon

Soit G un groupe finiment engendré et soit S une famille de générateurs de G. Alors, nous disons que G est un groupe Gromov-hyperbolique si son graphe de Cayley relatif à S et muni de sa distance naturelle est un espace métrique Gromov-hyperbolique. Notons que cette définition ne dépend pas du système de générateurs considéré, puisque deux graphes de Cayley associés à deux familles différentes sont quasi-isométriques et que la notion de Gromov-hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie. Le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure sectionnelle constante et strictement négative est un exemple typique de groupe Gromov hyperbolique.

La conjecture de Cannon peut s'énoncer ainsi.

Conjecture de Cannon (Version 1). — *Soit G un groupe hyperbolique dont le bord ∂G est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. Alors, G agit par isométries de façon discrète et cocompact sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.*

D'après les travaux de D. Sullivan [33], cette conjecture peut, de manière équivalente, s'énoncer de la façon suivante :

CONJECTURE DE CANNON (VERSION 2). — *Soit G un groupe hyperbolique dont le bord ∂G est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. Alors, ∂G (muni d'une distance dans sa jauge conforme) est quasi-symétrique à $\mathbb{S}^2$.*

Dans [4], M. Bonk et B. Kleiner démontrent la conjecture de Cannon sous l'hypothèse supplémentaire que la jauge conforme de ∂G contient une métrique de Loewner. Leur argument repose sur le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. — *Soit $Q \geqslant 2$ et soit Z un espace métrique Ahlfors-régulier de dimension Q. Supposons en outre que Z soit homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. Si la jauge conforme de Z contient une métrique qui est Q-Loewner, alors $Q = 2$ et Z est quasi-symétrique à $\mathbb{S}^2$.*

D'après ces résultats, la conjecture de Cannon est résolue si nous pouvons répondre par l'affirmative à la question suivante :

Soit G un groupe hyperbolique dont le bord est connexe et sans point de coupure local. Alors, la jauge conforme de ∂G contient-elle une métrique de Loewner ?

Il faut noter qu'il existe des groupes hyperboliques dont la jauge conforme du bord ne contient pas de métriques de Loewner. Ces groupes sont construits comme des produit amalgamés de groupes hyperboliques et ne vérifient pas les hypothèses de la question précédente (Voir [10] et le paragraphe suivant).

Dans [5], M. Bonk et B. Kleiner démontrent la conjecture de Cannon sous l'hypothèse supplémentaire que la dimension conforme du bord est atteinte. Notons que c'est le cas lorsque la jauge conforme du bord contient une métrique de Loewner. Le résultat de Bonk et Kleiner reposent sur le théorème 4.4, les travaux de Keith et Laakso et le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5. — *Soit Z un espace métrique Ahlfors-régulier de dimension $Q > 1$. Supposons que Z admet une action uniformément quasi-Möbius G qui est sans point fixe et pour laquelle l'action sur les triplets de points de Z est cocompacte. S'il existe une famille de chemins (non constants) dans Z qui est de Q-module non nulle, alors Z est Q-Loewner.*

L'idée principale de la démonstration est de "transporter" la famille de courbes de module non nul grâce à l'action quasi-Möbius, afin de construire des pinceaux de courbes partout dans l'espace. Ceci permet alors de démontrer la propriété de Loewner, qui est liée à l'existence de telles familles de courbes (voir la discussion dans le premier paragraphe).

Considérons maintenant un groupe hyperbolique G dont le bord ∂G est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$ et dont la dimension conforme Q du bord est atteinte. Nous supposons toujours que ∂G est muni d'une métrique visuelle qui en fait un espace Ahlfors-régulier. Donc, d'après le théorème 3.5, il existe un espace tangent faible de ∂G qui possède une famille de courbes de Q-module non nulle. Or, l'action canonique du groupe

G sur son bord est uniformément quasi-Möbius et elle induit sur $\mathrm{Tri}(\partial G)$ une action discrète et cocompacte. Donc, d'après le théorème 3.6, tout espace tangent faible de ∂G est quasi-Möbius équivalent à ∂G (privé d'un point). Comme l'image par un homéomorphisme quasi-Möbius (entre deux espaces métriques localement compacts et Q-Ahlfors-réguliers) d'une famille de courbes de Q-module non nul est encore une famille de courbes de Q-module non nul, ∂G possède une famille de courbes de Q-module non triviale. Donc, ∂G est Q-Loewner. En appliquant le théorème 4.4, il vient que ∂G est quasi-symétrique à $\mathbb{S}^2$. Voir [5] pour plus de détails.

4.4. Cohomologie l_p des groupes Gromov-hyperboliques

Dans [10], sous certaines hypothèses naturelles sur un espace métrique compact Z, on définit la cohomologie l_p de la jauge conforme $\mathcal{J}$ de Z et on démontre que si cette jauge contient une métrique de Loewner, la dimension critique de cohomologie l_p de $\mathcal{J}$ est égale à la dimension conforme de $\mathcal{J}$. On en déduit qu'il existe des groupes Gromov-hyperboliques dont la jauge conforme ne contient pas de métrique de Loewner. Nous allons maintenant décrire plus précisément ces résultats.

