

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

CONSTANTIN VERNICOS

Spectre asymptotique du revêtement universel des tores

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 19 (2000-2001), p. 67-75

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2000-2001__19__67_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 2000-2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

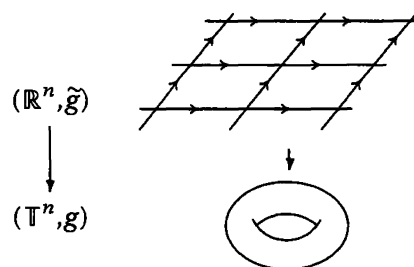
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SPECTRE ASYMPTOTIQUE DU REVÊTEMENT UNIVERSEL DES TORES

Constantin VERNICOS

1. Introduction

On s'intéresse aux tores riemanniens, plus exactement on va se placer sur leur revêtement universel, muni de la métrique relevée :



ce qui induit une distance d_g sur le revêtement universel. La métrique relevée ainsi que la distance induite sont toutes les deux invariantes par une certaine action de \mathbb{Z}^n par translation. Nous dirons qu'elles sont périodiques. On peut ainsi oublier le tore et se placer dans le cadre des métriques périodiques sur \mathbb{R}^n .

Le but avoué de cet exposé est de convaincre le lecteur de l'adéquation de l'homogénéisation comme outils d'étude de la géométrie à l'infini du revêtement universel des tores.

Ce que nous appelons géométrie à l'infini correspond à une étude macroscopique d'une variété. Pour se donner une idée de cela il faut retourner aux origines de la problématique, l'étude macroscopique de certains matériaux microscopiquement hétérogènes, car constitués de plusieurs matériaux, ou bien tout simplement poreux. Dans certains cas ceux-ci se comportent macroscopiquement comme des matériaux homogènes, le problème étant de déterminer les caractéristiques de la matière homogène.

L'exemple le plus simple étant utilisé pour la fabrication d'affiches. L'idée simple est d'imaginer un damier infini constitué de carrés jaunes et bleus. En s'éloignant suffisamment de ce damier (l'affiche), on ne distingue plus les carrés bleus et jaunes, mais une surface uniformément verte.

Nous allons donc voir comment cette idée se traduit sur le revêtement universel des tores, d'abord sur les distances, ensuite sur le volume des boules et enfin sur le spectre de celles-ci.

2. Distance et Volume à l'infini

2.1. La norme stable

Commençons par revenir sur la distance d_g induite sur le revêtement universel d'un tore. La première chose que l'on peut remarquer, c'est qu'en raison de sa périodicité cette distance est équivalente à toute distance riemannienne sur \mathbb{R}^n , fixons-en une que l'on notera $\|\cdot\|_e$. Il existe donc deux constantes α et β telles que pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha\|x - y\|_e \leq d_g(x, y) \leq \beta\|x - y\|_e$$

de sorte que la suite $(d_g(\rho x, \rho y)/\rho)_\rho$ est bornée. Mais l'on a beaucoup mieux, ceci est exprimé dans les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Soient (\mathbb{T}^n, g) un tore, d_g la distance induite sur son revêtement universel et*

$$d_\rho(x, y) = \frac{d_g(\rho x, \rho y)}{\rho}$$

*alors il existe une norme $\|\cdot\|_\infty$, appelée **norme stable**, sur \mathbb{R}^n telle que*

$$[\text{Pan82}] \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} d_\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty$$

$$[\text{Bur92}] \quad \exists C > 0 \text{ telle que pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$|d_g(x, y) - \|x - y\|_\infty| \leq C$$

En d'autres termes le résultat de P. Pansu [Pan82] est une convergence simple, tandis que celui de D. Burago [Bur92] est une convergence uniforme. Pour commencer à justifier notre affirmation concernant l'adéquation de l'homogénéisation, il nous faut dire que celle-ci donne une nouvelle démonstration de la convergence simple de la suite de fonction d_ρ (cf. [BD98] et [Ver01]).

