Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Grégoire Charlot

Métriques sous-riemanniennes de quasi-contact : forme normale et caustique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 20 (2001-2002), p. 131-137

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2001-2002__20__131_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **20** (2002) 131–137

MÉTRIQUES SOUS-RIEMANNIENNES DE QUASI-CONTACT : FORME NORMALE ET CAUSTIQUE

Grégoire CHARLOT

In this paper, all considerations are local, around a point $\mathfrak{p}$, so we will assume that we work over the manifold $M = \mathbf{R}^{2n+2}$.

Let $(\mathbf{R}^{2n+2}, \Delta, g)$ be a quasi-contact subriemannian structure, that is, for any 1-form ω such that $\ker(\omega) = \Delta$, then $\ker(d\omega_{|\Delta})$ has dimension 1, and g is a riemannian metric over Δ. We denote by δ the kernel of $d\omega_{|\Delta}$ and by Δ_0 its orthogonal for g in Δ. We choose ω such that $\ker(\omega) = \Delta$, $(d\omega_{|\Delta_0})^n = \mathrm{vol}_{g|\Delta_0}$. It is defined up to sign.

Let $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}'}$ be the endomorphism of $\Delta(\mathfrak{p}')$, skew-symmetric w.r.t. g, such that $d\omega_{\cdot\Delta(\mathfrak{p}')} = g(\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}'}\cdot, \cdot)$. Its eigenvalues are complex numbers. In all the sequel, we will assume that these eigenvalues are all simple at the point $\mathfrak{p}$. Now, we can write them:

$$\{-i\alpha_1, \ldots, -i\alpha_n, 0, i\alpha_n, \ldots, i\alpha_1\}$$

with $0 < \alpha_n < \ldots < \alpha_1$. We denote by $\delta_i(\mathfrak{p}')$ the 2-dimensional stable space associated with α_i at $\mathfrak{p}'$. Close to $\mathfrak{p}$, on can check that $[\delta_1, \delta_1] \cap \delta_1^{\perp d\omega}$ has dimension 1 and is transversal to Δ, where $\delta_1^{\perp d\omega}$ is the orthogonal to δ_1 for $d\omega$. We denote by ν the vector field in this intersection that satisfies $\omega(\nu) = 1$.

Now, we can state the normal coordinates:

THEOREM 1. — *In a neighborhood of a point* $\mathfrak{p}$ *where the* α_i *are all distinct and non zero, there exists a local coordinate system* $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z, w)$, *called a* normal coordinate system, *such that:*

- $(0, \ldots, 0) = \mathfrak{p}$.
- *Along the* w*-axis we have* $\frac{\partial}{\partial w} = \nu$.
- *The couple* $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ *is a basis of* δ_i *such that* $d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) > 0$ *and* $span(\frac{\partial}{\partial z}) = \ker d\omega_{|\Delta}$ *along the* w*-axis.*

Classification math. : 53C17, 32S05, 49J15.

- *The lines contained in a set $S_{w_0} = \{w = w_0\}$ and containing $(0, w_0)$ are geodesics of the subriemannian structure, that minimize the subriemannian distance to the w-axis. The local distance between (x_i, y_i, z, w) and the w-axis is $\sqrt{z^2 + \sum_i x_i^2 + y_i^2}$.*

- *If we denote by P_{w_0} the orthogonal projection on S_{w_0} in this coordinate system, then we can define a metric g_{w_0} at each point $\mathfrak{p}' \in S_{w_0}$ by $(g_{w_0})_{\mathfrak{p}'} = (dP_{w_0|\Delta_{\mathfrak{p}'}})_* g$. The sectional curvatures of g_{w_0}, relative to the 2-planes $\delta_i(0, w_0)$ all vanish at $(0, w_0)$.*

This normal coordinate system is unique up to rotations in the spaces $\delta_i(\mathfrak{p})$ hence up to a maximal torus T^n of $SO(\Delta_{\mathfrak{p}})$. Because the normal coordinates are privileged coordinates in the sense of [9], we can associate weight 1 with the coordinates x_i, y_i, z and weight 2 with w.

Now, computing in a normal coordinate system, we want to construct a field of normal frames $\mathcal{F}$ of the distribution, $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} Q \\ L \end{pmatrix}$, where Q is a $(2n+1)\times(2n+1)$-block and L is a $1 \times (2n+1)$-block. The columns of the matrix are the vector fields of the frame $\mathcal{F}$, written in the normal coordinates. Let K be the matrix of g_{w_0} in the basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. We choose $Q = K^{-\frac{1}{2}}$. Then L is determined by ω. The matrices L and Q have properties that one can find in theorem 2 below.

