Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Nader Yeganefar

Formes harmoniques L^2 sur les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 55-59

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__55_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 2002-2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 55–59

FORMES HARMONIQUES L^2 SUR LES VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES COMPLEXES

Nader YEGANEFAR

1. Introduction

Le théorème classique de Hodge-de Rham pour une variété riemannienne (M,g) compacte identifie l'espace $\mathscr{H}^*(M,g)$ des formes harmoniques L^2 à la cohomologie de cette variété. Lorsque M n'est plus compacte, $\mathscr{H}^*(M,g)$ est encore intéressant à étudier, même s'il n'existe aucun résultat général qui en donne une interprétation topologique. Cependant, pour certaines géométries particulières, on dispose de résultats à la Hodge-de Rham : voir par exemple les travaux d'Atiyah, Patodi et Singer [APS] sur les variétés à bouts cylindriques, de Zucker [Z] sur certains produits tordus, de Mazzeo et Mazzeo-Phillips [M, MP] sur les variétés hyperboliques géométriquement finies, de Carron [C] sur les variétés plates à l'infini, etc.

Le but de cette note est de traiter (en partie) le cas des variétés dites asymptotiquement hyperboliques complexes au sens de Biquard et Herzlich [BH] (voir plus loin pour la définition). La méthode employée est tirée de [Y], et s'applique aussi à plusieurs autres cas. Nous allons montrer :

THÉORÈME 1. — *Soit (M^{2m},g) une variété riemannienne de dimension $2m$ portant une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe. Alors on a les isomorphismes*

$$\mathscr{H}^k(M) \simeq \begin{cases} H_c^k(M), & si\ k < m-1, \\ H^k(M), & si\ k > m+1. \end{cases}$$

De plus, $H_c^{m-1}(M)$ s'injecte dans $\mathscr{H}^{m-1}(M)$ et $\mathscr{H}^{m+1}(M)$ se surjecte dans $H^{m+1}(M)$.

La suite de ce papier est organisée de la façon suivante : dans un premier temps, nous présentons quelques généralités sur les formes harmoniques L^2, et leur lien avec la L^2-

2000 Mathematics Subject Classification: 58J10.

cohomologie. Dans un deuxième temps, nous rappelons des faits sur les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes. Enfin, nous finissons par la preuve du théorème 1.

Remerciements. Je tiens tout d'abord à remercier G. Carron pour son aide. Je remercie également V. Bayle de m'avoir invité et accueilli à Grenoble.

2. Formes harmoniques L^2 et L^2-cohomologie

Nous rappelons dans cette partie des faits bien connus sur le laplacien et la L^2-cohomologie (voir par exemple le papier de Lott [L] ou celui de Carron [C]). Soit (M,g) une variété riemannienne complète. On note $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ (respectivement $L^2(\Lambda^k T^*M)$, etc.) l'ensemble des k-formes lisses à support compact (respectivement de carré intégrable, etc.) dans M. Le k-ème espace de L^2-cohomologie (réduite) de M est défini par

$$H_2^k(M) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) / \; d\alpha = 0\right\} / \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^*M)}^{L^2}.$$

Un autre espace très proche souvent considéré est l'espace de L^2-cohomologie non réduite, qui est le quotient de $\left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) / \; d\alpha = 0\right\}$ par $\{d\alpha / \; \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1} T^*M), \; d\alpha \in L^2\}$, sans prendre d'adhérence. En général, L^2-cohomologie réduite et non réduite ne sont pas égales. Il y a néanmoins égalité en degré k lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k agissant sur les k-formes L^2. Dans la suite, "L^2-cohomologie" voudra dire "L^2-cohomologie réduite".

Il y a une interprétation de la L^2-cohomologie en termes de formes harmoniques. En effet, notons $\mathscr{H}^k(M)$ l'espace des k-formes harmoniques L^2 de M :

$$\mathscr{H}^k(M) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) / \; d\alpha = \delta\alpha = 0\right\},$$

où δ est l'opérateur défini initialement sur les formes lisses à support compact comme l'adjoint de d. Comme M est complète, $\mathscr{H}^*(M)$ est aussi le noyau L^2 du laplacien $\Delta = (d+\delta)^2$. Un fait important est la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira :

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \mathscr{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^*M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^*M)},$$

et de plus,

$$\left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) / \; d\alpha = 0\right\} = \mathscr{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^*M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^k(M) \simeq \mathscr{H}^k(M).$$

Maintenant, si (M,g) est une variété avec un bord compact, et métriquement complète, on peut aussi définir des espaces de L^2-cohomologie absolue (ou relative, mais nous n'en aurons pas besoin). On note par $C_b^\infty(\Lambda^k T^*M)$ l'espace des k-formes lisses à support

borné sur M, le support pouvant rencontrer le bord (contrairement à ce qui se passe pour les éléments de C_0^∞). L'espace de L^2-cohomologie absolue est alors défini par :

$$H_2^k(M) = (\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M))^\perp \Big/ \overline{dC_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

