Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Dario Cordero-Erausquin

Quelques exemples d’application du transport de mesure en géométrie euclidienne et riemannienne

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), p. 125-152

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2003-2004__22__125_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 2003-2004, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **22** (2004) 125–152

QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION DU TRANSPORT DE MESURE EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET RIEMANNIENNE

Dario CORDERO-ERAUSQUIN

Résumé

Nous présentons quelques interactions simples entre le transport optimal de mesure et la théorie de Brunn-Minkowski dans l'espace euclidien et sur les variétés riemanniennes. On s'intéresse en particulier aux inégalités de log-Sobolev et de Sobolev optimales sur $\mathbb{R}^n$ et aux inégalités de type Prékopa-Leindler sur les variétés. Nous utilisons pour ces dernières les liens entre transport de mesure, courbure et champs de Jacobi.

Table des matières

1 Introduction **126**

2 Transport de mesure **130**
2.1 Transport de Brenier dans $\mathbb{R}^n$ 130
2.2 Transport optimal sur une variété et champs de Jacobi 132

3 Inégalités de log-Sobolev et de Sobolev optimales dans $\mathbb{R}^n$ **135**
3.1 Quelques inégalités de log-Sobolev 135
3.2 Inégalités de Sobolev optimales dans $\mathbb{R}^n$ 137
3.3 Quelques remarques sur le cas riemannien 141

4 Inégalités de Prékopa-Leindler à poids sur une variété **144**
4.1 Rappels sur le cas euclidien 144
4.2 Le cas riemannien 145
4.3 Preuve du théorème 8 148

2000 Mathematics Subject Classification : 52A40, 58C35, 49Q20, 46B20.

1. Introduction

L'objectif de ces notes est de montrer, à l'aide de quelques exemples récents, l'efficacité du transport optimal pour l'étude d'inégalités fonctionnelles et géométriques. Il existe d'excellents textes abordant ce sujet dans le cas euclidien, par exemple les *surveys* de Gardner [23] et de Maurey [34], ainsi que le livre de Villani [47]. Le cas du transport sur les variétés est pour l'instant moins populaire et c'est pourquoi nous allons reprendre de manière assez détaillée notre travail récent avec Robert McCann et Michael Schmuckenschläger [18]. Nous préférons par ailleurs insister sur les méthodes utilisées plutôt que sur certains aspects purement techniques. En particulier, nous laisserons de côté les problèmes de régularité du transport de mesure. Cela dit, ces problèmes ne sont pas, ici, vraiment sérieux et ils peuvent facilement être surmontés ou contournés. Le lecteur trouvera les quelques arguments techniques manquant dans [36, 15, 19] pour le cas euclidien, et dans [17, 18] pour le cas riemannien.

Les inégalités que nous voulons étudier ont une saveur commune : elles sont liées d'une manière ou d'une autre à l'inégalité de Brunn-Minkowski. Rappelons que pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda A = \{\lambda x\ ; x \in A\}$ et

$$A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}. \tag{1}$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski donne la relation suivante entre la structure linéaire de $\mathbb{R}^n$ et la mesure de Lebesgue notée vol : pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}(A+B)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}(A)^{1/n} + \mathrm{vol}(B)^{1/n}. \tag{2}$$

Pour éviter des problèmes de mesurabilité on peut supposer, si on veut, que A et B sont compacts. Cette inégalité, bien que d'apparence simple, recèle une subtilité : au vu de la définition (1), il n'est *a priori* pas évident de calculer le volume de $A + B$ puisque un élément $x \in A + B$ admet en général de nombreuses décompositions $x = a + b$. L'idée de départ dans toutes les démonstrations est précisément de trouver un bon "couplage" des éléments de A et B afin d'estimer le volume de la somme.

Il est bien connu que l'inégalité de Brunn-Minkowski permet de retrouver l'inégalité isopérimétrique euclidienne. Notons B_2^n la boule euclidienne de rayon 1 (pour la structure euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$). Alors, $A + \varepsilon B_2^n$ consiste en l'ensemble des points à distance au plus $\varepsilon > 0$ de A, de sorte que pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ ayant un bord suffisamment régulier, la mesure de surface du bord, notée $|\partial A|$, est égale à

$$|\partial A| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{vol}(A + \varepsilon B_2^n) - \mathrm{vol}(A)}{\varepsilon}.$$

Supposons, ce qui par homogénéité ne coûte rien, que $A \subset \mathbb{R}^n$ a la même mesure que B_2^n : $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B_2^n)$. En remarquant qu'il y a évidemment égalité dans l'inégalité de Brunn-Minkowski (2) lorsque les ensembles sont homothétiques, on déduit de (2) que

$$\mathrm{vol}(A + \varepsilon B_2^n) \geqslant \mathrm{vol}(B_2^n + \varepsilon B_2^n),$$

et donc que

$$|\partial A| \geqslant |\partial B_2^n|.$$

On retrouve bien qu'à volume fixé, la boule euclidienne minimise la mesure de surface du bord.

En utilisant l'homogénéité du volume, on peut montrer facilement que l'inégalité de Brunn-Minkowski énoncée plus haut est équivalente à la forme suivante : pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ et pour $s \in [0,1]$,

$$\mathrm{vol}((1-s)A + sB) \geqslant \mathrm{vol}(A)^{1-s}\ \mathrm{vol}(B)^s. \tag{3}$$

Remarquons que sous cette forme multiplicative, l'inégalité est sans dimension. Cette forme indique que le volume est log-concave sur $\mathbb{R}^n$, alors que la forme (2) exprimait la $\frac{1}{n}$-concavité du volume, ce qui est *a priori* plus fort ; l'équivalence résulte de la n-homogénéité du volume. Au début des années 70 sont apparues de nombreuses formes fonctionnelles d'inégalités géométriques liées à la convexité (voir par exemple [10, 11, 42] et les *surveys* [20, 23] qui offrent des points de vue assez différents). Une des inégalités qui a été promise à un grand avenir fut, sous sa forme définitive, démontrée par Prékopa [42, 43] et Leindler [31].

THÉORÈME 1 (Inégalité de Prékopa-Leindler). — *Soit $s \in (0,1)$ et $u, v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ tels que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$w((1-s)x + sy) \geqslant u^{1-s}(x)v^s(y). \tag{4}$$

Alors on a : $\displaystyle\int w \geqslant \left(\int u\right)^{1-s} \left(\int v\right)^s.$

On peut aussi énoncer ce résultat de manière plus compacte : pour $u, v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ on a

$$\int \sup_{z=(1-s)x+sy} \left\{u^{1-s}(x)v^s(y)\right\}\, dz \geqslant \left(\int u\right)^{1-s} \left(\int v\right)^s. \tag{5}$$

En appliquant cette inégalité à $u = 1_A$ et $v = 1_B$, les fonctions indicatrices d'ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$, on retombe exactement sur l'inégalité de Brunn-Minkowski (3). Remarquons que l'inégalité de Prékopa-Leindler implique aussi le résultat suivant (dit Théorème de Prékopa) sur les marginales de fonctions log-concaves : si $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$e^{-\phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x,t)}\, dx$$

est également convexe. En particulier, on voit que la convolée de deux fonctions log-concaves est log-concave, et que donc la log-concavité est préservée par le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$.

L'inégalité de Prékopa-Leindler a de nombreuses autres applications, aussi bien en géométrie des corps convexes qu'en probabilité. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [23, 34, 44, 30, 5]. Pour certaines applications, il convient d'énoncer l'inégalité de manière légèrement différente (inégalité de Prékopa-Leindler à poids). Nous reviendrons plus loin sur cet aspect.

L'inégalité de Prékopa-Leindler a été étendue aux variétés riemannienne dans [17]. Dans toute la suite, M désignera une variété riemannienne de dimension n. La distance géodésique sera notée d et l'élément de volume riemannien $d\,\mathrm{vol}$. Enfin, $(T_xM, \cdot, |\cdot|)$ désignera la structure euclidienne sur l'espace tangent T_xM en $x \in M$. Pour $x, y \in M$ et $t \in [0,1]$, on note $Z_t(x,y)$ le barycentre de x et y donné par

$$Z_t(x,y) = \{z \in M\ ;\ d(x,z) = t\,d(x,y) \ \text{ et } \ d(z,y) = (1-t)d(x,y)\}.$$

L'ensemble $Z_t(x,y)$ est un singleton sauf, éventuellement, lorsque x appartient à $\mathrm{cut}(y)$, le *cut locus* de y. Plus précisément, lorsque $x \notin \mathrm{cut}(y)$, la courbe $t \longrightarrow Z_t(x,y)$ est exactement la géodésique minimale joignant x à y. L'inégalité de Prékopa-Leindler riemannienne obtenue dans [17] s'énonce de la façon suivante : pour $u, v\ :\ M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $s \in [0,1]$ on a

$$\int_M \sup_{z\in Z_s(x,y)} \left\{D_s(x,y)\ u^{1-s}(x)v^s(y)\right\}\ d\,\mathrm{vol}(z) \geqslant \left(\int_M u\right)^{1-s}\left(\int_M v\right)^s, \tag{6}$$

où $D_s(x,y) \geqslant 0$ est un coefficient de distorsion dû à la courbure et qui ne dépend que de x, y et s. On a $D_s(x,y) \leqslant 1$ lorsque la courbure est positive, et l'inégalité opposée lorsque la courbure est négative. Bien entendu, $D_s(x,y) \equiv 1$ sur l'espace euclidien de sorte que l'on retrouve l'inégalité de Prékopa-Leindler classique. La définition précise du coefficient de distorsion repose sur la quantité suivante définie pour $t \in]0,1]$ et $x, y \in M$ par

$$v_t(x,y) := \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}[Z_t(x, B_r(y))]}{\mathrm{vol}[B_{tr}(y)]} > 0$$

où $B_r(y)$ désigne la boule géodésique de rayon r centrée en $y \in M$ et $Z_t(x, B_r(y)) = \bigcup_{m\in B_r(y)} Z_t(x,m)$ (voir figure 1).