Soit (Z, d) un espace métrique compact. Dans toute cette partie, on suppose que

(i) Z est uniformément parfait, c'est-à-dire qu'il existe $C_0 > 0$ telle que, pour tout $z \in Z$, tout $r \in]0, \operatorname{diam} Z[$, $B(z, r) \setminus B(z, C_0^{-1} r) \neq \emptyset$.

(ii) Z porte une mesure doublante μ, c'est-à-dire il existe $C_1 > 0$ tel que $\mu(B(z, 2r)) \leqslant C_1 \mu(B(z, r))$ pour tout $z \in Z$, tout $r \in]0, \operatorname{diam} Z[$.

Remarquons que ces propriétés sont invariantes par quasi-symétrie et donc vérifiées par toutes les métriques de la jauge conforme de (Z, d). Notons aussi que le bord d'un groupe Gromov-hyperbolique muni d'une métrique visuelle satisfait (i) et (ii). Ceci est un résultat de M. Coornaert.

Nous allons maintenant associer à (Z, d) un graphe qui sera Gromov-hyperbolique et dont le bord sera Z. Supposons que $\operatorname{diam} Z = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une collection finie de points z_i^n, $i = 1, \ldots, k_n$ telle que

- $d(z_i^n, z_j^n) \geqslant e^{-n}$ si $i \neq j$;
- $Z = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(z_i^n, e^{-n})$.

On pose $B_i^n = B(z_i^n, e^{-n})$ et on note S_n l'ensemble des boules B_i^n, $i = 1, \ldots, k_n$ (c'est-à-dire les boules de la génération n).

Soit G_d le graphe construit de la façon suivante :

(i) Ses sommets sont les boules B_i^n, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k_n$;

(ii) Deux de ses sommets B et B' sont joints par une arête si $B \bigcap B' \neq \emptyset$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B, B' \in S_n$ ou $B \in S_n$ et $B' \in S_{n+1}$.

Notons que, puisque μ est doublante, le graphe G_d est à valence bornée. Nous montrons alors que G_d est hyperbolique au sens de Gromov et que son bord s'identifie avec Z. Pour le dernier point, il suffit de voir qu'un rayon géodésique de G_d est une suite de boules B_n de Z telles que $B_n \bigcap B_{n+1} \neq \varnothing$ et telles que la suite des rayons tend vers 0. De plus, d est une métrique visuelle de paramètre e. Si d' est une métrique dans $\mathscr{J}(Z,d)$, alors les graphes G_d et $G_{d'}$ associés à d et d' respectivement sont quasi-isométriques. Ceci provient du fait que Z est uniformément parfait et d'un résultat récent de Bonk-Heinonen-Koskela [2] qui généralise le résultat de F. Paulin utilisé dans la section 4.2.

De manière classique, on peut associer canoniquement au graphe hyperbolique G_d un complexe géométrique simplicial uniformément contractile X_d, appelé complexe de Rips, et on peut définir les groupes de cohomologie l_p ($p \in [1,+\infty]$) de G_d comme ceux (définis classiquement en topologie algébrique) de X_d. Si $d' \in \mathscr{J}(Z,d)$, comme G_d et $G_{d'}$ sont quasi-isométriques, il en est de même des complexes de Rips X_d et $X_{d'}$. D'où, les groupes de cohomologie l_p de X_d et $X_{d'}$ sont isomorphes. On définit les groupes de cohomologie l_p de la jauge conforme de (Z,d) comme étant les groupes de cohomologie l_p de X_d (et donc de G_d). On les note $l_pH^{\alpha}(\mathscr{J}(Z,d))$. D'après ce qui précède, à isomorphisme près, cette définition ne dépend pas du choix de la métrique dans $\mathscr{J}(Z,d)$. Notons que si Z est le bord d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ, alors la cohomologie de $\mathscr{J}(Z,d)$ se confond avec la cohomologie usuelle de Γ.

On s'intéresse plus particulièrement au cas $\alpha = 1$. Alors, à isomorphisme près,

$$l_pH^1(\mathscr{J}(Z,d)) = \left\{f : V(G_d) \to \mathbb{R}; df \in l_p(E(G_d))\right\} / (l_p(V(G_d)) + \mathbb{R}),$$

où $V(G_d)$ (resp. $E(G_d)$) est l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de G_d et $df(e) = f(e_+) - f(e_-)$ où e est une arête orientée de G_d d'extrémités e_+ et e_-. On définit la dimension l_p critique de $\mathscr{J}(Z,d)$ par

$$p(\mathscr{J}(Z,d)) = \inf\left\{p \in [1,+\infty[; l_pH^1(\mathscr{J}(Z,d)) \neq \{0\}\right\}.$$

La dimension l_p critique est un invariant de quasi-symétrie, tout comme la dimension conforme de Pansu. Une question naturelle est de déterminer sous quelle(s) condition(s) ces deux invariants coïncident.