Let us denote by $S^l(\Delta_{\mathfrak{p}})$ the space of contravariant symmetric tensors of degree ℓ over Δ and by $S^l(\Delta_{\mathfrak{p}}^*)$ the space of covariant symmetric tensors of degree ℓ over Δ. The normal form allows to define a familly of tensors:

$$B^1_{\ell,k} : \left\{ \begin{array}{ccc} S^\ell(\Delta(\mathfrak{p})) \otimes S^2(\Delta(\mathfrak{p})) & \to & \mathbf{R} \\ (U_1 \odot \ldots \odot U_\ell) \otimes (V_1 \odot V_2) & \mapsto & \mathrm{D}^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k}({}^t V_1 Q V_2)\right)_{|\mathfrak{p}} (U_1 \odot \ldots \odot U_\ell) \end{array} \right.$$

and

$$B^2_{\ell,k} : \left\{ \begin{array}{ccc} S^\ell(\Delta(\mathfrak{p})) \otimes \Delta(\mathfrak{p}) & \to & \mathbf{R} \\ (U_1 \odot \ldots \odot U_\ell) \otimes (V) & \mapsto & \mathrm{D}^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k}(L.V)\right)_{|\mathfrak{p}} (U_1 \odot \ldots \odot U_\ell) \end{array} \right.$$

where D^ℓ denote the ℓ^{th} derivative with respect to (x_i, y_i, z). When we move the basepoint $\mathfrak{p}$ we build fields of tensors. They are invariants of the subriemannian structure. The action of T^n on $\Delta(\mathfrak{p})$ induces a unitary representation of T^n on the typical fibers of the tensor bundles in consideration. T^n being abelian and compact, these unitary representations are unitarily equivalent to a finite direct sum of characters.

The space of covariant symmetric tensors of degree k over $\Delta(\mathfrak{p})$ can be canonically identified to the set $\widetilde{S}^k(\Delta^*(\mathfrak{p}))$ of real parts of homogeneous polynomials of degree k of the complex variables $z_j = x_j + iy_j$ and $\bar{z}_j$ $(j = 1, \dots, n)$, and of the real variable z. The action of T^n is the one associated with the basic characters $\mathcal{X}(\theta)z_j = \mathrm{e}^{i\theta_j} z_j$. A decomposition of this action of T^n on $\widetilde{S}^k(\Delta^*)$ in characters is the following: a polynomial

$P_k(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$ can be written in a unique way:

$$P_k(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z) = \sum_{\substack{I,J,\ell \\ \ell+\sum_i I_i+J_i=k}} \mathrm{Re}(\Lambda_{I,J,\ell}(\prod_i z_i^{I_i}\bar{z}_i^{J_i})z^\ell)$$

with $\overline{\Lambda_{I,J,\ell}} = \Lambda_{J,I,\ell}$. The character corresponding to $z^\ell \prod_i z_i^{I_i}\bar{z}_i^{J_i}$ is $\mathrm{e}^{\mathrm{i}((I_1-J_1)\theta_1+\ldots+(I_n-J_n)\theta_n)}$.

Now, let us assume that we are dealing with the **4-dimensional case**. We define the complexes Ae^{ia}, Be^{ib}, Ce^{ic}, De^{id} and λ by $\lambda = \frac{\partial(\omega(\frac{\partial}{\partial w}))}{\partial z}(\mathfrak{p})$ and:

$$\begin{aligned} L_2[3] &= \mathrm{Re}[Ae^{ia}(x+iy)^2 + Be^{ib}z(x+iy)], \\ L_3[1] &= \mathrm{Re}[Ce^{ic}(x^2+y^2)(x+iy) + De^{id}(x+iy)^3] + O(z,w). \end{aligned}$$

where $L_i[j]$ is the homogeneous part of degree i of the j^{th} coordinate of L w.r.t the normal coordinates with their weights. In other words, Ae^{ia} is $2\Lambda_{2,0,0}$ and B^{ib} is $2\Lambda_{1,0,1}$ for $P_2 = \mathrm{D}^2\left(L\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\mathfrak{p}}$, and if $V = \frac{\partial}{\partial x}$ in this coordinate system, then Ce^{ic} is $2\Lambda_{2,1,0}$ and De^{id} is $2\Lambda_{3,0,0}$ for $P_3 = \mathrm{D}^3(L.V)_{\mathfrak{p}}$. The real numbers A, B, C, D, λ and $(a-d)$ are invariants.