Cette quantité mesure la distorsion du volume le long de la géodésique joignant x à y. Si on imagine que la lumière se déplace le long des géodésiques, alors $v_0(x,y) := \lim_{t\to 0} v_t(x,y)$ représente le coefficient d'amplification d'une source lumineuse située autour de y et observée en x. Il n'est donc pas surprenant que $v_t(x,y) \geqslant 1$ si la courbure est positive, et l'opposé si la courbure est négative. Le théorème de Thalès nous dit exactement que $v_t(x,y) \equiv 1$ dans l'espace euclidien. Le coefficient de distorsion apparaissant dans (6) est donné par

$$D_s(x,y) := \left[v_s(x,y)^s\ v_{1-s}(y,x)^{1-s}\right]^{-1}. \tag{7}$$

Aussi bien dans le cas riemannien qu'euclidien, ces inégalités de Prékopa-Leindler peuvent se démontrer de façon assez simple en utilisant le transport de mesure ; dans le cas des variétés, c'est même la seule approche connue. Nous présenterons le transport de mesure plus loin, mais nous voudrions dès maintenant mentionner quelques interactions entre la théorie de Brunn-Minkowski et le transport de mesure. Ces interactions

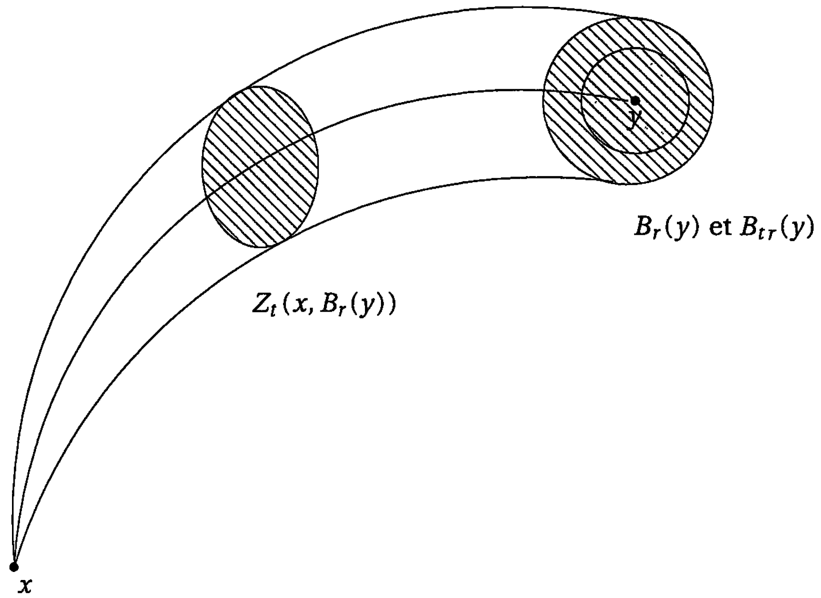

FIG. 1 – Construction de $Z_t(x, B_r(y))$: on amène géodésiquement $B_r(y)$ en x

sont anciennes puisque Hadwiger et Ohmann [25] ont donné une démonstration de (2) utilisant implicitement des idées de transport de mesure. En 1957, Knothe [26] donna la première preuve de l'inégalité de Brunn-Minkowski utilisant un transport de mesure. Le transport construit par Knothe, parfois appelé le transport de Knothe, a été plus tard utilisé par Gromov [38] pour donner une preuve directe de l'inégalité isopérimétrique sous sa forme fonctionnelle (nous redonnerons plus loin sa démonstration). Venant d'un domaine des mathématiques complètement différent, Brenier, au milieu des années 80, a mis en évidence un nouveau transport de mesure (lié à un problème variationnel issu de l'étude de l'équation d'Euler). On doit à McCann [36] l'introduction de ce transport (dit de Brenier) dans la théorie de Brunn-Minkowski avec une démonstration par transport de l'inégalité de Prékopa-Leindler. Un peu plus tard, Barthe [6, 7] utilisa le transport de Brenier pour l'étude, entre autres, d'inégalités de convolution. Depuis lors, le transport de Brenier est apparu comme un outil très utile pour l'étude d'inégalités fonctionnelles et géométriques. Otto [40] puis Otto et Villani [41] ont mis en évidence les liens riches et profonds existant entre d'un côté, l'interpolation le long du transport optimal et les EDP qui lui sont reliées, et de l'autre, les inégalités de Sobolev logarithmiques. Une démonstration par transport des inégalités de log-Sobolev plus élémentaire (sans interpolation ni EDP) a été donnée dans [15] et étendue au cas riemannien dans [18]. Il n'est pas surprenant que le transport soit adapté aux inégalités de type log-Sobolev puisque Bobkov et Ledoux [8] ont montré que ces inégalités peuvent se déduire de l'inégalité de Prékopa-Leindler. Enfin, le transport de mesure a récemment [19] servi à donner une preuve géométrique et élémentaire des inégalités de Sobolev optimales. D'une certaine manière, les inégalités de log-Sobolev et de Sobolev font partie de la théorie de Brunn-Minkowski (vue sous l'angle du transport de mesure). Le lecteur trouvera plus d'informations sur le transport de mesure et sur ses applications dans le livre de Villani [47].

Dans cet exposé, nous allons donc présenter des interactions entre inégalités géométriques et transport de mesure. Dans la partie qui suit, nous allons donner une introduction élémentaire au transport optimal de mesure en donnant le résultat de Brenier et son extension aux variétés riemanniennes due à McCann. Dans la partie §3 nous redonnerons la preuve par transport des inégalités de log-Sobolev et de Sobolev optimales dans $\mathbb{R}^n$; nous ferons également quelques commentaires sur le cas riemannien. Dans la partie §4 nous reviendrons aux inégalités de Prékopa-Leindler pour en étudier des versions à poids.

2. Transport de mesure

2.1. Transport de Brenier dans $\mathbb{R}^n$

Supposons que l'on se donne deux mesures (boréliennes) de probabilité μ et ν sur un espace (topologique) mesurable. On peut chercher les applications (boréliennes) T qui envoient μ sur ν au sens de la mesure image : $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ pour tout ensemble borélien B. On dit alors que T transporte μ sur ν et on écrit $\nu = T\mu$. En général, il existe de nombreuses applications T transportant μ sur ν, et l'idée, qui remonte à Gaspard Monge [39], est d'en trouver une optimale en un certain sens. Dans une situation géométrique donnée, on peut aussi chercher une application T ayant des propriétés sympathiques. Par exemple, si on se donne deux probabilités diffuses sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante vérifiant

$$\nu(]-\infty, T(x)]) = \mu(]-\infty, x]).$$

Cette fonction croissante transporte bien μ sur ν. Le théorème suivant, dû à Brenier [12, 13] et amélioré par McCann [35], étend ce résultat à $\mathbb{R}^n$. En plus d'être monotone, l'application obtenue est aussi optimale en un certain sens.

THÉORÈME 2 (Transport de Brenier). — *Soit μ et ν deux probabilités sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, il existe une fonction convexe φ telle que l'application $T = \nabla\varphi$ transporte μ sur ν.*

Du plus, si les probabilités μ et ν ont un moment d'ordre deux fini, alors l'application $T = \nabla\varphi$ ci-dessus minimise le coût (dit quadratique)

$$\int |G(x) - x|^2 \, d\mu(x) \tag{8}$$

parmi toutes les applications G transportant μ sur ν.

L'application $T = \nabla\varphi$ est définie de manière unique $\mu - pp$ et on l'appelle le *transport de Brenier* de μ sur ν. Nous n'allons pas utiliser dans la suite le caractère optimal de $T = \nabla\varphi$, mais signalons au passage que l'*infimum* de la quantité (8), qui est donc atteint pour $G = \nabla\varphi$, est égal au carré de la distance de Wasserstein entre les probabilités μ et ν. Pour toute question relative au transport de Brenier, nous renvoyons à [47].

Supposons que μ et ν soient absolument continues, avec pour densité u_0 et u_1. Par définition de la mesure image on a :

$$\int b(y)u_1(y)\,dy = \int b(\nabla\varphi(x))u_0(x)\,dx, \tag{9}$$

pour toute fonction borélienne $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$. Si φ est C^2, le changement de variables $y = \nabla\varphi(x)$ montre alors que φ satisfait l'*équation de Monge-Ampère* :

$$u_0(x) = u_1(\nabla\varphi(x))\ \det \mathrm{Hess}_x\,\varphi. \tag{10}$$

Dans le cas général, il est encore facile de donner un sens $\mu - pp$ à cette équation (voir [36]). Dans la suite, nous ferons comme si φ était de classe C^2. Remarquons que puisque φ est convexe, la matrice jacobienne $dT_x = \mathrm{Hess}_x\,\varphi$ du transport est symétrique positive. Le transport de mesure va nous permettre de transformer des inégalités matricielles sur les matrices symétriques positives en des inégalités intégrales.

À titre d'exemple, donnons une preuve (tirée de [36]) de l'inégalité de Brunn-Minkowski (3). On peut supposer que $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B) = 1$ et il faut alors montrer que $\mathrm{vol}\,(\dfrac{A+B}{2}) \geqslant 1$ (on choisit le cas $s = 1/2$ pour simplifier les notations). Introduisons le transport de Brenier $T = \nabla\varphi$ entre $1_A(x)\,dx$ et $1_B(y)\,dy$. On a $T(A) = B$ (car au sens "presque partout", le support est envoyé sur le support) et l'équation de Monge-Ampère (10) devient

$$\det \mathrm{Hess}\,\varphi = 1.$$

D'autre part, on remarque que

$$\frac{A+B}{2} = \frac{A+T(A)}{2} \supset \Big(\frac{I+T}{2}\Big)(A),$$

où I désigne la matrice identité. On a trouvé une bonne manière de paramétrer une sous-partie de la somme $\frac{A+B}{2}$. On a

$$\mathrm{vol}\,\Big(\frac{A+B}{2}\Big) \geqslant \mathrm{vol}\,\Big(\Big(\frac{I+T}{2}\Big)(A)\Big) = \int_A \det\Big(\frac{I+dT_x}{2}\Big)\,dx$$

On utilise alors l'inégalité arithmético-géométrique sous la forme

$$\det\Big(\frac{H_1+H_2}{2}\Big) \geqslant \sqrt{\det(H_1)\det(H_2)}$$

valable pour des matrices symétriques positives H_1, H_2, ce qui donne

$$\det\Big(\frac{I+\mathrm{Hess}_x\,\varphi}{2}\Big) \geqslant \sqrt{\det(I)\det(\mathrm{Hess}_x\,\varphi)} = 1,$$

et donc $\mathrm{vol}\,(\dfrac{A+B}{2}) \geqslant \mathrm{vol}(A) = 1$.