À partir de maintenant, on suppose que Z est Q-régulier. On définit le p-espace de Besov de (Z,d) (que l'on note $B_p(d)$) par

$$B_p(d) = \left\{u : Z \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \|u\|_{p,d} < +\infty\right\} / \mathbb{R},$$

où $\|u\|_{p,d}$ est la norme définie par

$$\|u\|_{p,d} = \left(\int_{Z\times Z} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{2Q}} d\mu(x) d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que si Z est la sphère standard S^n, alors $B_p(d)$ correspond à l'espace de Besov classique $B^{\frac{n}{p}}_{p,p}(S^n)$.

THÉORÈME 4.6 ([10]). — *Sous les hypothèses précédentes sur (Z,d), pour $p \in [1,+\infty[$, il existe un isomorphisme d'espaces de Banach entre $l_pH^1(\mathscr{J}(Z,d))$ et $B_p(d)$.*

Expliquons rapidement comment une fonction dans $l_pH^1(\mathcal{J}(Z,d))$ induit sur Z une fonction dans $B_p(d)$, et vice-versa. Soit $f \in l_pH^1(\mathcal{J}(Z,d))$ et soit r un rayon géodésique. On pose $f_\infty(r) = \lim_{n\to+\infty} f(r(n))$. Remarquons que cette limite ne dépend pas du choix du représentant dans la classe de r. Réciproquement, soit $g \in B_p(d)$. On définit f sur G_d par $f(B) = \frac{1}{\mu(B)}\int_B g(z)d\mu(z)$ pour toute boule B sommet de G_d. Pour montrer que $f \in l_pH^1\mathcal{J}(Z,d)$, on utilise l'estimation suivante :

$$C^{-1}\frac{1}{d(\xi,\eta)^{2Q}} \leqslant \sum_{e\in E(G_d)} \frac{\chi_{B(e_-)}(\xi)\chi_{B(e_+)}(\eta)}{\mathcal{H}(B(e_-))\mathcal{H}(B(e_+))} \leqslant C\frac{1}{d(\xi,\eta)^{2Q}}$$

où e est une arête orientée de G_d d'extrémités e_+ et e_-, et $B(e_+)$ (respectivement $B(e_+)$) est la boule de Z correspondante à e_+ (respectivement e_-).

Signalons qu'un des ingrédients de la preuve du théorème 4.6 est une version discrète de l'inégalité de Strichartz. Fixons $a > 1$. Alors, il existe $C > 0$ telle que pour toute suite $(u_n) \in l_1(\mathbb{N})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big|\sum_{k\geqslant n} u_k\Big|^p a^n \leqslant C\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p a^n.$$

Ceci permet de montrer que si $f_\infty = 0$ presque partout sur Z, alors $f \in l_p(V(G_d))$.

Si $p > Q$, les fonctions lipschitziennes de Z sont dans $B_p(d)$. Donc, $p(\mathcal{J}(Z,d)) \leqslant Q$.

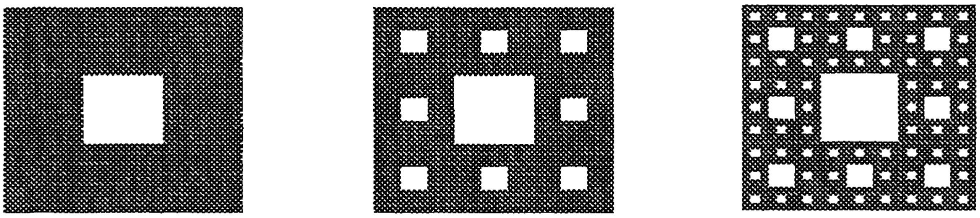
THÉORÈME 4.7. — *Sous les hypothèses précédentes sur (Z,d), si la jauge conforme de (Z,d) contient une métrique de Loewner de dimension Q, alors $B_p(d) \neq \{0\}$ si et seulement si $p > Q$. En particulier, $p(\mathcal{J}(Z,d)) = \mathrm{Cdim}(\mathcal{J}(Z,d)) = Q$.*

Comme application, on montre qu'il existe des groupes Gromov-hyperboliques (qui sont des produits amalgamés de groupes Gromov-hyperboliques bien choisis) pour lesquels la dimension l_p critique et la dimension conforme du bord ne coïncident pas. D'où, la jauge conforme du bord de ces groupes hyperboliques ne possède pas de métrique de Loewner.