THEOREM 3. — *If A, B and $\mathrm{Re}[96De^{i(d-a)} - 45A^2\lambda]$ are not 0 at $\mathfrak{p}$ then the only one local singularities, corresponding to the first caustic, of the exponential map with pôle $\mathfrak{p}$ are folds ($\mathcal{A}_2$), cusps ($\mathcal{A}_3$) and singularities of type $\mathcal{D}_4^+$ (see [8] for definition). We present some pictures of the first caustic at the end of this paper.*

Dans cet article, toutes les considérations étant locales, on supposera que l'on travaille au voisinage d'un point $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{R}^{2n+2}$. Soit $(\mathbf{R}^{2n+2}, \Delta, g)$ une structure sous-riemannienne de quasi-contact, c'est-à-dire que Δ est une distribution telle que si $\ker(\omega) = \Delta$, alors $\ker(\mathrm{d}\omega_\Delta)$ est de dimension 1, et g est une métrique riemannienne sur Δ.

On pose $\delta = \ker(\mathrm{d}\omega_{|\Delta})$ et Δ_0 son orthogonal pour g dans Δ. On choisit la 1-forme ω telle que $\ker(\omega) = \Delta$ et $(\mathrm{d}\omega_{|\Delta_0})^n = \mathrm{vol}_{g|\Delta_0}$. Elle est définie au signe près.

Soit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}'}$ l'endomorphisme de $\Delta(\mathfrak{p}')$, antisymétrique pour la métrique g, tel que $\mathrm{d}\omega_{|\Delta(\mathfrak{p}')} = g(\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}'}.,.)$. Ses valeurs propres sont des imaginaires pures. Dans la suite, on supposera les valeurs propres deux-à-deux distinctes au point $\mathfrak{p}$. On peut alors les écrire :

$$\{-\mathrm{i}\alpha_1, \ldots, -\mathrm{i}\alpha_n, 0, \mathrm{i}\alpha_n, \ldots, \mathrm{i}\alpha_1\}$$

où $0 < \alpha_n < \ldots < \alpha_1$. On note $\delta_i(\mathfrak{p}')$ l'espace stable de dimension 2 associé à α_i en $\mathfrak{p}'$. On peut vérifier que, au voisinage de $\mathfrak{p}$, la distribution $[\delta_1, \delta_1] \cap \delta_1^{\perp \mathrm{d}\omega}$ est de dimension 1 et est transverse à Δ. On note ν le champ de vecteurs dans cette intersection vérifiant $\omega(\nu) = 1$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Au voisinage d'un point* $\mathfrak{p}$ *où les* α_i *sont deux-à-deux distincts et non nuls, il existe un système de coordonnées locales* $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z, w)$*, appelé système de coordonnées normales, tel que:*

- $(0, \dots, 0) = \mathfrak{p}$.
- *Le long de l'axe* w*, on a* $\frac{\partial}{\partial w} = \nu$.
- *Le couple* $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ *forme une base directe de* δ_i *pour* $d\omega$ *et* $vect(\frac{\partial}{\partial z}) = \ker d\omega_{|\Delta}$ *le long de l'axe* w.
- *Les droites contenues dans* $S_{w_0} = \{w = w_0\}$ *et passant par* $(0, w_0)$ *sont des géodésiques de la structure sous-riemannienne, qui minimisent la distance à l'axe* w*. Localement, la distance entre* (x_i, y_i, z, w) *et l'axe* w *est* $\sqrt{z^2 + \sum_i (x_i^2 + y_i^2)}$.
- *La projection orthogonale* P_{w_0} *sur* S_{w_0} *dans ce système de coordonnées permet de définir la métrique* g_{w_0} *en tout point* $\mathfrak{p}' \in S_{w_0}$ *par* $(g_{w_0})_{\mathfrak{p}'} = (dP_{w_0|\Delta_{\mathfrak{p}'}})_* g$*. Les courbures sectionnelles de* g_{w_0}*, relativement aux 2-plans* $\delta_i(0, w_0)$*, sont toutes nulles en* $(0, w_0)$.