On peut démontrer d'une façon similaire l'inégalité fonctionnelle de Prékopa-Leindler (théorème 1). Rappelons que des problèmes de régularité empêchent en fait de considérer directement dT_x. Même si les détails techniques sont très faciles à régler, la preuve ci-dessus est plutôt un "schéma de preuve".

2.2. Transport optimal sur une variété et champs de Jacobi

Quelle est la généralisation naturelle du transport de Brenier sur une variété riemannienne M ? Avant de répondre, il convient de s'intéresser au ***déplacement*** de x à $T(x) = \nabla\varphi(x)$. Pour cela, on introduit la fonction $\theta(x) := \varphi(x) - |x|^2/2$ de sorte que le transport T devient

$$T(x) = x + \nabla\theta(x). \tag{11}$$

Malheureusement, la condition sur θ devient

$$I + \mathrm{Hess}\,\theta \geqslant 0, \tag{12}$$

ce qui est tout de même moins agréable que la convexité de φ.

L'extension, obtenue par McCann [37], au cas des variétés riemanniennes du résultat de Brenier est la suivante. Soit μ et ν deux probabilités sur M avec μ absolument continue par rapport à la mesure de volume riemannien $d\,\mathrm{vol}$. Pour des raisons techniques, il est préférable de supposer que les probabilités μ et ν sont à support compact. Alors, il existe une fonction $\theta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $-\theta$ soit $d^2/2$-*concave* et telle que l'application

$$F(x) = \exp_x(\nabla\theta(x)) \tag{13}$$

transporte μ sur ν. Cette application est définie de façon unique et on l'appelle le transport optimal (ou transport de McCann) de μ sur ν. Elle minimise encore

$$\int d^2(x, G(x))\, d\mu(x)$$

parmi toutes les applications G transportant μ sur ν. Évidemment, il reste à préciser ce que $d^2/2$-concave veut dire. Pour des définitions précises, nous renvoyons à [37, 17]. Introduisons, pour $y \in M$, la fonction

$$d_y(\cdot) := d(\cdot, y).$$

Nous avons montré dans [17] que pour μ-presque tout x, on avait $F(x) \notin \mathrm{cut}(x)$. En particulier, la fonction $d_{F(x)}$ est presque toujours régulière autour de x. La $d^2/2$-concavité de $-\theta$ peut s'exprimer par la propriété suivante : en un sens faible (à préciser) on a

$$\left[\mathrm{Hess}_x\, d^2_{F(x_0)}/2 + \mathrm{Hess}_x\, \theta\right]_{x=x_0} \geqslant 0 \tag{14}$$

pour presque tout x_0 dans le support de μ. Dans le cas euclidien, (13) et (14) deviennent (11) et (12). Si la forme du transport optimal sur M est plus compliquée, c'est que ce transport contient une partie de la structure géodésique de la variété.

Supposons que μ et ν aient pour densité respective u_0 et u_1. D'après la définition de la mesure image, on peut s'attendre à ce que $u_0(x) = u_1(F(x))|\det dF_x|$. C'est bien le cas en un sens faible (mais suffisant pour nos applications). Si on pose

$$dF_{x_0} := Y(H + \mathrm{Hess}_{x_0}\,\theta)$$

où les matrices Y and H sont données, quand $F(x_0) \notin \mathrm{cut}(x_0)$, par

$$Y := d[\exp_{x_0}]_{\nabla\theta(x_0)} \quad \text{et} \quad H = [\mathrm{Hess}_x\, d^2_{F(x_0)}/2]_{x=x_0},$$

alors on a, $d\mu$-presque partout,

$$u_0(x) = u_1(F(x))\det dF_x. \tag{15}$$

On va maintenant considérer une interpolation entre l'application identité et le transport optimal F. Pour $t \in [0,1]$, on introduit

$$F_t(x) := \exp_x(t\nabla\theta(x)).$$

Lorsque $F(x) \notin \mathrm{cut}(x)$, la courbe $t \longrightarrow F_t(x)$ est la géodésique minimisante joignant $x = F_0(x)$ à $F(x) = F_1(x)$:

$$F_t(x) = Z_t(x, F(x)).$$

Pour un x_0 fixé et afin de calculer $d(F_t)_{x_0}$, donnons-nous un repère orthonormé tournant $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ le long de la géodésique $\gamma(t) := F_t(x_0)$. Comme d'habitude, on conviendra que $e_1(t) = \dot\gamma(t)/|\dot\gamma(t)|$ où $\dot\gamma(t) := \dfrac{d\gamma}{dt}(t)$. On remarque que pour y proche de x_0, la courbe $t \longrightarrow F_t(y)$ est, évidemment, encore une géodésique. Par conséquent, on s'attend à ce que $t \longrightarrow d(F_t)_x$ définisse une *matrice de champs de Jacobi* le long de la géodésique $t \longrightarrow \gamma(t) = F_t(x_0)$.

Rappelons qu'un champ de Jacobi est un champ de variation d'une géodésique par des géodésiques (voir [22]). Donnons-nous une géodésique $\gamma : [0,1] \to M$ et considérons une perturbation de γ par une famille de géodésiques γ_s : pour $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$[0,1] \ni t \longrightarrow \gamma_s(t)$$

est une géodésique et $\gamma_0 = \gamma$. Pour $t \in [0,1]$ fixé, introduisons

$$J(t) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\gamma_s(t).$$

Comme $\gamma_0 = \gamma$, on a $J(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Ce champ de vecteur $t \longrightarrow J(t)$ le long de γ est ce qu'on appelle un *champ de Jacobi*. Étant donné comme précédemment un repère orthonormé tournant $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ le long de notre géodésique $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, un champ de Jacobi J le long de γ est aussi caractérisé par le fait que ses coordonnées $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ vérifient une équation différentielle linéaire du type

$$Y''(t) + R(t)Y(t) = 0 \tag{16}$$

pour une certaine matrice symétrique $R(t)$. En fait, la matrice $R(t)$ est la matrice de l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T_{\gamma(t)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t)}M \\ v & \longrightarrow & R(\dot\gamma(t), v)\dot\gamma(t) \end{array} \tag{17}$$

où $R_x : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$ désigne le tenseur de Riemann en $x \in M$. Quand $M = \mathbb{R}^n$, on a $R \equiv 0$, et sur la sphère $M = S^n$,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, R est de la forme

$$R = R^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

et la trace of $R(t)$ redonne la courbure de Ricci dans la direction $\dot\gamma(t)$:

$$\operatorname{tr} R(t) = \operatorname{Ric}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)).$$

Pour revenir au transport de mesure $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\varphi(x))$ et au lien entre sa différentielle et les champs de Jacobi, donnons-nous un $x_0 \in M$. Pour un vecteur $v \in T_{x_0}M$, le vecteur $d(F_t)_{x_0}(v)$ est donné par

$$d(F_t)_{x_0}(v) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F_t(\exp_{x_0}(sv)) \in T_{F_t(x_0)}M.$$

Or pour chaque s fixé, la courbe

$$t \longrightarrow F_t(\exp_{x_0}(sv)) = \exp_{\exp_{x_0}(sv)}(t\nabla\theta(\exp_{x_0}(sv)))$$

est une géodésique. On a donc bien que $t \longrightarrow d(F_t)_{x_0}(v)$ est un champs de Jacobi le long de $t \longrightarrow F_t(x_0)$ qui est la géodésique obtenue quand $s = 0$. On en déduit que $t \longrightarrow d(F_t)_{x_0}$ définit bien, dans un repère tournant, une matrice de champs de Jacobi le long de la géodésique $t \longrightarrow F_t(x_0)$. Cette matrice de champs de Jacobi $A(t) := d(F_t)_{x_0}$, qui vérifie donc

$$A''(t) + R(t)A(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,1],$$

est caractérisée par les données suivantes :

$$A(0) = I \quad \text{et} \quad A'(0) = \operatorname{Hess}_{x_0}\varphi.$$

On montre aussi que $\det(A(t)) > 0$ (en particulier $A(t)$ est inversible). Nous renvoyons à [17, 18] pour un énoncé plus rigoureux tenant compte de la non-différentiabilité de F.

3. Inégalités de log-Sobolev et de Sobolev optimales dans $\mathbb{R}^n$

3.1. Quelques inégalités de log-Sobolev

Les inégalités de log-Sobolev interviennent dans beaucoup de domaines de l'analyse et des probabilités. Leur caractère infini-dimensionnel est utile, entre autres, pour l'étude de la régularité de processus stochastiques ou en mécanique statistique. Les travaux de Ledoux (et de ses collaborateurs), ont mis en valeur leurs liens avec les problèmes de type isopérimétrique et de concentration de la mesure. Signalons également qu'elles sont liées à des propriétés d'hypercontractivité de certains semi-groupes de diffusion et qu'elles interviennent dans l'étude de la vitesse de convergence d'EDP du type Fokker-Planck. Nous renvoyons pour plus de détail à Ledoux [27, 28, 29, 30] et à Villani [47].

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, les travaux de Otto [40] puis de Otto et Villani [41] ont révélé les liens structurels entre le transport optimal de mesure (et certaines EDP qui lui sont reliées) et les inégalités de log-Sobolev. Nous allons présenter ici une approche élémentaire des inégalités de log-Sobolev tirée de [15], et pour commencer nous allons considérer le cas classique gaussien.