5. Le tapis de Sierpinski

Le tapis de Sierpinki est l'ensemble obtenu de la manière suivante. Soit $\mathcal{T}_0$ le carré unité $[0,1]^2$ du plan complexe. Nous le subdivisons en 9 carrés de même tailles (c'est-à-dire de longueur de côté $1/3$), puis nous lui retirons le carré central. À cette étape de construction, nous avons obtenu un ensemble noté $\mathcal{T}_1$ qui est formé de 8 carrés de longueur de côtés $1/3$. Le principe de construction consiste à appliquer à chaque étape cette méthode. Ainsi, $\mathcal{T}_j$ est formé de 8^j carrés de longueur de côté 3^{-j} et $\mathcal{T}_{j+1}$ est obtenu en subdivisant chaque carré de $\mathcal{T}_j$ en 9 carrés égaux (et donc de longueur de côté 3^{-j-1})puis en enlevant celui du milieu. Le tapis de Sierpinski $\mathcal{T}$ est alors défini par

$$\mathcal{T} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_j.$$



Les ensembles $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$

L'ensemble $\mathscr{S}$ est un compact de dimension de Hausdorff $\log 8/\log 3$ (pour la distance euclidienne induite). De plus, sa mesure de Hausdorff est Ahlfors-régulière (de dimension $\log 8/\log 3$). L'intérêt pour nous d'étudier les structures conformes du tapis de Sierpinski repose dans le résultat suivant de M. Kapovich et B. Kleiner [22], qui fait le lien avec notre discussion sur la conjecture de Cannon et qui montre que le tapis est un modèle topologique pour le bord de certains groupes hyperboliques.

THÉORÈME 5.1. — *Soit G un groupe hyperbolique à un bout et dont le bord est sans point de coupure local et de dimension topologique* 1. *Alors, le bord ∂G est soit homéomorphe au tapis de Sierpinski, soit homéomorphe à l'éponge de Menger.*

L'éponge de Menger est construit de façon similaire au tapis de Sierpinki, mais en partant du cube unité de $\mathbb{R}^3$. En particulier, contrairement au tapis de Sierpinski, l'éponge de Menger n'est pas planaire. Nous supposerons que dans la suite, le tapis de Sierpinski est muni de la distance euclidienne induite (noté d) et de la mesure de Hausdorff (notée μ) associée (qui est, rappelons-le, Ahlfors-régulière de dimension $\log 8/\log 3$). Le but de ce paragraphe est de démontrer que que la dimension conforme Ahlfors-régulière de $\mathscr{S}$ est strictement inférieure à sa dimension de Hausdorff. Ceci découle des deux observations suivantes :

Fait 1. Toute famille de courbes dans $\mathscr{S}$ est de 1-module nulle.

Fait 2. Tout espace tangent faible de $\mathscr{S}$ contient une copie de $\mathscr{S}$.

En effet, il en résulte que tout espace tangent faible ne peut avoir une famille de courbes ayant un uniformément 1-grand module. D'où, d'après le théorème 3.4, $\mathrm{Cdim}_{AR}(\mathscr{S}) < \mathrm{Hdim}(\mathscr{S})$. Rappelons que dans ce cas, la dimension conforme Ahlfors-régulière et la dimension d'Assouad coïncident.

Commençons par démontrer le

THÉORÈME 5.2. — *Soit* Γ *une famille de courbes non triviales dans* $(\mathscr{S}, d, \mu)$, *alors* $mod_1(\Gamma) = 0$.

Démonstration. — Commençons par quelques remarques élémentaires :

Posons $L = \{(x, 1/2) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Ce segment coupe en deux $[0,1]^2$. À la première étape de construction, L se voit retirer le segment central ouvert de taille $1/3$, et ainsi de suite. Par conséquent $L \cap \mathscr{S}_j$ est la j-ième étape de construction d'un ensemble de

Cantor triadique, et L est contenu dans 2^j carrés de taille $1/3^j$. La bande horizontale centrée en L de largeur $1/3^j$ intersectée avec $\mathcal{T}$ peut donc se recouvrir par 2^j carrés de taille $1/3^j$. De manière plus générale, nous pouvons aisément voir que tout segment de la forme :

$$h_k^i = \left\{ \left(t\,,\ \frac{1}{2} + \frac{k}{3^i} \right) \mid t \in [0,1] \right\} \quad \text{ou} \quad v_k^i = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{3^i}\,,\ t \right) \mid t \in [0,1] \right\}$$

intersecte le tapis en une juxtaposition de 3^j ensembles de Cantor triadiques de même taille $1/3^j$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$. Il en résulte que, pour tout $l \geqslant j$, la bande centrée en ce segment de largeur $1/3^l$ pourra donc être recouverte par $3^j \cdot 2^{l-j}$ carrés de taille $1/3^l$.

Considérons dans la suite de cette démonstration, que le Tapis de Sierpinski est la partie du plan Euclidien $(O, \vec{x}, \vec{y})$ construite comme décrit précédemment à partir du carré $[0,1]^2$; et définissons les applications "bande" ($\mathcal{B}$) et translation (trans), qui à un segment h_k^i (le cas des "bandes" verticales se traitent de façon similaire), et à un réel λ associent la bande définie de la manière suivante :

$$\mathcal{B}(h_k^i, \lambda) = \left\{ h_k^i + t \cdot \lambda \cdot \vec{y}\,,\ t \in [0,1] \right\}$$

et le translaté de ce segment par le vecteur $\lambda.\vec{y}$:

$$\operatorname{trans}\left(h_k^i, \lambda \right) = \left\{ h_k^i + \lambda.\vec{y} \right\}$$