Ce système de coordonnées est unique modulo les rotations dans les plans $\delta_i(\mathfrak{p})$, c'est-à-dire modulo un tore maximal T^n de $SO(\Delta(\mathfrak{p}))$. Les coordonnées normales étant des coordonnées privilégiées au sens de [9], on peut associer le poids 1 aux coordonnées x_i, y_i, z et le poids 2 à w.

On cherche maintenant à construire un champs de bases orthonormées de la distribution, $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} Q \\ L \end{pmatrix}$, où Q est un bloc $(2n+1) \times (2n+1)$, L un bloc $1 \times (2n+1)$ et les colonnes de $\mathcal{F}$ sont les vecteurs de la base orthonormée. Soit K_{w_0} la matrice de la métrique g_{u_0} dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. On pose $Q = K^{-\frac{1}{2}}$. L est alors déterminé par ω.

On note Q_i et L_i les parties homogènes de poids i, en les variables munies de leurs poids respectifs, des matrices Q et L. On note aussi Q^{ii} le $i^{\text{ème}}$ bloc 2×2 sur la diagonale de Q. On note enfin (ζ_i, w) le point de coordonnées $(0, \dots, 0, x_i, y_i, 0, \dots, 0, w)$. On peut alors énoncer le résultat :

THÉORÈME 2 (Forme normale). — *Un système de coordonnées normales étant choisi, il existe un unique champ de bases orthonormées* $\mathcal{F}$*, défini comme précédemment par un couple* (Q, L) *unique, tel que les matrices Q et L vérifient :*

1. $Q = {}^tQ$.
2. $Q_0 = Id_{2n+1}$.
3. $\langle Q(x_1, \dots, y_n, z, w), (x_1, \dots, y_n, z)^t \rangle = (x_1, \dots, y_n, z)^t$.
4. $Q_1 = 0$.
5. $Q^{ii}(\zeta_i, w) = \begin{pmatrix} 1 + y_i^2 \beta_i(\zeta_i, w) & -x_i y_i \beta_i(\zeta_i, w) \\ -x_i y_i \beta_i(\zeta_i, w) & 1 + x_i^2 \beta_i(\zeta_i, w) \end{pmatrix}, \beta_i(0, w) = 0.$
6. $\langle L(x_1, \dots, y_n, z, w), (x_1, \dots, y_n, z)^t \rangle = 0$.

7. $L_0 = 0$.
8. $L_1 = (\frac{\alpha_1 y_1}{2}, \frac{-\alpha_1 x_1}{2}, \dots, \frac{\alpha_n y_n}{2}, \frac{-\alpha_n x_n}{2}, 0)$.
9. $\frac{\partial^2 L_2(2n+1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L_2(2n+1)}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial x_1 \partial z} + \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial y_1 \partial z}$,
10. $\forall\, j \neq 1$

$$0 = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 L_2(2j-1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L_2(2j-1)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial y_1 \partial x_j} \right) + \alpha_j \left(\frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial y_1 \partial y_j} - \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial x_1 \partial y_j} \right),$$

$$0 = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 L_2(2j)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L_2(2j)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial x_1 \partial y_j} - \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial y_1 \partial y_j} \right) + \alpha_j \left(\frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial y_1 \partial x_j} \right),$$

11. $n\lambda z = \sum_i \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\partial L_2(2i)}{\partial x_i} - \frac{\partial L_2(2i-1)}{\partial y_i} \right)$, *où* $\lambda = \frac{\partial(\omega(\frac{\partial}{\partial w}))}{\partial z}(0)$.

Notons $S^l(\Delta_p)$ l'espace des tenseurs symétriques contravariants de degré ℓ sur Δ et par $S^l(\Delta_p^*)$ l'espace des tenseurs symétriques covariants de degré ℓ sur Δ. La forme normale permet de définir deux familles de tenseurs :

$$B^1_{\ell,k} : \begin{cases} S^\ell(\Delta(\mathrm{p})) \otimes S^2(\Delta(\mathrm{p})) & \rightarrow \mathbf{R} \\ (U_1 \odot \dots \odot U_\ell) \otimes (V_1 \odot V_2) & \mapsto \mathrm{D}^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k} ({}^t V_1 Q V_2) \right)_{|\mathrm{p}} (U_1 \odot \dots \odot U_\ell) \end{cases}$$

et

$$B^2_{\ell,k} : \begin{cases} S^\ell(\Delta(\mathrm{p})) \otimes \Delta(\mathrm{p}) & \rightarrow \mathbf{R} \\ (U_1 \odot \dots \odot U_\ell) \otimes (V) & \mapsto \mathrm{D}^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k} (L.V) \right)_{|\mathrm{p}} (U_1 \odot \dots \odot U_\ell) \end{cases}$$

où D^ℓ est la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ par rapport à (x_i, y_i, z). Quand le point base p varie, on obtient des champs de tenseurs. Ce sont des invariants de la structure sous-riemannienne. L'action de T^n sur Δ_p produit naturellement une représentation unitaire de T^n sur les fibres typiques des fibrés tensoriels que l'on considère. T^n étant abélien et compact, ces représentations sont unitairement équivalentes à des sommes directes finies de caractères.