2.2. Le volume asymptotique

Considérons à présent $B_g(\rho) = \{x \mid d_g(x, 0) < \rho\}$, la boule géodésique de rayon ρ , centrée en une origine fixée. Nous rappelons brièvement que l'espace des classes d'isométries des espaces métriques compacts peut être muni de la distance dite de Gromov-Hausdorff (G-H). Pour ce faire, à deux espaces métriques (X, d) et (Y, d') on associe leur

union disjointe $Z = X \sqcup Y$ que l'on muni d'une distance admissible, i.e. une distance δ , telle que $\delta|_{X \times X} = d$ et $\delta|_{Y \times Y} = d'$, on considère alors la distance de Hausdorff entre X et Y dans (Z, δ) (i.e. le plus petit ϵ tel que X soit dans le ϵ -voisinage de Y et réciproquement). La distance de Gromov-Hausdorff étant obtenue en prenant l'infimum de ces distances, quand on fait varier la distance admissible. Ceci dit on a :

THÉOREME 2 (Pansu [Pan82]). — *Soit (\mathbb{T}^n, g) un tore et d_g la distance induite sur son revêtement universel, si $d_\rho(x, y) = d_g(\rho x, \rho y) / \rho$ alors*

$$\left(\frac{1}{\rho} B_g(\rho), d_\rho \right) \xrightarrow{G-H} (B_\infty(1), \|\cdot\|_\infty)$$

avec $B_\infty(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$

Tout comme pour la distance, on peut comparer le volume riemannien de la boule $B_g(\rho)$, au volume euclidien de la boule euclidienne associée à $\|\cdot\|_e$ et de même rayon. Il n'est pas très difficile de trouver deux constantes A et B telles que :

$$Ab_n \rho^n \leq \text{Vol}_g(B_g(\rho)) \leq Bb_n \rho^n$$

b_n étant le volume euclidien de la boule euclidienne de rayon 1. De nouveau on peut préciser cela

COROLLAIRE 2.1. — *Soit $\text{Vol}_g(B_g(\rho))$ le volume riemannien de la boule géodésique de rayon ρ , centré en une origine fixée, dans le revêtement universel de (\mathbb{T}^n, g) alors le volume asymptotique de g est*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_g(B_g(\rho))}{\rho^n} = \text{Vol}_g(\mathbb{T}) \frac{\mu(B_\infty(1))}{\mu(D_f)}$$

où D_f est un domaine fondamental et μ une mesure de Haar du revêtement universel.

Il faut noter que le théorème 2 et son corollaire 2.1 sont en fait des cas particuliers. En effet on peut remplacer le tore par n'importe quelle nilvariété, la puissance du rayon de la boule intervenant dans 2.1 dépend bien sur de la dite nilvariété.

Avant de donner des précisions sur le volume asymptotique, notons le résultat suivant, dont l'importance n'est pas négligeable, et qui donne une première réponse à la question suivante : Que peut-t-on dire de deux tores ayant la même norme stable ?

PROPOSITION 3 (Burago-Ivanov [BI95]). — *Soit (\mathbb{T}^n, g) un tore et $\|\cdot\|_\infty$ sa norme stable, si $\|\cdot\|_\infty$ est euclidienne alors g est plate.*

Au vu de ce résultat on peut poser la question suivante : soit un tore \mathbb{T}^n muni de deux métriques riemanniennes g et g' telles que leurs normes stables coïncident, les métriques g et g' sont elles isométriques ?

Quelle que soit la réponse, la proposition 3 est un élément de la démonstration du théorème suivant qui permet de caractériser les tores plats en fonctions de leur volume asymptotique :

THÉORÈME 4 (Burago-Ivanov). — *Soient (\mathbb{T}^n, g) un tore et $B_g(\rho)$ la boule géodésique de rayon ρ induite sur son revêtement universel alors*

- $\text{Volas}(g) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_g(B_g(\rho))}{\rho^n} \geq b_n$;
- si $\text{Volas}(g) = b_n$ alors g est plate.

où b_n est le volume euclidien de la boule unité euclidienne.

En effet le cas d'égalité dans ce théorème caractérise les tores dont la norme stable est euclidienne. Nous allons constater un résultat similaire en étudiant le spectre des boules.

3. Spectre asymptotique

Commençons par donner le résultat qui motive notre affirmation :

THÉORÈME 5. — *Soient (\mathbb{T}^n, g) un tore, $B_g(\rho)$ la boule riemannienne de rayon ρ , centrée en une origine fixée, induite sur son revêtement universel et $\lambda_1(B_g(\rho))$ la première valeur propre du laplacien sur $B_g(\rho)$ pour le problème de Dirichlet alors*

- $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_1(B_g(\rho)) = \lambda_1^\infty \leq \lambda_{e,n}$;
- en cas d'égalité g est plate.

où $\lambda_{e,n}$ est la première valeur propre du laplacien euclidien sur la boule euclidienne unitaire et λ_1^∞ est la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur la boule unitaire de la norme stable.