On notera γ la mesure gaussienne de densité $d\gamma(x) = e^{-|x|^2/2}/(\sqrt{2\pi})^n\, dx$ sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de log-Sobolev gaussienne, sous la forme due à Gross, s'écrit :

$$\int f \log f \, d\gamma \leqslant \frac{1}{2} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} \, d\gamma,$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\int f \, d\gamma = 1$. Le terme de gauche (resp. de droite) est l'entropie (resp. l'information de Fisher) de f par rapport à γ. Voici une démonstration élémentaire utilisant le transport de Brenier. Soit $\nabla\varphi$ le transport de Brenier de $f\, d\gamma$ sur γ. L'équation de Monge-Ampère (10) prend la forme suivante :

$$f(x)e^{-|x|^2/2} = e^{-|\nabla\varphi(x)|^2/2} \det \mathrm{Hess}_x\, \varphi.$$

On introduit la fonction $\theta(x) := \varphi(x) - |x|^2/2$ de sorte que le transport s'écrit $\nabla\varphi(x) = x + \nabla\theta(x)$. On a donc

$$f(x)e^{-|x|^2/2} = e^{-|x+\nabla\theta(x)|^2/2} \det\,(I + \mathrm{Hess}_x\, \theta).$$

En prenant le log de cette équation et en développant les carrés on trouve

$$\log f = -|\nabla\theta|^2/2 - x \cdot \nabla\theta + \log\det\,(I + \mathrm{Hess}_x\, \theta).$$

Comme $\log(1+t) \leqslant t$ si $1+t \geqslant 0$, on a $\log\det\,(I + \mathrm{Hess}\, \theta) \leqslant \mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}\, \theta = \Delta\theta$, et donc

$$\log f \leqslant -|\nabla\theta|^2/2 - x \cdot \nabla\theta + \Delta\theta.$$

On intègre cette inégalité par rapport à $f\, dy$. On remarque que, par intégration par parties (le lecteur savant reconnaîtra le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck classique),

$$\int (\Delta\theta - x \cdot \nabla\theta)\, f\, dy = -\int \nabla\theta \cdot \nabla f\, dy.$$

On obtient donc

$$\int f \log f\, dy \leqslant -\frac{1}{2}\int |\nabla\theta|^2 f\, dy - \int \nabla\theta \cdot \nabla f\, dy.$$

En utilisant

$$-a \cdot b \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \tag{18}$$

on retrouve exactement l'inégalité voulue : $\displaystyle\int f \log f\, dy \leqslant \frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}\, dy$.

Cette preuve fonctionne aussi dans le cas d'une probabilité $d\mu = e^{-V}\, dx$ quand V vérifie Hess $V \geqslant \lambda I$ ($\lambda > 0$) ; on peut de la même manière démontrer des inégalités de transport de la mesure à la Talagrand (voir [15]). Cette approche a été étendue au cas riemannien dans [18] (voir aussi [45] pour des résultats connexes).

Le cas d'une probabilité $d\mu = e^{-V}\, dx$, où V vérifie Hess $V \geqslant \lambda I$ ($\lambda > 0$) entre dans le cadre de ce que l'on appelle le *critère de Bakry-Émery* [4]. L'inégalité de log-Sobolev correspondante est :

$$\int f \log f\, d\mu \leqslant \frac{1}{2\lambda}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}\, d\mu$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int f\, d\mu = 1$. On devine que la démonstration précédente devrait par sa souplesse, permettre d'aller un peu au-delà. C'est effectivement le cas, comme le montre, par exemple, le résultat suivant tiré de [16].

THÉORÈME 3. — *Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $d\mu = e^{-V}\, dx$. On suppose qu'il existe une fonction convexe $c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$V(a+b) \geqslant V(a) + \nabla V(a) \cdot b + c(b), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\int f\, d\mu = 1$ on a

$$\int f \log f\, d\mu \leqslant \int c^*\Big(\frac{\nabla f}{f}\Big)\, f\, d\mu\ .$$

où c^* désigne la transformée de Legendre de c.

La démonstration est semblable à celle donnée plus haut dans le cas gaussien. Au lieu de développer les carrés on utilisera (19) et à la place de (18) on utilisera

$$-a \cdot b \leqslant c(a) + c^*(b).$$

Quand V est uniformément convexe, Hess $V \geqslant \lambda I$, la condition (19) est vérifiée pour $c(b) := \lambda|b|^2/2$, et on retrouve alors le résultat de Bakry-Émery puisque $c^*(a) = |a|^2/(2\lambda)$. Mais le théorème s'applique aussi au cas d'un potentiel V uniformément p-convexe par rapport à une certaine norme $\|\cdot\|$. On retrouve alors une inégalité de log-Sobolev due à Bobkov et Ledoux [8]. On peut aussi considérer des fonctionnelles d'entropie plus générales comme les entropies de Rényi (voir [16] et également [1] pour diverses généralisations de cette méthode).

3.2. Inégalités de Sobolev optimales dans $\mathbb{R}^n$

Le but de cette sous-partie est de présenter les résultats de [19]. Nous avons déjà signalé que la première preuve directe par transport de l'inégalité isopérimétrique (disons euclidienne, pour commencer), sous sa forme fonctionnelle, est due à Gromov [38]. Cette inégalité, aussi appelée inégalité de Sobolev L^1, dit que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est régulière et à support compact, alors

$$\int |\nabla f| \geqslant n \operatorname{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \left(\int f^{n/(n-1)}\right)^{(n-1)/n} \tag{20}$$

où B_2^n désigne comme dans l'introduction la boule euclidienne (centrée en l'origine) de rayon 1. Par approximation, cette inégalité s'étend aux fonctions à variations bornées (et en particulier aux fonctions indicatrices d'ensembles compacts) avec égalité lorsque f est la fonction indicatrice d'une boule euclidienne. Cela redonne bien l'inégalité isopérimétrique euclidienne et prouve que cette inégalité fonctionnelle est optimale.

Gromov a utilisé le transport de Knothe, mais le transport de Brenier fait aussi bien l'affaire. Par homogénéité on peut supposer que $\int f^{n/(n-1)} = 1$. Introduisons le transport de Brenier $\nabla\varphi$ entre les densités de probabilité $f^{n/(n-1)}(x)\,dx$ et $1_{B_2^n}(x)/\operatorname{vol}(B_2^n)\,dx$. On a bien sûr $\nabla\varphi \in B_2^n$ et l'équation de Monge-Ampère (10) devient

$$\operatorname{vol}(B_2^n)\, f^{n/(n-1)}(x) = \det \operatorname{Hess}_x \varphi.$$

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique sous la forme $\det^{1/n}(H) \leqslant \operatorname{tr} H/n$ pour $H \geqslant 0$, on trouve

$$\operatorname{vol}(B_2^n)^{1/n} f^{1/(n-1)}(x) = \det^{1/n} \operatorname{Hess}_x \varphi \leqslant \frac{1}{n}\, \Delta\varphi(x).$$

On a donc

$$\operatorname{vol}(B_2^n)^{1/n} = \operatorname{vol}(B_2^n)^{1/n} \int f\, f^{1/(n-1)} \leqslant \frac{1}{n} \int f \Delta\varphi.$$

En intégrant par parties et en utilisant que $\nabla\varphi \subset B_2^n$ on trouve

$$\int f\Delta\varphi = -\int \nabla f \cdot \nabla\varphi \leqslant \int |\nabla f|,$$

ce qui donne bien $\displaystyle\int |\nabla f| \geqslant n \operatorname{vol}(B_2^n)^{1/n}$ et donc (20). On peut remarquer que si $f(x) = (cte)\, 1_{B_2^n}(x)$ alors, comme le transport de Brenier devient l'identité, $\nabla\varphi(x) = x$, il y a formellement égalité à toutes les étapes de la preuve. C'est la bonne façon de voir que cette inégalité est optimale et que la fonction $1_{B_2^n}$ est un cas d'égalité dans (20).

On s'intéresse maintenant à l'extension de cette approche à toute la famille des inégalités de Sobolev optimales. Dans la suite, nous allons considérer une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$; cela ne coûte pas plus cher que de considérer la seule norme euclidienne $|\cdot|$. On rappelle que la norme duale de $\|\cdot\|$ est donnée, pour $X \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|X\|_* = \sup_{\|Y\|=1} X \cdot Y.$$

D'autre part, il est classique que pour un espace vectoriel normé (de dimension finie ou ayant la propriété de Radon-Nikodym) $(E, \|\cdot\|)$, le dual de $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ (les fonctions sont à valeurs dans E) s'identifie à $L^q(\mathbb{R}^n, E^*)$ où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1.$$

En fait, nous utiliserons simplement l'inégalité de Hölder suivante : pour $X, Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on a

$$\int X \cdot Y \leqslant \left(\int \|X\|_*^p\right)^{1/p} \left(\int \|Y\|^q\right)^{1/q} \tag{21}$$

Cette inégalité est une conséquence immédiate du fait que la transformée de Legendre de la fonction convexe $y \longrightarrow \|y\|^p/p$ est égale à $x \longrightarrow \|x\|_*^q/q$.

Pour $p \in [1, n[$, on définit le coefficient de Sobolev critique

$$p^\star := \frac{np}{n-p},$$

et l'espace de Sobolev homogène

$$\dot{W}^{1,p} := \{f \in L_{p^\star}(\mathbb{R}^n)\,;\ \nabla f \in L_p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dans la suite, nous allons nous intéresser au cas $p > 1$ puisque nous avons déjà traité le cas $p = 1$. Étant donné $p \in]1, n[$, on introduit la fonction $h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$,

$$h_p(x) := \left(\sigma_p + \|x\|^q\right)^{-(n-p)/p} = \left(\sigma_p + \|x\|^q\right)^{-n/p^\star},$$

où $\sigma_p > 0$ est choisi pour que $\|h_p\|_{L_{p^\star}}^{p^\star} = \int (\sigma_p + \|x\|^q)^{-n}\, dx = 1$. Nous allons montrer l'inégalité de Sobolev

$$\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \geqslant S_n(p)\, \|f\|_{L_{p^\star}}$$

où $S_n(p)$ est la constante optimale. En fait, on ne va pas s'intéresser à cette constante ni à sa valeur : le lecteur pourra la calculer s'il en ressent le besoin. L'inégalité, tout comme la constante, est optimale si l'on peut exhiber un cas d'égalité non trivial ($f \neq 0$).

THÉORÈME 4 (Inégalité de Sobolev L^p optimale pour $1 < p < n$). — *Parmi les fonctions $f \in \dot{W}^{1,p}$, la quantité*

$$\frac{\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p}}{\|f\|_{L_{p^*}}} \tag{22}$$

est minimale pour $f = h_p$.

De plus, $f \in \dot{W}^{1,p}$ atteint le mininimum de (22) *si et seulement si $f(x) = \lambda\, h_p(\mu x + x_0)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Avant de passer à la preuve, rappelons un peu d'histoire. L'inégalité optimale pour $p \in]1, n[$ dans le cas euclidien est due, indépendamment, à Talenti [46] et à Aubin [3]. Leur méthode consiste à symétriser les fonctions (réarrangement décroissant) puis à résoudre un problème de minimisation sur $\mathbb{R}$. Le cas $p = 2$ est particulier puisque l'inégalité possède alors une invariance conforme, ce qui a été utilisé par Lieb et Beckner. La description de tous les cas d'égalité dans le cas euclidien est due à Brothers and Ziemer [14] et consiste à établir les cas d'égalité dans le processus de symétrisation. En ce qui concerne l'énoncé pour une norme quelconque, le cas $p = 1$ (isopérimétrie) était contenu dans l'étude de Gromov que nous avons rappelé plus haut dans le cas euclidien. L'inégalité optimale dans le cas d'une norme quelconque pour $p \in]1, n[$ a été démontrée, par symétrisations, par Alvino, Ferone, Trombetti, et Lions [2]. Le cas d'égalité pour une norme quelconque n'avait pas été traité avant [19], mais depuis la méthode de Brothers et Ziemer a été étendue à ce cas.