Ainsi, $\mathcal{B}(h_k^i, \lambda) \bigcup \mathcal{B}(h_k^i, -\lambda)$ est la bande centrée en h_k^i de largeur $2.|\lambda|$. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, nous noterons $\lambda(p) = \frac{9}{10} \frac{1}{2.3^p} \vec{y}$. D'après les remarques initiales et l'Ahlfors-régularité de μ (de dimension $\log 8/\log 3$), nous avons pour p assez grand

$$\mu(\mathcal{B}(h_k^i, \lambda(p))) \leqslant C.3^j 2^{p-j} (3^{-p})^{\log 8/\log 3} = C.(3/2)^j 2^p 8^{-p}. \tag{2}$$

où $j \in \mathbb{N}$ dépend de k et i (mais pas de p) et où C dépend de la constante d'Ahlfors-régularité de μ.

Posons $Q_i = \bigcup_k h_k^i \bigcup v_k^i$. Alors, Q_i forme ainsi un réseau du carré $[0,1]^2$, d'autant plus fin que i est grand. Supposons qu'il existe Γ, famille de courbes de $\mathcal{T}$, telle que $\mathrm{Mod}_1(\Gamma) > 0$. Comme dans la démonstration du théorème 2.2, nous pouvons supposer que

$$\exists\, \delta > 0, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma, \quad \operatorname{diam} \gamma \geqslant \delta.$$

Choisissons i tel que $\frac{\sqrt{2}}{3^i}$ est très petit devant δ. Il est clair que tout γ intersecte Q_i. Nous avons donc :

$$\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k^h \bigcup \Gamma_k^v \quad \text{avec} \quad \Gamma_k^h = \left\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma \bigcap h_k^i \neq \emptyset \right\}\ ,\ \Gamma_k^v = \left\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma \bigcap v_k^i \neq \emptyset \right\}$$

Comme $\mathrm{Mod}_1(\Gamma) = \mathrm{Mod}_1\left(\bigcup_n \Gamma_k^h \bigcup \Gamma_k^v \right) \leqslant \sum_k \left(\mathrm{Mod}_1(\Gamma_k^h) + \mathrm{Mod}_1(\Gamma_k^v) \right)$ et que Γ_k^h et Γ_k^v jouent des rôles similaires, il nous suffit de montrer que $\mathrm{Mod}_1(\Gamma_k^h)$ est nul.

Soit $q \in \mathbb{N}$, montrons que $\mathrm{Mod}_1(\Gamma_q^h) = 0$. Pour cela, nous allons nous restreindre aux courbes qui intersectent trans $\left(h_q^i, \lambda(p)\right)$. En fait, remarquons que pour toute courbe γ dans Γ_q^h, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\gamma \bigcap \text{trans}\left(h_q^i, \epsilon\lambda(p)\right) \neq \emptyset$$

En effet, en tant que réunion finie d'ensembles de Cantor (au plus communs en 1 point deux à deux), $h_q^i \bigcap \mathcal{T}$ est discret. Si $\gamma \subset h_q^i$, γ est triviale, ce qui n'est pas possible puisque $\operatorname{diam} \gamma \geqslant \delta$. Donc pour toute courbe γ de Γ, il existe a tel que $\gamma(a) = (x_a, y)$ avec $\mid y - \frac{1}{2} - \frac{q}{3^i} \mid = \tau > 0$. Comme $\gamma \bigcap h_q^i \neq \emptyset$, il existe b tel que $\gamma(b) = (x_b, \frac{1}{2} + \frac{q}{3^i})$. En choisissant $p > i$ tel que $\mid \tilde{y}(p) \mid < \tau$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure le résultat. Ainsi :

$$\Gamma_q^h = \bigcup_{p>i\,,\,\epsilon\in\{-1,1\}} \Gamma(p,\epsilon) \quad \text{avec} \quad \Gamma(p,\epsilon) = \left\{\gamma \in \Gamma_q^h\,,\ \gamma \bigcap \text{trans}(h_q^i, \epsilon\cdot\lambda(p)) \neq \emptyset\right\}$$

Notons que si $p < r$, (*) $\Gamma(p,\epsilon) \subseteq \Gamma(r,\epsilon)$ et

$$\gamma \in \Gamma(p,\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \forall\, r > p\,,\ \exists\, [a,b] \subset \mathbb{R} \text{ intervalle compact t.q.}$$

$$\gamma_{|[a,b]} \subset \mathcal{B}\left(h_q^i, \epsilon\cdot\lambda(r)\right) \quad , \quad \gamma(a) \in h_q^i \quad \text{et} \quad \gamma(b) \in \text{trans}(h_q^i, \epsilon.\lambda(r)).$$

Cela implique que :

$$L(\gamma_{|[a,b]}) \geqslant d\left(\gamma(a), \gamma(b)\right) \geqslant \|\lambda(r)\| = \frac{9}{10}\frac{1}{2.3^r}.$$

Puisque le module d'une famille de courbes est toujours inférieur au module de ces mêmes courbes dont le support à été restreint, nous pouvons limiter le support de nos courbes aux intervalles $[a,b]$, vérifiant les hypothèses ci-dessus, et montrer que le 1-module de cette nouvelle famille est nul. Nous travaillons donc maintenant, avec la famille des courbes de $\Gamma(p,\epsilon)$, qui sont contenues dans $\mathcal{B}\left(h_q^i, \epsilon.\lambda(p)\right)$.