Ce théorème, bien que très ressemblant au théorème 4, est obtenu de manière complètement différente, comme nous allons le montrer. L'opérateur elliptique cité dans ce théorème, est l'opérateur homogénéisé d'une famille d'opérateur elliptique, et même plus c'est en fait le laplacien d'une certaine norme euclidienne, de sorte que sa première valeur propre satisfait à l'inégalité de Faber-Krahn. Cette dernière nous donne alors le corollaire suivant (où l'on a noté $\text{Vol}(\text{Al}\mathbb{T}, g)$ le volume du tore d'Albanese) :

COROLLAIRE 5.1. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

- $\text{Volas}(g) \geq \frac{\text{Vol}_g(\mathbb{T})}{\text{Vol}(\text{Al}\mathbb{T}, g)} b_n$;
- en cas d'égalité g est plate.

pour $n = 2$ l'inégalité devient $\text{Volas}(g) \geq b_2$.

Ainsi, au moins pour la dimension 2 on obtient une nouvelle démonstration du théorème 4. En ce qui concerne les dimensions supérieures, il faut noter que la fonction

$$\frac{\text{Vol}_g(\mathbb{T})}{\text{Vol}(\text{Alt}, g)}$$

a été étudiée dans le cadre des inégalités isosystolique (cf. [Laf74]), et que l'on sait qu'elle peut devenir très grande, donc améliorer l'inégalité de D. Burago et S. Ivanov, mais elle peut être aussi très petite. En particulier pour une vaste famille de métrique conformément plates elle est plus petite que 1. Il est intéressant de noter que les points singuliers de cette fonction sont justement les tores plats.

Pour en revenir au théorème 5, c'est en partie un corollaire du théorème suivant qui donne des informations sur le spectre dans sa globalité :

THÉORÈME 6. — *Soient (\mathbb{T}^n, g) un tore, $B_g(\rho)$ la boule riemannienne de rayon ρ , centrée en une origine fixée, induite sur son revêtement universel et $\lambda_i(B_g(\rho))$ la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du Laplacien sur $B_g(\rho)$ pour le problème de Dirichlet.*

Il existe un opérateur elliptique Δ_∞ dont la $i^{\text{ème}}$ valeur propre sur la boule unitaire de la norme stable pour le problème de Dirichlet λ_i^∞ vérifie

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_i(B_g(\rho)) = \lambda_i^\infty$$

Nous allons à présent donner les idées directrices des démonstrations des théorèmes 5 et 6.

4. Structure de la démonstration

4.1. Transformation du problème

La première chose que l'on peut remarquer, c'est qu'étant donné le théorème 1, il existe une constante C telle que

$$B_\infty(\rho - C) \subset B_g(\rho) \subset B_\infty(\rho + C),$$

en appliquant le principe du min-max on obtient pour la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du problème de Dirichlet

$$\lambda_i(B_\infty(\rho + C)) \leq \lambda_i(B_g(\rho)) \leq \lambda_i(B_\infty(\rho - C)) \quad (1)$$

en sorte que la convergence du filet $\rho^2 \lambda_i(B_g(\rho))$ est équivalente à la convergence du filet $\rho^2 \lambda_i(B_\infty(\rho))$

Notons δ_ρ l'homothétie de centre 0 et de rapport ρ et Δ_ρ le laplacien de la métrique ré-échelonnée $g_\rho = 1/\rho^2 (\delta_\rho)^* g$. Enfin à une fonction f sur $B_\infty(\rho)$ on peut associer une fonction f_ρ sur $B_\infty(1)$ en posant $f_\rho(x) = f \circ \delta_\rho(x)$. Alors on a l'égalité suivante pour tout $x \in B_\infty(1)$:

$$\rho^2 (\Delta f)_\rho(x) = (\Delta_\rho f_\rho)(x) \quad (2)$$

Ainsi étudier la convergence de $\rho^2 \lambda_i(B_\infty(\rho))$ pour tout i , revient à étudier la convergence du spectre de $(\Delta_\rho)_\rho$ sur $B_\infty(1)$.

En d'autres termes au lieu d'étudier le spectre du laplacien sur $B_g(\rho)$, on se ramène à l'étude du spectre d'une famille d'opérateurs sur $L^2(B_\infty(1))$. Il nous faudrait donc une convergence raisonnable qui nous donne la convergence du spectre. C'est ce que l'on va faire dans le paragraphe suivant. Mais tout d'abord introduisons l'opérateur Δ_∞ .