On voit donc qu'une bonne partie des résultats était connue avant [19]. Cependant, le point principal de [19] est de fournir une nouvelle approche de ces inégalités, approche fondée sur le transport de mesure. Nous n'allons pas faire de symétrisations, ni faire appel au calcul des variations. La preuve va être géométrique et assez élémentaire : outre l'existence du transport, nous allons utiliser l'inégalité arithmético-géométrique et l'inégalité de Hölder.

Notre but est donc de montrer que si $\|f\|_{L_{p^*}} = 1 = \|h_p\|_{L_{p^*}}$, alors

$$\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\int \|\nabla h_p\|_*^p\right)^{1/p}$$

De manière équivalente, on veut montrer qu'il existe une certaine constante $K_{n,p}$ telle que, si $\|f\|_{L_{p^*}} = 1$, alors

$$\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \geqslant K_{n,p}, \quad \text{avec égalité si } f = h_p$$

Donnons-nous $f \in \dot{W}^{1,p}$ telle que $\|f\|_{L_{p^*}} = 1 = \|h_p\|_{L_{p^*}}$. On peut supposer que $f \geqslant 0$. Posons $u_0(x) := f^{p^*}(x)$ et $u_1(y) := h_p^{p^*}(y)$, et introduisons le transport de

Brenier $\nabla\varphi$ transportant $u_0(x)\,dx$ sur $u_1(y)\,dy$. L'équation de Monge-Ampère (10) nous dit que

$$u_0(x) = u_1(\nabla\varphi(x)) \det \mathrm{Hess}_x\, \varphi$$

En récrivant cette équation différemment et en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique ($\det^{1/n}(H) \leqslant \mathrm{tr} H/n$ pour $H \geqslant 0$) on a

$$\begin{aligned} u_1^{-1/n}(\nabla\varphi(x)) &= u_0^{-1/n}(x) \det^{1/n} \mathrm{Hess}_x\, \varphi \\ &\leqslant u_0^{-1/n}(x)\, \frac{\Delta\varphi(x)}{n} \end{aligned}$$

On intègre cette inégalité par rapport à $u_0(x)\,dx$ et on remarque que le terme de gauche se calcule grâce à la définition du transport (9) :

$$\int u_1^{-1/n}(\nabla\varphi(x))\, u_0(x)\, dx = \int u_1^{-1/n}(y)\, u_1(y)\, dy = \int u_1^{1-1/n}(y)\, dy.$$

En revenant aux notations de départ, on a donc

$$\int h_p^{p^\star(1-1/n)} \leqslant \frac{1}{n} \int f^{p^\star(1-1/n)} \Delta\varphi.$$

Pour calculer le terme de droite, on fait une intégration par parties. Comme $p^\star(1-1/n) - 1 = p^\star(1-1/p) = p^\star/q$ on trouve exactement

$$\int h_p^{p^\star(1-1/n)} \leqslant -c_{n,p} \int f^{p^\star/q}\, \nabla f \cdot \nabla\varphi$$

où $c_{n,p} = p^\star(1-1/n)/n = [p(n-1)]/[n(n-p)]$. On utilise pour le terme de droite l'inégalité de Hölder (21) avec le choix

$$X = -\nabla f \quad \text{et} \quad Y = f^{p^\star/q}\nabla\varphi.$$

Cela donne

$$-\int f^{p^\star/q}\, \nabla f \cdot \nabla\varphi \leqslant \left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \left(\int \|\nabla\varphi\|^q f^{p^\star}\right)^{1/q}.$$

En utilisant encore la définition du transport (9) on a :

$$\int \|\nabla\varphi(x)\|^q f^{p^\star}(x)\, dx = \int \|y\|^q h_p^{p^\star}(y)\, dy.$$

En recollant les morceaux, on voit qu'on a montré que

$$\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \geqslant K_{n,p} := \frac{\int h_p^{p^\star(1-1/n)}}{c_{n,p}\left(\int \|y\|^q h_p^{p^\star}(y)\, dy\right)^{1/q}}. \tag{23}$$

Pour l'instant, on a démontré *une* inégalité de Sobolev. Pour montrer qu'on a l'inégalité optimale, il faut montrer qu'il y a égalité dans (23) quand $f = h_p$. Pour cela, il est suffisant (et nécessaire) de montrer qu'il y a égalité dans toutes les étapes de la preuve quand $f = h_p$. Dans ce cas, on a $u_0 = u_1$ et le transport de Brenier n'est autre que l'identité : $\nabla\varphi(x) = x$. Dans la preuve, il y a deux endroits où l'on peut avoir perdu quelque chose. Le premier est l'inégalité $\det^{1/n}(\mathrm{Hess}_x\,\varphi) \leqslant \frac{1}{n}\Delta\varphi(x)$, mais ici, c'est évidemment une égalité puisque $\mathrm{Hess}_x\,\varphi = I$. Le second est l'application de l'inégalité de Hölder (21) avec, ici,

$$X = -\nabla h_p(x) \text{ et } Y = h^{p^*/q}(x)x.$$

Précisément, la propriété caractéristique de h_p est de donner une égalité dans l'inégalité de Hölder :

$$-\int \nabla h_p(x)\cdot[h_p^{p^*/q}(x)\,x]\,dx = \left(\int \|\nabla h_p\|_*^p\right)^{1/p}\left(\int \|x\|^q h_p^{p^*}(x)\,dx\right)^{1/q}$$

Pour le voir, il suffit de tirer de la définition $h_p(x) = (\sigma_p + \|x\|^q)^{-n/p^*}$, que pour presque tout x (la norme $\|\cdot\|$ n'est pas nécessairement régulière ; elle est cependant presque partout différentiable) on a :

$$-\nabla h_p(x)\cdot x = \|\nabla h_p\|_*\,\|x\| \qquad \text{et}$$

$$\|\nabla h_p(x)\|_*^p = (cte)\,h_p^{p^*}(x)\,\|x\|^q = (cte)\,\|h_p^{p^*/q}(x)\,x\|^q.$$

Cela achève donc la démonstration de l'inégalité de Sobolev optimale.

En ce qui concerne la description de tous les cas d'égalité, on remarque, en normalisant ($f \geqslant 0$ et $\|f\|_{L_{p^*}} = 1$) et en reprenant la démonstration, que pour avoir des égalités à toutes les étapes, il faut qu'il y ait égalité dans $\det^{1/n}(\mathrm{Hess}_x\,\varphi) \leqslant \frac{1}{n}\Delta\varphi(x)$. Cela implique que $\mathrm{Hess}_x\,\varphi = \lambda_x I$. Si on suppose que φ est de classe C^2, il est facile de voir qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Hess}_x\,\varphi = \lambda I$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla\varphi(x) = \lambda x + x_0.$$

En d'autres termes, le transport de Brenier est la composée d'une dilatation et d'une translation. On tire de cela que f s'obtient à partir de h_p en faisant une dilatation et une translation, ce qui est bien le résultat annoncé. En pratique, φ n'est pas vraiment C^2, et on travaille donc "au sens des distributions", ce qui demande un peu plus d'attention. On renvoie à [19] pour les détails. On pourra aussi consulter [32] pour une extension de la méthode aux inégalités de Sobolev restreintes à des domaines de $\mathbb{R}^n$.

3.3. Quelques remarques sur le cas riemannien

Pour l'instant, l'approche par transport des inégalités de Sobolev optimales n'a pas été étendue au cas riemannien. Il n'y a, à vrai dire, pas d'évidence à ce que cela marche aussi bien. Sur les variétés, d'autres problèmes se posent et il faut d'abord préciser ce que l'on entend par "inégalités de Sobolev optimales". Il existe différentes façons d'aborder les inégalités de Sobolev sur les variétés suivant les constantes optimales auxquelles on s'intéresse (problème AB). Nous renvoyons, pour ce problème, à l'étude approfondie de Druet et Hebey [21]. Remarquons également que l'isopérimétrie ne s'exprime *a priori* pas à l'aide d'une inégalité de Sobolev L^1.

Nous allons considérer ici un cas très particulier d'inégalité de Sobolev L^1 sur des variétés compactes à courbure de Ricci strictement positive. L'inégalité n'est pas optimale, mais elle admet une preuve par transport assez simple. Comme précédemment, M désignera une variété riemannienne de dimension n.

PROPOSITION 5. — *On suppose que*

$$\mathrm{Ric}_x \geqslant (n-1)kI, \qquad \forall x \in M$$

pour un certain $k > 0$ *et on note* $d\sigma := d\,\mathrm{vol}\,/\,\mathrm{vol}(M)$ *la mesure riemannienne normalisée sur la variété (compacte)* M. *Pour toute fonction* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *régulière on a :*

$$\begin{aligned}\left(\int_M |f|^{n/(n-1)}\,d\sigma\right)^{(n-1)/n} &\leqslant \int_M |f|\,d\sigma + \frac{\mathrm{diam}(M)}{n}\int_M |\nabla f|\,d\sigma \\ &\leqslant \int_M |f|\,d\sigma + \frac{\pi}{n\sqrt{k}}\int_M |\nabla f|\,d\sigma\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que la deuxième inégalité se déduit de la première puisque le théorème de Myers donne l'estimation du diamètre suivante : diam(M) $\leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Pour démontrer la proposition, on peut supposer que $f \geqslant 0$. On note

$$c := \int_M f^{n/(n-1)}\,d\sigma$$

et on introduit le transport optimal $F(x) = \exp_x(\nabla\theta(x))$ de $(f^{n/(n-1)}/c)\,d\sigma$ sur σ. On a l'équation de changement de variable (15), valable presque partout (en un sens à préciser, voir [17, 18]) :

$$f^{n/(n-1)}(x) = c \det dF_x. \tag{24}$$

On rappelle que, pour $x_0 \in M$ (tel que $F(x_0) \notin \mathrm{cut}(x_0)$),

$$dF_{x_0} := Y(H + \mathrm{Hess}_{x_0}\theta)$$

où les matrices Y and H sont données, quand $F(x_0) \notin \mathrm{cut}(x_0)$, par

$$Y := d[\exp_{x_0}]_{\nabla\theta(x_0)} \quad \text{ et } \quad H = [\mathrm{Hess}_x\, d^2_{F(x_0)}/2]_{x=x_0}.$$