Construisons maintenant des fonctions admissibles pour cette famille de courbes. Nous venons de minorer la longueur des courbes de cette famille par $|\lambda(r)|$ pour tout $r > p$. Définissons $f^{[r,\epsilon]} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, par

$$f^{[r,\epsilon]}(x) = \begin{cases} |\lambda(r)|^{-1} & \text{si } x \in \mathcal{B}\left(h_q^i\,,\ \epsilon.\lambda(r)\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est mesurable et pour $\gamma \in \Gamma(p,\epsilon)$, et $r > p$, on peut restreindre le support de γ comme (*).

$$\int_\gamma f^{[r,\epsilon]} ds \geqslant \int_{\gamma_{|[a,b]}} f^{[r,\epsilon]} ds = \int_0^{L(\gamma)} f^{[r,\epsilon]} \circ \gamma(s) dt \geqslant |\lambda(r)|^{-1} \cdot |\lambda(r)| = 1$$

Donc si $r > p$, $f^{[r,\epsilon]}$ est admissible pour $\Gamma(p,\epsilon)$. Montrons maintenant que $\mathrm{Mod}_1(\Gamma(p,\epsilon)) = 0$, pour tout p, et tout ϵ. Or, d'après (2), nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{T}} f^{[r,\epsilon]} d\mu &= \int_{\mathscr{B}(h^i_q,\epsilon.\lambda(r))} |\lambda(q)|^{-1} d\mu \\ &\leqslant 3^j.2^{r-i}\mu(\mathscr{B}(h^i_q,\epsilon\cdot\lambda(r)))\mid\lambda(q)\mid^{-1} \\ &\leqslant 3^j.2^{r-i}.\frac{1}{8^r}.\frac{10}{9}.2.3^r\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $r \to +\infty$.

Donc pour tout p, $\mathrm{Mod}_1(\Gamma(p,\epsilon)) = 0$ et

$$0 \leqslant \mathrm{Mod}_1(\Gamma^h_q) \leqslant \sum_{p,\epsilon} \mathrm{Mod}_1\,(\Gamma(p\,,\,\epsilon)) = 0.$$

On montre de la même manière que $\mathrm{mod}_1(\Gamma^v_n) = 0$

$$\mathrm{Mod}_1(\Gamma) = \mathrm{Mod}_1(\Gamma^v_p \bigcup \Gamma^h_n) \leqslant \mathrm{Mod}_1\,\Gamma^h_p + \mathrm{Mod}_1\,\Gamma^v_p = 0.$$

□

Corollaire 5.3. — *Un espace métrique composé d'un nombre dénombrable de tapis communs deux à deux en au plus une arête n'admet que des familles de courbes de 1-module nul.*

Ici, l'espace est muni de la distance euclidienne induite et de la mesure de Hausdorff associée (qui est Ahlfors-régulière de dimension $\log 8/\log 3$). Nous pouvons en effet nous ramener à une union de familles de courbes incluses dans des tapis dont la somme des 1-modules majore le 1-module de la famille initiale.

Pour conclure, démontrons maintenant le

Théorème 5.4. — *Tout espace faiblement tangent à $(\mathscr{T}, d, \mu)$ contient une boule ouverte qui est homothétique à une juxtaposition de tapis, et admet une mesure* $\log 8/\log 3$*-Ahlfors régulière.*

Démonstration. — Soit (Y, d_Y, μ_Y, y) un espace tangent à $(\mathscr{T}, d, \mu)$. Il existe donc

$$\begin{cases}(Z, d_Z) \text{ espace métrique propre et un point } q \in Z \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots) \text{ et } (s_1, \dots, s_n, \dots) \text{ des réels} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ des points de } \mathscr{T} \\ (i, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \text{ des isométries} (\mathscr{T}, \lambda_n.d = d_n) \xrightarrow{i_n} (Z, d_Z)\,,\, (Y, d_Y) \xrightarrow{i} (Z, d_Z)\end{cases}$$

tels que $i_n(x_n) = i(y) = q$ pour tout n et il y a convergence de la suite $(\mathscr{T}, d_n, s_n\mu, x_n)$ vers (Y, d_Y, μ_Y, y) au sens de la définition 3.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j(n) = \min\left\{ j \in \mathbb{N} \mid \left[\frac{\lambda_n}{3^{j+1}}\right] = 0\right\}$. Dans la $j(n)$-ième étape de construction du tapis, x_n appartient à un carré C_n de $\mathscr{T}^{j(n)}$ de taille $1/3^{j(n)}[C_n \in$