Pour cela commençons par prendre une base (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n . On cherche ensuite les fonctions χ^i telles que

$$\begin{cases} \Delta \chi^i = \Delta x_i & \text{sur } D_f \\ \chi^i \text{ est périodique} \\ \int_{D_f} \chi^i d\nu_g = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ensuite on définit les fonctions $\eta_i = \chi^i - x_i$, puis la matrice

$$q^{ij} = \frac{1}{\text{Vol}_g(\mathbb{T})} \int_{D_f} (d\eta_i, d\eta_j)_g d\nu_g$$

où l'on a prit le produit scalaire induit sur les 1-forme par g . Alors Δ_∞ est le Laplacien de la métrique euclidienne donné par l'inverse de la matrice (q^{ij}) i.e.

$$\Delta_\infty f = \sum_{i,j=1}^n q^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque. — (q^{ij}) induit, par dualité, une norme $\|\cdot\|_2$ sur $H_1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Elle passe au quotient sur le tore $Al\mathbb{T} = H_1(\mathbb{T}, \mathbb{R})/H_1(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$. $(Al\mathbb{T}, \|\cdot\|_2)$ est le tore d'Albanese ou variété de Jacobi de (\mathbb{T}, g) .

4.2. Convergences

Les définitions suivantes proviennent de la théorie de l'homogénéisation, la première convergence est centrale dans notre démonstration :

DÉFINITION 1 (Convergence compacte). — Soit (A_ρ) un filet d'opérateurs dans l'espace $L^2(B_\infty(1))$, on dit qu'il converge compactement vers A_∞ si et seulement si pour tout filet de fonctions (f_ρ) dans $L^2(B_\infty(1))$ convergeant faiblement vers f_∞ quand $\rho \rightarrow \infty$, le filet $A_\rho f_\rho$ converge fortement vers $A_\infty f_\infty$.

On démontre que la suite des résolvantes des Laplacien (Δ_ρ) étendue à $L^2(B_\infty(1))$, converge compactement vers les résolvantes de (Δ_∞) . Avant d'expliquer cela introduisons une dernière définition, non pas sur les opérateurs, mais sur les fonctionnelles. On pensera aux énergies de Dirichlet

DÉFINITION 2 (Γ -convergence). — Soit $\Phi_\rho : L^2(B_\infty(1)) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pour tout $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que Φ_ρ Γ -converge vers Φ_∞ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout filet (f_ρ) dans $L^2(B_\infty(1))$ convergeant fortement vers f_∞ on a

$$\Phi_\infty(f_\infty) \leq \liminf_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_\rho(f_\rho);$$

2. pour tout $f_\infty \in L^2(B_\infty(1))$ il existe un filet (f_ρ) convergeant fortement vers f_∞ tel que

$$\Phi_\infty(f_\infty) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_\rho(f_\rho).$$

Ainsi si on note $\mathcal{E}_\rho(f) = \int_{B_\infty(1)} |\nabla_\rho f|_\rho d\nu_\rho$ l'énergie induite sur les fonctions par la métrique g_ρ , et si l'on note $R_\rho^\mu = (\Delta_\rho - \mu I)^{-1}$ pour $\mu < 0$ alors on a le théorème suivant

THÉORÈME 7. — Si pour tout $\mu < 0$ le filet (R_ρ^μ) converge compactement vers R_∞^μ alors

1. le filet (\mathcal{E}_ρ) Γ -converge;
2. si on note λ_i^ρ les valeurs propres de Δ_ρ pour $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$ alors pour tout i

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_i^\rho = \lambda_i^\infty$$

Suivant ce théorème il suffit donc de montrer la convergence compacte des résolvantes. C'est ce en quoi consiste notre démonstration.

4.3. Retour aux λ_1

Nous allons montrer comment, en utilisant les théorèmes 7 et 6 on peut en déduire le théorème 5.

On notera μ_ρ la mesure induite par g_ρ et μ_∞ la mesure de Lebesgue pour laquelle un domaine fondamental a pour volume le volume du tore. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on définit

$$\begin{aligned} f_\rho : \delta_{1/\rho} B_g(\rho) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\left(\frac{d_g(0, \delta_\rho(x))}{\rho}\right) \end{aligned}$$

et $f_\infty(x) = f(\|x\|_\infty)$ sur $B_\infty(1)$ la première étape consiste à montrer que (on rappelle que $\delta_\rho(x) = \rho x$)

$$\int f_\rho \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho d\mu_\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \int_{B_\infty(1)} f_\infty d\mu_\infty \quad (4)$$

On renvoi à [Ver01], sachant qu'il s'agit d'une convergence dominée.