On a donc, puisque, par définition de la $d^2/2$-concavité de $-\theta$, $H + \mathrm{Hess}\,\theta \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f^{1/(n-1)}(x) &= c^{1/n}\det{}^{1/n}(Y) \times \det{}^{1/n}(H + \mathrm{Hess}\,\theta) \\ &\leqslant c^{1/n}\det{}^{1/n}(Y) \times \frac{\mathrm{tr}\,(H + \mathrm{Hess}\,\theta)}{n} \\ &\leqslant c^{1/n}\det{}^{1/n}(Y) \times \frac{\mathrm{tr}(H) + \Delta\theta}{n}\end{aligned}$$

Les théorèmes de comparaison de Bishop nous assurent que

$$\det Y \leqslant \left(\frac{\sin(d\sqrt{k})}{d\sqrt{k}}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(H) \leqslant 1 + (n-1)\frac{d\sqrt{k}}{\tan(d\sqrt{k})}$$

où $d = |\nabla\theta| = d(x, F(x))$ (il y a égalité sur la sphère). En majorant brutalement, on trouve donc

$$\det Y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(H) \leqslant n,$$

et

$$f^{1/(n-1)}(x) \leqslant c^{1/n}\left(1 + \frac{1}{n}\Delta\varphi(x)\right).$$

Cela donne

$$c = \int_M f\, f^{1/(n-1)}\, d\sigma \leqslant c^{1/n} \int_M f\, d\sigma + \frac{c^{1/n}}{n} \int_M f \Delta\theta\, d\sigma,$$

qui s'écrit encore

$$c^{1-1/n} = \left(\int_M f^{n/(n-1)}\, d\sigma\right)^{(n-1)/n} \leqslant \int_M f\, d\sigma + \frac{1}{n}\int_M f\Delta\theta\, d\sigma.$$

Il reste donc à estimer le dernier terme de droite. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_M f\Delta\theta\, d\sigma = -\int_M \nabla f \cdot \nabla\theta\, d\sigma.$$

Or $|\nabla\theta| \leqslant \operatorname{diam}(M)$ (car $d(x, F(x)) = |\nabla\theta(x)|$), ce qui donne

$$-\nabla f \cdot \nabla\theta \leqslant \operatorname{diam}(M)\, |\nabla f|.$$

On obtient bien l'inégalité annoncée.

Michael Schmuckenschläger nous a fait remarquer que l'on pouvait améliorer l'inégalité en utilisant des majorations plus fines. Si on note

$$\alpha := \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{n-1}{n}} dt,$$

alors on peut montrer par transport l'inégalité suivante

$$\left(\int |f|^{n/(n-1)}\, d\sigma\right)^{(n-1)/n} \leqslant \int |f|\, d\sigma + \frac{\alpha}{n\sqrt{k}}\int |\nabla f|\, d\sigma.$$

Cette inégalité est meilleure, mais ce n'est toujours pas l'inégalité optimale que l'on obtient en utilisant le théorème isopérimétrique de Levy-Gromov.

4. Inégalités de Prékopa-Leindler à poids sur une variété

4.1. Rappels sur le cas euclidien

Revenons à l'étude de l'inégalité de Prékopa-Leindler présentée dans l'introduction et commençons par le cas euclidien (théorème 1). On s'intéresse au cas où la mesure de référence n'est plus la mesure de Lebesgue, mais une certaine mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ avec une densité notée e^{-V} : $d\mu(x) = e^{V(x)}\,dx$. La fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est parfois appelée le potentiel. Nous allons supposer que

$$\mathrm{Hess}_x V \geqslant \lambda I, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{25}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, où I désigne toujours la matrice identité. Les travaux de Bakry et Émery suggèrent que cette condition doit être interprétée comme une condition de courbure sur l'"espace" $(\mathbb{R}^n, \mu)$. L'exemple canonique est l'espace gaussien obtenu quand $\mu = \gamma_n$, la mesure gaussienne standard donnée par $V(x) = |x|^2/2 + n\log(2\pi)/2$, et pour laquelle la condition (25) est vérifiée avec $\lambda = 1$. Si $\lambda \geqslant 0$, la densité e^{-V} est log-concave et on voit immédiatement que l'inégalité de Prékopa-Leindler (5) s'étend au cas où les intégrales sont considérées par rapport à la mesure μ. Cependant, quand $\lambda > 0$ on peut s'attendre à un renforcement de cette inégalité. C'est effectivement le cas, ainsi que l'a mis en évidence le travail de Maurey [33]. Etant donné $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, on applique l'inégalité de Prékopa-Leindler aux fonctions

$$u(x) = f(x)e^{-V(x)}, \; v(y) = g(y)e^{-V(x)}, w(z) = h(z)e^{-V(z)}.$$

On veut trouver quelle est la condition à imposer sur f, g, h pour que la condition (4) soit satisfaite. On remarque que les termes en V peuvent être simplifiés. En effet, pour toute fonction (de classe C^2) $\alpha : [0,1] :\longrightarrow \mathbb{R}$, tout $k \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, on a

$$(\,\forall t \in [0,1],\; \alpha''(t) \geqslant k\,) \implies (1-s)\alpha(0) + s\alpha(1) - \alpha(s) \geqslant k\,s(1-s)/2. \tag{26}$$

Cela se vérifie facilement en faisant deux développements de Taylor avec reste intégral (sur $[0,s]$ et sur $[s,1]$). En appliquant (26) avec $\alpha(t) := V((1-t)x + ty)$, on voit que la condition (25) implique que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(1-s)V(x) + sV(y) - V((1-s)x + sy) \geqslant \lambda\, s(1-s)|x-y|^2/2.$$

On en déduit donc la re-formulation suivante de l'inégalité de Prékopa-Leindler.

THÉORÈME 6 (Une inégalité de Prékopa-Leindler à poids sur $\mathbb{R}^n$). — *Soit μ une mesure de la forme $d\mu = e^{-V}\,dx$ où V vérifie* (25). *Soit $s \in [0,1]$ et $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h((1-s)x + sy) \geqslant e^{-\lambda\, s(1-s)\,|x-y|^2/2}\; f^{1-s}(x) g^s(y). \tag{27}$$

Alors on a : $\displaystyle\int h\,d\mu \geqslant \left(\int f\,d\mu\right)^{1-s} \left(\int g\,d\mu\right)^{s}.$

Ce résultat, qui n'est évidement pas nouveau, est en fait une simple observation qui découle de Prékopa-Leindler. Il a été utilisé par de nombreux auteurs à la suite du travail de Maurey [33]. Remarquons que l'inégalité de Prékopa-Leindler correspond au cas $V = 0$ et $\lambda = 0$. Quand $\lambda > 0$, on peut déduire de cette forme des inégalités de concentration de la mesure [33] ainsi que les inégalités de log-Sobolev que nous avons étudiées dans la partie précédente (voir [8]). Signalons enfin que Bobkov, Gentil et Ledoux [9] ont mis en évidence les liens existants entre les inégalités de Prékopa-Leindler, les inégalités de log-Sobolev et de transport, et l'hypercontractivité des solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

4.2. Le cas riemannien

Passons maintenant au cas, étudié dans [18], d'une variété riemannienne M de dimension n. Rappelons d'abord la généralisation de l'inégalité de Prékopa-Leindler (sans poids) donnée en introduction : pour $s \in [0,1]$ et $u, v : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\int_M \sup_{z \in Z_s(x,y)} \left\{ D_s(x,y)\, u^{1-s}(x) v^s(y) \right\} \, d\,\mathrm{vol}(z) \geqslant \left(\int_M u \right)^{1-s} \left(\int_M v \right)^s,$$

où le coefficient de distorsion D_s est donné par (1) et (7). Quand la courbure de Ricci est minorée,

$$\mathrm{Ric}_x \geqslant k(n-1)\, I, \qquad \forall x \in M,$$

pour un certain $k \in \mathbb{R}$, il est possible de majorer le coefficient de distorsion $D_s(x,y)$ par un facteur ne dépendant que de la distance $d(x,y)$ entre x et y. Introduisons pour cela, pour $k \in \mathbb{R}$,

$$S_k(d) := \frac{\sin(\sqrt{k}\, d)}{\sqrt{k}\, d} = \begin{cases} (\sin d)/d & \text{pour } k = 1 \quad \text{(cas sphérique)} \\ 1 & \text{pour } k = 0 \quad (\mathbb{R}^n) \\ (\sinh d)/d & \text{pour } k = -1 \quad \text{(cas hyperbolique)} \end{cases} \tag{28}$$

Si sur M on a $\mathrm{Ric} \geqslant k(n-1)$, alors il est démontré dans [17] que

$$D_s(x,y) \leqslant \left(\frac{S_k(d)}{S_k^{1-s}((1-s)d)\, S_k^s(sd)} \right)^{n-1}, \tag{29}$$

avec égalité si M a une courbure sectionnelle constante égale à k. On peut vérifier (c'est un exercice assez calculatoire) que pour tout $s \in [0,1]$, $k \in \mathbb{R}$ et $d \geqslant 0$ ($d < \pi/\sqrt{k}$ si $k > 0$), on a

$$\frac{S_k(d)}{S_k^{1-s}((1-s)d)\, S_k^s(sd)} \leqslant e^{-s(1-s)\, k d^2/2}.$$

En prenant la puissance $(n-1)$, on trouve donc une majoration de $D_s(x,y)$ dépendant de $\lambda = (n-1)k$. Par conséquent, le résultat suivant était déjà implicitement contenu dans [17].

THÉORÈME 7 (Inégalité riemannienne). — *Supposons que pour un certain* $\lambda \in \mathbb{R}$, *la courbure de Ricci sur* M *vérifie*

$$\mathrm{Ric}_x \geqslant \lambda I, \qquad \forall x \in M. \tag{30}$$

Alors, si $u, v, w : M \to \mathbb{R}_+$ *et* $s \in [0,1]$ *sont tels que, pour tout* $x, y \in M$ *et* $z \in Z_s(x,y)$,

$$w(z) \geqslant e^{-\lambda s(1-s)\, d^2(x,y)/2}\, u^{1-s}(x)\, v^s(y), \tag{31}$$

alors $\displaystyle\int_M w \geqslant \Big(\int_M u\Big)^{1-s} \Big(\int_M v\Big)^{s}$.