$\mathcal{T}^{j(n)}$] pour d et de taille $\lambda_n/3^{j(n)}$ pour d_n. Par choix de $j(n)$, nous avons $\lambda_n/3^{j(n)} \in [1,3]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Chaque carré C de $\mathcal{T}^{j(n)}$ définit un espace métrique $(C \bigcap \mathcal{T}, \lambda_n.d)$ isométrique à $(\mathcal{T}, \frac{\lambda_n}{3^{j(n)}}.d)$. On se ramène ainsi à une convergence d'espaces métriques compacts uniformément bornés. Considérons $\mathcal{C}_n$ la réunion de C_n et de tous les carrés de $\mathcal{T}^{j(n)}$ ayant au moins un point commun avec C_n, le tout intersecté par $\mathcal{T}$. Ce nouvel espace métrique vérifie deux propriétés intéressantes, à savoir qu'il est de diamètre fini, plus précisément, $\mathrm{diam}(\mathcal{C}_n, \lambda_n d) \leqslant \sqrt{2}.9$, et il contient la boule centrée en x_n de rayon 1. Par construction, $\mathcal{C}_n$ est une réunion finie de tapis tous isométriques à $(\mathcal{T}, \frac{\lambda_n}{3^{j(n)}}.d)$. Comme $\mathcal{C}_n$ ne peut prendre qu'un fini de configurations, choisissons une extraction qui nous assure de rester toujours dans la même configuration. Pour simplifier la notation, supposons que nous travaillons sur cette suite extraite. Ainsi pour tout n, $(\mathcal{C}_n, d_n)$ est isométrique à $(\mathcal{C}, \frac{\lambda_n}{3^{j(n)}}.d)$, $\mathcal{C}$ étant la réunion de tapis de taille 1, deux à deux communs en au plus un segment. Remarquons que la convergence (Gromov-Hausdorff) de la suite $\{(\mathcal{C}_n, \lambda_n.d)\}$ équivaut à la convergence de la suite $\left\{(\mathcal{C}, \frac{\lambda_n}{3^{j(n)}}.d)\right\}$. On a par construction $\mathrm{diam}(\mathcal{C}_n) \leqslant \sqrt{2}.9$, donc pour tout n, $i_n(\mathcal{C}_n) \subset B(q, \sqrt{2}.9)$.Or, $B(q, \sqrt{2}.9)$ est compact car (Z, d_Z) est propre, donc l'espace des compacts de $B(q, \sqrt{2}.9)$ muni de la distance de Hausdorff est compact, $i_n(\mathcal{C}_n)$ est compact en tant qu'isométrie de compacts. Donc $\{(i_n(\mathcal{C}_n)\}$, suite d'espaces compacts de Z admet une sous suite convergente, pour la distance de Hausdorff, impliquant par la même occasion la convergence au sens de Gromov-Hausdorff de cette sous-suite.

Considérons encore une fois l'extraction réalisée. On peut extraire de nouveau de la suite $\left\{(\mathcal{C}, \frac{\lambda_{\phi(n)}}{3^{j(\phi(n))}}.d)\right\}$ une sous-suite qui fasse converger le coefficient $\frac{\lambda_{\phi(n)}}{3^{j(\phi(n))}}$ vers λ, faisant ainsi converger la suite vers $(\mathcal{C}, \lambda.d)$. Ainsi, cette extraction converge au sens de Gromov-Hausdorff et il existe donc une isométrie $I : (\mathcal{C}, \lambda.d) \longrightarrow (\lim(i_n(\mathcal{C}_n), d_Z)$

Travaillons maintenant sur la suite $\left\{i_n(X) \bigcap B(q, \frac{2}{3})\right\}$, convergente par définition, et considérons effectuées, toutes les extractions précédentes, faisant converger la suite $\left\{(\mathcal{C}, \frac{\lambda_{\phi(n)}}{3^{j(\phi(n))}}.d)\right\}$. Par construction de $\mathcal{C}_n$, pour tout $x \in X \setminus \mathcal{C}_n$, $\frac{\lambda_n}{3^{j(n)}} \cdot d(x, x_n) \geqslant 1$ donc :

$$\begin{aligned} i(Y) \bigcap B\left(q, \frac{2}{3}\right) &= \lim_{n\to+\infty}^{G.H.} i_n(X) \bigcap B\left(q, \frac{2}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty}^{G.H.} i_n(\mathcal{C}_n) \bigcap B\left(q, \frac{2}{3}\right) \\ &= I(\mathcal{C}) \bigcap B\left(q, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc il existe c dans $\mathcal{C}$ tel que $I(B(c, \frac{2}{3})) = i(B(y, \frac{2}{3}))$.