Cet espace est isomorphe à un espace de formes harmoniques vérifiant la condition absolue sur le bord ∂M : si $i_\nu\alpha$ désigne le produit intérieur de la forme α par la normale ν sur ∂M, alors

$$H_2^k(M) \simeq \mathscr{H}_A^k(M) := \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) / \; d\alpha = \delta\alpha = 0, i_\nu\alpha = 0\right\}.$$

3. Variétés asymptotiquement hyperboliques complexes

Nous allons considérer ici des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes au sens de Biquard et Herzlich ("ACH" dans la terminologie de [BH]) et rappeler la construction de ces deux auteurs. Soit Σ^{2m-1} une variété de dimension (réelle) $2m-1$, pseudo-convexe, munie d'une structure de contact CR. Si η est une forme de contact, et J une structure presque-complexe compatible sur l'hyperplan de contact H, on dispose sur cet hyperplan de contact de la métrique $\gamma(\cdot,\cdot) = d\eta(\cdot, J\cdot)$, ce qui permet de munir la variété $[0,\infty[\times\Sigma$ de la métrique

$$g = dr^2 + e^{2r}\eta^2 + e^r\gamma, \tag{1}$$

et on dit que g est une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe. Les exemples de telles variétés sont les quotients convexes cocompacts de l'espace hyperbolique complexe, ou encore les domaines fortement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^m$ munis de leur métrique de Bergmann.

Dans la suite, on supposera que Σ est compacte sans bord. Nous voulons déterminer les espaces de L^2-cohomologie d'une variété ayant des bouts asymptotiquement hyperboliques complexes. Pour des raisons qui deviendront claires plus tard, nous avons besoin de diagonaliser le hessien $\mathrm{Hess}(r)$ de la fonction r dans une bonne base. Tout d'abord, notons par R le champ de Reeb associé à la forme de contact η :

$$i_R\eta = 1, \; i_R d\eta = 0.$$

La structure presque-complexe J sur l'hyperplan de contact H se prolonge en une structure presque-complexe sur $[0,\infty[\times\Sigma$ en posant $J\partial_r = e^{-r}R$. On considère alors un repère g-orthonormal adapté à J : si $h_1, Jh_1, \ldots, h_{m-1}, Jh_{m-1}$ est un repère orthonormal de H pour γ, on pose $e_1 = \partial_r$, $e_2 = J\partial_r = e^{-r}R$, $e_3 = e^{-r/2}h_1$, $e_4 = e^{-r/2}Jh_1, \ldots, e_{2m-1} = e^{-r/2}h_{m-1}$, $e_{2m} = e^{-r/2}Jh_{m-1}$. Un calcul analogue à celui de [BH, lemme 2.1] montre alors

LEMME 2. — *Le hessien $\mathrm{Hess}(r)$ se diagonalise dans cette base $e_1, \ldots e_{2m}$, avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \ldots = \lambda_{2m} = 1/2$.*

4. Preuve du résultat principal

Nous présentons ici la démonstration du théorème 1. Soit (M,g) une variété riemannienne qui en dehors d'un compact K est difféomorphe à une variété de la forme $[0,\infty[\times\Sigma$ portant la métrique asymptotiquement hyperbolique complexe (1). Par dualité, il suffit de traiter les degrés $k < m$.

PREMIÈRE ÉTAPE : nous montrons d'abord que zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k, pour $k < m-1$, ce qui équivaut (voir par exemple les travaux d'Anghel, [A]) à voir qu'on a une inégalité de Poincaré à l'infini : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M \setminus K)), C\|\alpha\|_{L^2} \leqslant \|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}.$$

Nous utilisons pour cela la formule d'intégration par parties de Donnelly et Xavier [DX] (la version donnée ici est plutôt tirée des articles d'Escobar et Freire [EF], et Ballmann et Brüning [BB]). Notons par $\nu = -\partial_r$ la normale unitaire sortante sur le bord $\{0\}\times\Sigma$ de $M \setminus K$, et par $e_1, \dots e_{2m}$ un repère local g-orthonormal sur $M \setminus K$ qui diagonalise le hessien $\mathrm{Hess}(r)$, avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \dots = \lambda_{2m} = 1/2$ (voir le lemme 2). Si α est une k-forme définie sur $M \setminus K$, la formule de Donnelly et Xavier est la suivante :

$$\int_{M\setminus K}\left[2\sum_j \lambda_j |i_{e_j}\alpha|^2 - \Big(\sum_j \lambda_j\Big)|\alpha|^2\right]\mathrm{d}v_g = 2\int_{M\setminus K}\left[\langle i_{\partial_r} d\alpha,\alpha\rangle + \langle i_{\partial_r}\alpha,\delta\alpha\rangle\right]\mathrm{d}v_g + \int_\Sigma\left[-|\alpha|^2\frac{\partial r}{\partial \nu} + 2\langle i_{\partial_r}\alpha, i_\nu\alpha\rangle\right]\mathrm{d}\sigma, \quad (2)$$

où $i_X\alpha$ désigne le produit intérieur de la forme α par le champ de vecteurs X, $\mathrm{d}v_g$ est la mesure riemannienne associée à g, et $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure riemannienne induite sur $\{0\}\times\Sigma$. Mais en raisonnant comme dans [BB, partie 5], on a

$$2\sum_j \lambda_j |i_{e_j}\alpha|^2 - \Big(\sum_j \lambda_j\Big)|\alpha|^2 \leqslant (k+1-m)|\alpha|^2. \quad (3)$$