En comparant (25) et (27) avec (30) et (31), on voit encore l'analogie qui existe entre la courbure du potentiel V et celle de la variété.

Nous voudrions maintenant continuer notre étude en nous donnant une mesure μ sur M de la forme $d\mu = e^{-V}\, d\,\mathrm{vol}$ pour un potentiel $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$. On se demande alors quelle forme d'inégalité de Prékopa-Leindler à poids est satisfaite. Bien entendu, on peut combiner séparément (25) et (30), et obtenir une inégalité. Cependant nous voudrions qu'il soit possible que la courbure du potentiel V et de la variété puissent se compenser mutuellement. Dans l'esprit des travaux de Bakry et Émery, nous allons supposer que

$$\mathrm{Hess}_x V + \mathrm{Ric}_x \geqslant \lambda I \qquad \forall x \in M, \tag{32}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Il n'est pas clair que cette hypothèse puisse se traiter directement à partir de notre version riemannienne générale [17]. De toute façon, un des objectifs du travail [18] est de présenter une approche différente des inégalités de type Prékopa-Leindler. On utilise encore le transport de mesure mais en faisant plus appel à ses liens avec les champs de Jacobi et avec les équations qui en découlent. Le résultat principal de [18] est le suivant :

THÉORÈME 8 (Version riemannienne à poids [18]). — *Soit* μ *une mesure sur* M *de la forme* $d\mu = e^{-V}\, d\,\mathrm{vol}$ *où* V *et la courbure de Ricci vérifient* (32) *pour un certain* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Soit* $s \in [0,1]$ *et* $f, g, h : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tels que* $\forall x, y \in M$ *et* $z \in Z_s(x,y)$,

$$h(z) \geqslant e^{-\lambda s(1-s)\, d^2(x,y)/2}\, f^{1-s}(x)\, g^s(y). \tag{33}$$

Alors on a : $\displaystyle\int_M h\, d\mu \geqslant \Big(\int_M f\, d\mu\Big)^{1-s} \Big(\int_M g\, d\mu\Big)^{s}$.

La démonstration de ce résultat sera donnée dans la sous-partie qui suit. Nous voudrions ici, à titre d'illustration, expliquer comment on peut déduire de ces résultats, en suivant l'idée de Maurey [33], des inégalités de concentration de la mesure (en l'occurrence dues à Gromov et Milman [24]). Nous allons traiter le cas d'une variété compacte équipée de sa mesure de volume normalisée $d\sigma := d\,\mathrm{vol} / \mathrm{vol}(M)$ et sur laquelle on a

$$\mathrm{Ric}_x \geqslant \lambda I \qquad \forall x \in M,$$

pour un certain $\lambda > 0$. Le cas d'une variété quelconque équipée d'une *probabilité* μ de densité e^{-V} vérifiant (32) s'obtient de la même façon. Donnons-nous un ensemble $A \subset M$. On applique le théorème 7 avec $s = 1/2$ et

$$h \equiv 1, \quad g = 1_A,$$

et la meilleure $f = e^F$ possible vérifiant (31), qui est donnée par

$$F(x) = \inf_{y \in A} \lambda\, d^2(x,y)/4 =: \lambda\, d^2(x,A)/4.$$

On a donc, d'après le théorème 7, puisque $\int_M h\, d\sigma = 1$ et $\int_M g\, d\sigma = \sigma(A)$,

$$\int_M e^{\lambda\, d^2(\cdot,A)/4}\, d\sigma \leqslant \frac{1}{\sigma(A)}.$$

L'inégalité de Tchebichev donne alors

$$\sigma\left(\{x \in M\,;\ d(x,A) \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{e^{-\lambda\,\varepsilon^2/4}}{\sigma(A)}. \tag{34}$$

Cette inégalité a été obtenue par Gromov et Milman comme conséquence de l'inégalité isopérimétrique de Levy-Gromov sur M. Pour comprendre pourquoi ce type d'inégalité est appelé inégalité de concentration de la mesure, écrivons $\lambda = k(n-1)$ $(k > 0)$ et prenons un ensemble A de mesure supérieure ou égale à $1/2$. Alors (34) devient

$$\sigma\left(\{x \in M\,;\ d(x,A) \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant 2e^{-k(n-1)\,\varepsilon^2/4}. \tag{35}$$

On voit donc qu'en *grandes dimension* $(n \to \infty)$, la mesure se concentre autour de l'ensemble A. On peut aussi démontrer, en suivant encore [33], que pour toute application 1-lipschitzienne $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\sigma\left(\left\{x \in M\,; \left|F - \int F\, d\sigma\right| \geqslant t\right\}\right) \leqslant 2e^{-k(n-1)\,t^2/4}$$

La fonction F se concentre donc autour de sa moyenne.

Regardons, par exemple, le cas de la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ qui a une courbure de Ricci constante égale à $(n-1)I$. La mesure de probabilité σ est dans ce cas la mesure sphérique usuelle. En appliquant (34) pour le demi-espace (ou calotte) $A = \{x \in S^n;\ x_{n+1} \geqslant 0\}$ qui a pour mesure $1/2$, on a, puisque $x_{n+1} \leqslant -\varepsilon \Rightarrow d(x,A) \geqslant \varepsilon$ (parce que $\sin t \leqslant t$),

$$\sigma\left(\{x \in S^n\,; x_{n+1} \leqslant -\varepsilon\}\right) \leqslant 2e^{-(n-1)\,\varepsilon^2/4}.$$

En faisant le même raisonnement avec le demi-espace $A = \{x \in S^n;\ x_{n+1} \geqslant 0\}$, on obtient, en sommant les deux estimations obtenues,

$$\sigma\left(\{x \in S^n\,; |x_{n+1}| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant 4e^{-(n-1)\,\varepsilon^2/4},$$

soit encore

$$\sigma\left(\{x \in S^n\,;\, |x_{n+1}| \leqslant \varepsilon\}\right) \geqslant 1 - 4e^{-(n-1)\,\varepsilon^2/4}.$$

Signalons que cette inégalité peut s'obtenir de façon élémentaire par un calcul direct. L'intérêt de ce cas particulier est de mettre en évidence phénomène de concentration de la mesure : la mesure sphérique σ se concentre, en grandes dimensions, autour de l'équateur $x_{n+1} = 0$. Pour le voir, on peut prendre une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $\sqrt{n}\varepsilon_n \to +\infty$, par exemple

$$\varepsilon_n = 2\sqrt{\frac{\log(n/4)}{n-1}} \longrightarrow 0.$$

On a alors, quand $n \to \infty$,

$$\sigma\left(\{x \in S^n\,;\, |x_{n+1}| \leqslant \varepsilon_n\}\right) \geqslant 1 - 1/n \longrightarrow 1 = \sigma(S^n).$$

Pour plus d'informations sur le phénomène de concentration de la mesure en grandes dimensions et en particulier sur ses liens avec l'inégalité de Sobolev logarithmique, nous renvoyons à Ledoux [27, 28, 29, 30].

4.3. Preuve du théorème 8

Nous avons vu à la partie §2 que les différentielles $A(t) := d(F_t)_{x_0}$ en $x_0 \in M$ du transport $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\theta(x))$, $t \in [0,1]$, définissaient une matrice inversible de champs de Jacobi $A(t)$ le long de la géodésique $t \longrightarrow F_t(x_0)$ vérifiant

$$A(0) = I \quad \text{et} \quad A'(0) = \operatorname{Hess}_{x_0}\varphi.$$

Pour l'étude du déterminant jacobien, il est donc important de comprendre le comportement du déterminant d'une matrice de champs de Jacobi. Le lemme suivant sera fondamental pour la suite.

LEMME 9. — *Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ une géodésique et $t \longrightarrow A(t)$ une matrice inversible de champs de Jacobi le long de γ telle que $A(0) = I$ et $A'(0)$ soit symétrique. Alors, si on pose $\varphi(t) := -\log\det A(t)$ et $r(t) = \operatorname{Ric}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$, on a, pour tout $t \in [0,1]$,*

$$\varphi''(t) - \frac{1}{n}\varphi'(t)^2 - r(t) \geqslant 0.$$

On rappelle que $r(t)$ est exactement la trace de $R(t)$, la matrice de l'opérateur (17). On voit que la propriété des champs de Jacobi (16) permet de réduire ce lemme à celui d'un exercice d'algèbre linéaire. Plus précisément, c'est une conséquence du lemme suivant, qui est purement algébrique.

LEMME 10. — *Soit $R(t)$ et $A(t)$ deux fonctions régulières de la variable $t \in [0,1]$ à valeurs dans les matrices $n \times n$ et vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$R(t)$ est symétrique et $A(t)$ est inversible pour tout $t \in [0,1]$.*

2. $A''(t) + R(t)A(t) = 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$.
3. $A(0) = I$.
4. $A'(0)$ *est symétrique.*

Alors, si on pose $\varphi(t) := -\log\det A(t)$, *on a* $\varphi'' - \dfrac{1}{n}\varphi'^2 - \operatorname{tr} R \geqslant 0$.

Preuve du lemme 10. En posant $B(t) := A'(t)A(t)^{-1}$, on a

$$\varphi'(t) = -\operatorname{tr} B \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = -\operatorname{tr} B'.$$

Notons que B est une matrice symétrique. Pour le voir, on remarque d'abord que

$$B^* - B = A^{*-1}(A'^*A - A^*A')A^{-1}.$$

Le terme $A'^*A - A^*A'$ est constant puisque, en utilisant $R = R^*$, on a

$$(A'^*A - A^*A')' = -A^*R^*A + A^*RA = 0.$$

Par conséquent, on voit que

$$A'^*A - A^*A' = A'^*(0)A(0) - A^*(0)A'(0) = A'^*(0) - A'(0) = 0,$$

et donc que $B = B^*$. Comme $A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0$, on a $B' = A''A^{-1} - B^2 = -R - B^2$, et en prenant la trace

$$\varphi'' = -\operatorname{tr} B' = \operatorname{tr}(B^2) + \operatorname{tr} R.$$

On utilise alors l'inégalité d'Hölder sous la forme

$$\operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(BB^*) \geqslant \frac{1}{n}(\operatorname{tr} B)^2.$$

Puisque $\operatorname{tr} B = \varphi'$, on trouve bien que $\varphi'' \geqslant \frac{1}{n}\varphi'^2 + \operatorname{tr} R$. □

Nous avons maintenant tous les outils pour montrer la version riemannienne de l'inégalité de Prékopa-Leindler à poids. Soit f, g, h comme dans l'énoncé du théorème 8. On peut supposer, si on veut, que les fonctions sont à support compact et que $\int_M f\,d\mu = \int_M g\,d\mu = 1$. Notre but est donc de prouver que $\int_M h\,d\mu \geqslant 1$. Pour ce faire, nous allons introduire le transport optimal de mesure $F(x) = \exp_x(\nabla\theta(x))$ transportant $f\,d\mu$ sur $g\,d\mu$. Nous allons faire comme si ce transport était régulier, ce qui n'est pas le cas *a priori* ; nous renvoyons à [18] pour voir où l'on doit appliquer des rustines.