Par conséquent la boule $B(y, \frac{2}{3})$ de (Y, l) est homothétique à une union de tapis. Nous allons maintenant voir que μ_∞ est $\log 8/\log 3$-Ahlfors régulière. Nous utiliserons les propriétés élémentaires de la convergence faible de mesure (pour cela voir par exemple [27], pages 18-19). Notons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{s_n}{\lambda_n^\alpha}\frac{r^\alpha}{C} \leqslant \mu_n[B_{d_n}(x, r)] \leqslant \frac{s_n}{\lambda_n^\alpha} C r^\alpha$$

Par propriété de la convergence faible, nous pouvons borner s_n/λ_n^α. Il s'agit ainsi d'une convergence d'espaces $\log 8/\log 3$-Ahlfors réguliers de même constante. Donc μ_∞ est $\log 8/\log 3$-Ahlfors régulière. □

Il vient ainsi que toute famille de courbes incluses dans cette boule $B(y, 2/3)$ se plonge en une famille de courbes incluses dans une juxtaposition de Tapis de Sierpinski, dont on peut restreindre le support, majorant ainsi son 1-module par le 1-module d'une famille de courbes du Tapis. Donc, aucun espace faiblement tangent au tapis ne peut donc admettre un uniformément grand 1-module.

Références

[1] C. J. Bishop, J. Tyson, *Conformal dimension of the antenna set*, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 129 (2001), 3631–3636.

[2] M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*, Astérisque 270 (2001).

[3] M. Bonk, B. Kleiner, *Rigidity of quasi-möbius group actions*, Journal of Differential Geometry Volume 61 (2002), 81–106.

[4] M. Bonk, B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two dimensionnal metric spheres*, Inventionnes Mathematicae Volume 150 (2002), 127–183.

[5] M. Bonk, B. Kleiner, *Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary*, Preprint.

[6] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, Geometric And Functional Analysis Volume 7 (1997), 245–268.

[7] M. Bourdon, H. Pajot, *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings*, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 127 (1999), 2315–2324.

[8] M. Bourdon, H. Pajot, *Rigidity of quasi isometries for some hyperbolic buildings*, Commentarii Mathematici Helvetici Volume 75 (2000), 701–736.

[9] M. Bourdon, H. Pajot, *Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry*, in "Rigidity in Dynamics and Geometry", edité par M. Burger and A. Iozzi, Springer (2002), 1–15.

[10] M. Bourdon, H. Pajot, *Cohomologie l_p et espaces de Besov*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik Volume 558 (2003), 85–108.

[11] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33** (2001), American Mathematical Society.

[12] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric spaces*, Geometric and Functional Analysis Volume 9 (1999), 428–517.

[13] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes, Les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1441 (1990), Springer-Verlag.

[14] G. David, S. Semmes, *Fractured fractals and broken dreams*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications Volume 7, Oxford University Press (1997).

[15] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics Volume 83 (1990), Birkhauser.

[16] J. Heinonen, *A capacity estimate on Carnot groups*, Bulletin des Sciences Mathématiques Volume 119 (1995), 475–484.

[17] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer (2001).

[18] J. Heinonen, P. Koskela, *Definitions of quasiconformality*, Inventiones Mathematicae Volume 120 (1995), 61–79.

[19] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Matematica Volume 181 (1998), 1–61.

[20] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J. Tyson, *Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings*, Journal d'Analyse Mathématique Volume 85 (2001), 87–139.

[21] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander condition*, Duke Mathematical Journal Volume 53 (1986), 503–523.

[22] M. Kapovich, B. Kleiner, *Hyperbolic groups with low-dimensional boundary*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure Volume 33 (2000), 647–669.

[23] S. Keith, T. Laakso, *Conformal Assouad dimension and modulus*, Preprint (2003).

[24] A. Korányi, H. M. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Advances in Mathematics Volume 111 (1995), 1–87.

[25] T. Laakso, *Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary $Q > 1$ admitting weak Poincaré inequality*, Geometric and Functional Analysis Volume 10 (2000), 111–123.

[26] C. Loewner, *On the conformal capacity in space*, Journal of Mathematical Mechanic Volume 8 (1959), 411–414.

[27] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press (1995).

[28] J. Mitchell, *On Carnot-Carathéodory metrics*, Journal of Differential Geometry Volume 21 (1985), 35–45.

[29] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematical Studies Volume 78, Princeton University Press (1973).

[30] H. Pajot, *Analyse dans les espaces singuliers ; Rectifiabilité ; Géométrie quasi-conforme et géométrie hyperbolique*, Texte pour l'habilitation à diriger des recherches, Université de Cergy-Pontoise (2002).

[31] P. Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang 1*, Annals of Mathematics Volume 129 (1989), 1–60.

[32] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Revista Mathematica Iberoamericana Volume 16 (2000), 243–279.

[33] D. Sullivan, *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, dans "Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook conference", Princeton University Press (1981), 465–496.

[34] J. Tyson, *Quasiconformality and quasisymmetry in metric spaces*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Volume 23 (1998), 525–548.

[35] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lectures Notes in Mathematics Volume 229 (1971).

[36] N. Varopoulos, *Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Volume 309 (1987), 519–521.

Guillaume LUPO-KREBS
22 rue saint maximin
69003 LYON (France)
`guillaume.lupo.krebs@ens-lyon.fr`

Hervé PAJOT
Université de Grenoble I
INSTITUT FOURIER
UMR5582 (UJF-CNRS)
100, rue des Maths
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
`Herve.Pajot@ujf-grenoble.fr`