En utilisant l'inégalité $|i_X\alpha| \leqslant |X||\alpha|$, valable pour tout champ de vecteurs X et toute forme α, des inégalités de Cauchy-Schwarz, et le fait que $|\partial_r| = 1$, on déduit de (2) et (3) :

$$(m-1-k)\|\alpha\|_{L^2}^2 \leqslant \|\alpha\|_{L^2}\left[\|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}\right] + \int_\Sigma\left[-|\alpha|^2 + 2|i_\nu\alpha|^2\right]\mathrm{d}\sigma \quad (4)$$

Si maintenant α est une k-forme à support compact dans l'intérieur de $M \setminus K$, alors le terme de bord dans l'inégalité précédente est nul, d'où l'on obtient facilement une inégalité de Poincaré à l'infini si $k < m-1$.

DEUXIÈME ÉTAPE : soit k un entier. Considérons la suite suivante

$$H_2^{k-1}(M \setminus K) \xrightarrow{b} H_c^k(K) \xrightarrow{e} H_2^k(M) \xrightarrow{r} H_2^k(M \setminus K),$$

où b est défini de manière analogue à l'homomorphisme cobord en cohomologie de de Rham, e est l'extension par zéro, et r la restriction (voir par exemple [C] ou [Y]). L'analogue de cette suite en L^2-cohomologie non réduite est toujours exacte grâce aux travaux de Cheeger. Ici, zéro n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_k pour $k < m-1$, donc d'après [Y, corollaire 1.4], la suite est exacte pour $k \leqslant m-1$ (on notera aussi l'exactitude pour $k = m-1$). Il nous suffit donc de montrer que les espaces $H_2^k(M \setminus K)$ sont nuls pour $k < m-1$, et on aura fini. Soient donc $k < m-1$ un entier, et $[\alpha]$ une classe de $H_2^k(M \setminus K)$. On peut choisir un représentant α de cette classe qui est harmonique et vérifie la condition absolue au bord de $M \setminus K$: α est dans $L^2(\Lambda^k T^*(M \setminus K))$, vérifie $d\alpha = \delta\alpha = 0$, et $i_\nu \alpha = 0$ sur $\{0\} \times \Sigma$. D'après l'inégalité (4), on a

$$(m-1-k)\|\alpha\|_{L^2}^2 \leqslant \int_\Sigma -|\alpha|^2 d\sigma \leqslant 0,$$

donc $\alpha = 0$. □

Bibliographie

[A] N. Anghel, *An abstract index theorem on non-compact Riemannian manifolds*, Houston J. Math., **19-2** (1993), 223–237.

[APS] M. F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I.*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **77** (1975), 43–69.

[BB] W. Ballmann, J. Brüning, *On the spectral theory of manifolds with cusps*, J. Math. Pures Appl., **80-6** (2001), 593–625.

[BH] O. Biquard, M. Herzlich, *A Burns-Epstein invariant for ACHE 4-manifolds*, math.DG/0111218 A (2002).

[C] G. Carron, *L^2-cohomology of manifolds with flat ends*, prépublication (2001).

[DX] H. Donnelly, F. Xavier, *On the differential form spectrum of negatively curved riemannian manifolds*, Amer. J. Math., **106** (1984), 169–185.

[EF] J.F. Escobar, A. Freire, *The differential form spectrum of manifolds of positive curvature*, Duke Math. J., **69-2** (1993), 1–42.

[L] J. Lott, *The zero-in-the-spectrum question*, Enseign. Math., II Sér. **42-3 & 4** (1996), 341–376.

[M] R. Mazzeo, *The Hodge cohomology of a conformally compact metric*, J. Differential Geom., **28-2** (1988), 309–339.

[MP] R. Mazzeo, R. S. Phillips, *Hodge theory on hyperbolic manifolds*, Duke Math. J., **60-2** (1990), 509–559.

[Y] N. Yeganefar, *Sur la L^2-cohomologie des variétés à courbure négative*, prépublication (2002).

[Z] S. Zucker, *L_2 Cohomology of Warped Products and Arithmetic Groups*, Inventiones Math., **70** (1982), 169–218.

Nader YEGANEFAR
Département de Mathématiques UMR 6629
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière - BP 92208
44322 NANTES Cédex 3

Nader.Yeganefar@math.univ-nantes.fr