Pour calculer l'intégrale $\int_M h(z)\,d\mu(z)$, on fait le changement de variables $z = F_s(x)$ où, pour tout $t \in [0,1]$,

$$F_t(x) := \exp_x(t\nabla\theta(x)).$$

On a

$$\begin{aligned}\int_M h\,d\mu &= \int_M f(F_s(x))\det(d(F_s)_x)\,e^{-V(F_s(x))}\,dx\\ &= \int_M f(F_s(x))\,e^{-V(F_s(x))-\varphi_x(s)}\,dx\end{aligned}$$

en posant

$$\varphi_x(t) := -\log\det d(F_t)_x, \qquad \forall t \in [0,1].$$

En utilisant l'hypothèse (31) sur les fonctions f, g, h et éliminant $g(F(x))$ grâce à l'équation de changement de variables (15) qui devient ici

$$f(x)e^{-V(x)} = g(F(x))e^{-V(F(x))}\det dF_x = g(F(x))e^{-V(F(x))-\varphi_x(1)},$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\int_M h\,d\mu \quad &\geqslant \quad \int_M \exp\Big\{(1-s)V(x) + sV(F(x)) - V(F_s(x)) + s\varphi_x(1) - \varphi_x(s)\\ &\qquad -\lambda\, s(1-s)\, d^2(x,F(x))/2\Big\}\, f(x)\, e^{-V(x)}\, dx.\end{aligned}$$

Pour conclure que $\int_M h\,d\mu \geqslant 1 = \int_M f\,d\mu$, il suffit de montrer que pour tout $x \in M$,

$$(1-s)V(x) + sV(F(x)) - V(F_s(x)) + s\varphi_x(1) - \varphi_x(s) \geqslant \lambda\, s(1-s)\, d^2(x,F(x))/2. \tag{36}$$

Pour cela, on fixe un $x_0 \in M$ et on note pour simplifier $\varphi(t) := \varphi_{x_0}(t)$ et $d := d^2(x_0, F(x_0))$. On rappelle que $\{d(F_t)_{x_0}\}_{t\in[0,1]}$ est une matrice de champs de Jacobi le long de la géodésique $\gamma(t) := F_t(x_0)$ joignant x_0 à $F(x) = F_1(x)$. Cette géodésique γ a une vitesse constante égale à $d = d(\gamma(0),\gamma(1)) = |\dot\gamma(t)|$ pour tout $t \in [0,1]$. Puisque $\varphi(0) = 0$, on voit que (36) est équivalent à

$$(1-s)\alpha(0) + s\alpha(1) - \alpha(s) \geqslant \lambda\, s(1-s)\, d^2/2. \tag{37}$$

où

$$\alpha(t) := V(\gamma(t)) + \varphi(t), \qquad \forall t \in [0,1].$$

En utilisant le lemme 9 et l'hypothèse (32), on trouve

$$\begin{aligned}\alpha''(t) \quad &= \quad \mathrm{Hess}_{\gamma(t)}\, V(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) + \varphi''(t)\\ &\geqslant \quad \mathrm{Hess}_{\gamma(t)}\, V(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) + \frac{1}{n}\varphi'(t)^2 + \mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\\ &\geqslant \quad (\mathrm{Hess}_{\gamma(t)}\, V + \mathrm{Ric}_{\gamma(t)})\,(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\\ &\geqslant \quad \lambda\,|\dot\gamma(t)|^2\end{aligned}$$

et par conséquent $\alpha'' \geqslant \lambda\, d^2$ sur [0,1]. En utilisant (26), on trouve donc que (37) est vérifiée. Cela achève la preuve de théorème 8. □

Références

[1] M. AGUEH, N. GHOUSSOUB ET X. KANG, Geometric inequalities via a general comparison principle for interacting gases, *Geom. Funct. Anal.*, 14 (2004), 215–244.

[2] A. ALVINO, V. FERONE, G. TROMBETTI, ET P.-L. LIONS, Convex symmetrization and applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14, (1997), 275–293.

[3] T. Aubin, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Differential Geometry 11*, 4 (1976), 573–598.

[4] D. Bakry et M. Émery, Diffusions hypercontractives, in *Séminaire de Probabilités XIX*, Lecture Notes in Math., **1123**, Springer (1985), 177–206.

[5] K.M. Ball, An elementary introduction to modern convex geometry, in *Flavors of geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 31, Cambridge Univ. Press (1997), 1–58.

[6] F. Barthe, On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality, *Invent. Math.*, 134 (1998), n∘2, 335–361.

[7] F. Barthe, Optimal Young's inequality and its converse : a simple proof, *Geom. Funct. Anal.*, 8 (1998), 234–242.

[8] S. Bobkov et M. Ledoux, From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities, *Geom. Funct. Anal.*, 10 (2000), 1028–1052.

[9] S. Bobkov, I. Gentil et M. Ledoux, Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations, *J. Math. Pures Appl.* (9) 80 (2001), n∘4, 669–696.

[10] C. Borell, Convex set functions in d-space, *Period. Math. Hungar.*, 6 (1975), 111–136.

[11] H.J. Brascamp et E.H. Lieb, On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation, *J. Funct. Anal.*, 22 (1976), 366–389.

[12] Y. Brenier, Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305 (1987), 805–808.

[13] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 (1991), 375–417.

[14] J Brothers et W. Ziemer Minimal rearrangements of Sobolev functions, *J. Reine Angew. Math.*, 384 (1988), 153–179

[15] D. Cordero -Erausquin, Some applications of mass transport to Gaussian type inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 161 (2002), 257–269.

[16] D. Cordero -Erausquin, W. Gangbo, C. Houdré, Inequalities for generalized entropy and optimal transportation, in *Recent Advances in the Theory and Applications of Mass Transport*, Contemp. Math., 353, A.M.S., 2004.

[17] D. Cordero -Erausquin, R.J. McCann et M. Schmuckenschläger, A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.*, 146 (2001), 219–257.

[18] D. Cordero -Erausquin, R.J. McCann et M. Schmuckenschläger, Prékopa-Leindler type inequalities on Riemannian manifolds, mass transport and Jacobi fields, Preprint (2004).

[19] D. Cordero -Erausquin, B. Nazaret et C. Villani, A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Adv. Math.*, 182 (2004), n°2, 307–332.

[20] S. Das Gupta, Brunn-Minkowski inequality and its aftermath, *J. Multivariate Anal.*, 10 (1980), 296–318.

[21] O. Druet et E. Hebey, The *AB* program in geometric analysis : sharp Sobolev inequalities and related problems, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 160 (2002), n°761.

[22] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag (Universitext), Berlin, 1990.

[23] R.J. Gardner, The Brunn-Minkowski inequality, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 39-3 (2002), 355–405.

[24] M. Gromov et V. Milman, A topological application of the isoperimetric inequatliry, *Amer. J. Math.*, 105 (1983), 843–854.

[25] H. Hadwiger et D. Ohmann, Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie, *Math. Z.*, 66 (1956), 1–8.

[26] H. Knothe, Contributions to the theory of convex bodies, *Michigan Math. J.*, 4 (1957), 39–52.

[27] M. Ledoux, Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities, in *Séminaire de Probabilités XXXIII*, Lecture Notes in Math. 1709, Springer (1999), 120-216.

[28] M. Ledoux, The geometry of Markov diffusion generators, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) 9 (2000), n°2, 305–366.

[29] M. Ledoux, *Measure concentration, transportation cost, and functional inequalities*, Summer School on Singular Phenomena and Scaling in Mathematical Models, Bonn, 10-13 June 2003 (http://www.lsp.ups-tlse.fr/Ledoux).

[30] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[31] L. Leindler, On a certain converse of Hölder's inequality, *Acta Sci. Math.*, 33 (1972), 217–233.

[32] F. Maggi et C. Villani, Balls have the worst best Sobolev inequality, Preprint (2004).

[33] B. Maurey, Some deviation inequalities, *Geom. Funct. Anal.*, 1 (1991), 188–197.

[34] B. Maurey, Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik, et autres inégalités géométriques et fonctionnelles, *Séminaire Bourbaki*, Novembre 2003.

[35] R.J. McCann, Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps, *Duke. Math. J.*, 80 (1995), 309–323.

[36] R.J. McCann, A convexity principle for interacting gases, *Adv. Math.*, 128 (1997), 153–179.

[37] R.J. McCann, Polar factorization of maps on Riemannian manifolds, Geom. Funct. Anal., 11 (2001), n°3, 589–608.

[38] V. Milman et G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, LNM n°1200, Springer, Berlin, 1986. With an appendix by M. Gromov.

[39] G. Monge, Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences (Année 1781)*, Imprimerie Royale, Paris (1784), 666–704.

[40] F. Otto, The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation, *Comm. Partial Differential Equations*, 26 (2001), n° 1-2, 101–174.

[41] F. Otto et C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.*, 173 (2000), 361–400.

[42] A. Prékopa, Logarithmic concave measures with application to stochastic programming, *Acta Sci. Math.*, 32 (1971), 301–315.

[43] A. Prékopa, On logarithmic concave measures and functions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 34 (1973), 335–343.

[44] R. Schneider, *Convex Bodies : the Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[45] K.-T. Sturm et M.-K. von Renesse, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, à paraître dans *Comm. Pure Appl. Math.*

[46] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.* (IV), 110 (1976), 353–372.

[47] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Math. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

Dario CORDERO-ERAUSQUIN
Université de Marne la Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR 8050)
77454 MARNE LA VALLÉE Cedex 2

cordero@math.univ-mlv.fr