L'espace des tenseurs symétriques covariants de degré k sur Δ peut être identifié canoniquement à l'espace $\widetilde{S}^k(\Delta^*)$ des parties réelles des polynômes homogènes de degré k des variables complexes $z_j = x_j + iy_j$ et $\bar{z}_j$ $(j = 1, \dots, n)$, et de la variable réelle z. L'action de T^n est celle induite par $\mathcal{R}(\theta) z_j = e^{i\theta_j} z_j$. La décomposition de cette action en caractères est la suivante : un polynôme $P_k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ peut être écrit de façon unique :

$$P_k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z) = \sum_{\substack{I,J,\ell \\ \ell + \sum_i I_i + J_i = k}} \mathrm{Re}(\Lambda_{I,J,\ell} (\prod_i z_i^{I_i} \bar{z}_i^{J_i}) z^\ell)$$

avec $\overline{\Lambda_{I,J,\ell}} = \Lambda_{J,I,\ell}$. Le caractère correspondant à $z^\ell \prod_i z_i^{I_i} \bar{z}_i^{J_i}$ est $e^{i((I_1 - J_1)\theta_1 + \dots + (I_n - J_n)\theta_n)}$.

On étudie maintenant l'application exponentielle dans le cas de **dimension 4**. On définit les complexes Ae^{ia}, Be^{ib}, Ce^{ic}, De^{id} et λ par $\lambda = \frac{\partial(\omega(\frac{\partial}{\partial w}))}{\partial z}(\mathrm{p})$ et :

$$L_2[3] = \mathrm{Re}\,[Ae^{ia}(x + iy)^2 + Be^{ib} z(x + iy)],$$
$$L_3[1] = \mathrm{Re}\,[Ce^{ic}(x^2 + y^2)(x + iy) + De^{id}(x + iy)^3] + O(z, w).$$

où $L_i[j]$ est la partie homogène de degré i de la $j^{\text{ème}}$ composante de L. En d'autres termes, $A\mathrm{e}^{ia}$ est $2\Lambda_{2,0,0}$ et $B\mathrm{e}^{ib}$ est $2\Lambda_{1,0,1}$ pour $P_2 = \mathrm{D}^2\left(L\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\mathfrak{p}}$, et si $V = \frac{\partial}{\partial x}$ dans ce système de coordonnées normales, alors $C\mathrm{e}^{ic}$ est $2\Lambda_{2,1,0}$ et $D\mathrm{e}^{id}$ est $2\Lambda_{3,0,0}$ pour $P_3 = \mathrm{D}^3(L.V)_{\mathfrak{p}}$. Les nombres réels A, B, C, D, λ et $(a-d)$ sont des invariants de la structure sous-riemannienne.

THÉORÈME 3. — *Si A, B et* $\mathrm{Re}[96De^{i(d-a)} - 45A^2\lambda]$ *ne sont pas nuls en $\mathfrak{p}$ alors les seules singularités locales, correspondant à la première caustique, de l'application exponentielle de pôle $\mathfrak{p}$, sont des plis ($\mathcal{A}_2$), des fronces de Whitney ($\mathcal{A}_3$) et des singularités de type $\mathcal{D}_4^+$ (voir [8] pour définition).*

D'autre part, la première figure ci-dessous représente une coupe de la première caustique à $z = z_0 \neq 0$ et la seconde figure une coupe à $w = w_0 \neq 0$. Les points où la caustique est lisse correspondent à des plis ($\mathcal{A}_2$), les autres à des fronces de Whitney ($\mathcal{A}_3$) sauf deux points, où une ligne de fronces s'arrête, qui sont des singularité de type $\mathcal{D}_4^+$. La coupe de la

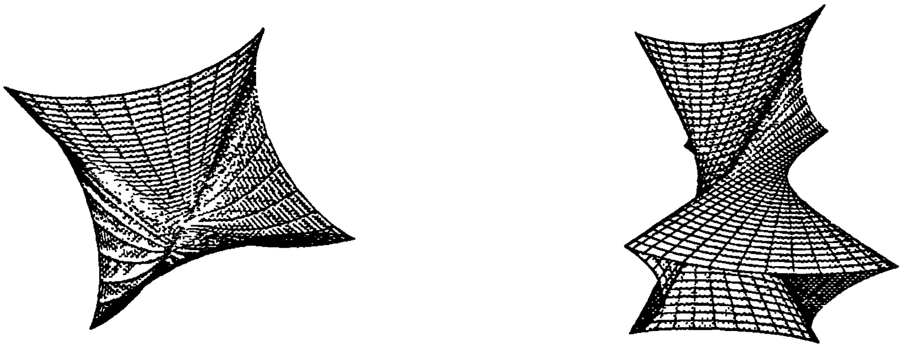

FIG. 1: Les coupes à $z = z_0 \neq 0$ et $w = w_0 \neq 0$

première caustique à $z = 0$ est identique à la première caustique dans le cas de contact de dimension 3 (voir [5] et FIG. *2) :*

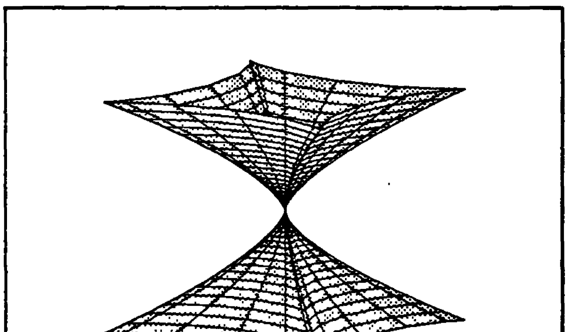

FIG. 2: Coupe à $z = 0$

Les preuves détaillées des théorèmes peuvent être trouvées dans [11].

Bibliographie

[1] A.A. AGRACHEV, H. CHAKIR, J.P. GAUTHIER, *Sub-Riemannian metrics on R^3*, Proceedings of Canadian Math. Soc., Vol. 25 (1998), 29–77.

[2] A.A. AGRACHEV, H. CHAKIR, J.P. GAUTHIER, I. KUPKA, *Generic singularities of sub-Riemannian metrics on R^3*, Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Vol 322, série 1 (1996), 377–384.

[3] A.A. AGRACHEV, G. CHARLOT, J.P. GAUTHIER, V.M. ZAKALYUKIN, *On sub-Riemannian caustics and wave fronts, for contact distributions in the three space*, J. Dynam. Control Systems 6, n° 3 (2000), 365–395.

[4] A.A. AGRACHEV, G. CHARLOT, J-P.A. GAUTHIER, V.M. ZAKALYUKIN, *On stability of generic subriemannien caustic in the three-space*, C.R.A.S. Paris, t. 330, Série I (2000), 465–470.

[5] A A. AGRACHEV, J.P. GAUTHIER, *Sub-Riemannian metrics and isoperimetric problems in the contact case*, Contemporary Math., Tome 64, pp. 5–48, 1999 (in russian) or Journal of Math. Sciences, vol 103 n° 6, pp. 639–663, march 2001.

[6] A.A. AGRACHEV, J.P. GAUTHIER, *On Subanalyticity of Carnot-Carathodory Distances*, Annales de l'I.H.P., Vol 18, analyse non linéaire (2001), 359–382.

[7] A.A. AGRACHEV, A.V. SARYCHEV, *Sub-Riemannian metrics: minimality of abnormal geodesics versus subanaliticity*, J. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, Vol. 2 (1997), 377–448.

[8] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADÉ, *Singularités des applications différentiables*, Ed. MIR, Moscow, French translation, 1986.

[9] A. BELLAÏCHE, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in "Sub-Riemannian Geometry", edited by A. Bellaï che and J-J. Risler, Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[10] H. CHAKIR, J.P. GAUTHIER, I. KUPKA, *Small sub-Riemannian balls on R^3*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 2, n° 3 (sept. 1996), 359–421.

[11] G. CHARLOT, *Quasi-contact S-R metrics: normal form in $\mathbf{R}^{2n}$, wave front and caustic in $\mathbf{R}^4$*, à paraître dans Acta Applicandae Mathematicae.

Grégoire CHARLOT
Via Beirut 4
34014 TRIESTE (Italy)

charlot@ma.sissa.it