On injecte ensuite f_ρ dans les quotients de Raleigh ce qui nous donne :

$$\rho^2 \lambda_g(B_g(\rho)) \leq \frac{\int (f'_\rho)^2 \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho d\mu_\rho}{\int (f_\rho)^2 \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho d\mu_\rho} \quad (5)$$

à présent on applique (4) pour obtenir

$$\limsup_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_g(B_g(\rho)) \leq \frac{\int_{B_\infty(1)} (f'_\infty)^2 d\mu_\infty}{\int_{B_\infty(1)} f_\infty^2 d\mu_\infty} \quad (6)$$

en prenant pour f une fonction adaptée (i.e. la solution de l'équation $f'' + \frac{n-1}{x} f'(x) + \lambda_e f = 0$ elle fait intervenir les fonctions de Bessel) on conclut.

Reste le cas d'égalité, pour celui-ci il faut revenir à l'homogénéisation et travailler à nouveau sur $B_\infty(1)$, pour cela considérons la suite de fonction

$$f_\rho \left(\frac{d_g(0, \delta_\rho x)}{\rho + C} \right),$$

sur $B_\infty(1)$ où C est la constante telle que

$$|d_g(0, x) - \|x\|_s| \leq C$$

et on refait les estimations précédentes qui restent valable puisqu'on a encore la convergence simple de f_ρ vers f_∞ . En prenant de nouveau pour f la fonction qui donne la fonction propre du Laplacien dans le cas de la sphère dans l'espace euclidien usuel (i.e. la solution de $f'' + \frac{n-1}{x} f'(x) + \lambda_e f = 0$). La Γ -convergence nous permet de dire que, en notant \mathcal{E}_ρ et \mathcal{E}_∞ les énergies respectives de Δ_ρ et Δ_∞ sur $B_\infty(1)$ pour les mesures adaptés :

$$\mathcal{E}_\infty(f_\infty) \leq \liminf_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\rho(f_\rho) \leq \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\rho(f_\rho) \leq \lambda_e \quad (7)$$

(ici on suppose de plus les fonctions normalisées) ceci en vertu du théorème 7 et de la définition 2. De sorte que puisque, par hypothèse de l'égalité,

$$\lambda_{e,n} \leq \mathcal{E}_\infty(f_\infty) \quad (8)$$

(7) et (8) impliquent l'égalité de sorte que f_∞ est dans l'espace propre associé à la première valeur propre. Donc f_∞ est C^∞ (au moins au voisinage de zéro). Maintenant en étudiant les fonctions de Bessel (cf. Bowman [Bow58]) on s'aperçoit que f est analytique et de la forme $1 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \dots$ (à une constante multiplicative près) en particulier la fonction $1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$ est inversible au voisinage de zéro, d'inverse $g \in C^\infty$ ce qui implique que $g \circ f_\infty(x) = cst \cdot \|x\|_\infty^2$ est une fonction C^2 au voisinage de zéro, donc la norme stable est associé à un produit scalaire, i.e. la norme stable est euclidienne.

Bibliographie

- [BD98] A. BRAIDES ET A. DEFRANCESCHI. *Homogenization of Multiple Integrals*. Oxford Science Publications, 1998.
- [BI95] D. BURAGO ET S. IVANOV. On asymptotic volume of tori. *GAF*, 5(5):800–808, 1995.
- [Bow58] F. BOWMAN. *Introduction to Bessel Functions*. Dover, 1958.
- [Bur92] D. BURAGO. Periodic metrics. *Advances in soviet mathematics*, 9:205–210, 1992.
- [Laf74] J. LAFONTAINE. Sur le volume de la variété de jacobí d’une variété riemannienne. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér A*, 278:1519–1522, 1974.
- [Pan82] P. PANSU. *Géométrie du groupe de Heisenberg*. Thèse de docteur 3ème cycle, Université Paris VII, 1982.
- [Pan83] P. PANSU. Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 3:415–445, 1983.
- [Pan99] P. PANSU. Profil isopérimétrique, métriques périodiques et formes d’équilibre des cristaux. prépublication d’orsay, 1999.
- [Ver01] C. VERNICOS. *Spectre asymptotique des nilvariétés graduées*. Thèse de doctorat, Institut Fourier, Université Grenoble I, 2001.

Constantin VERNICOS
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D’HÈRES Cedex (France)
`Constantin.Vernicos@ujf-grenoble.fr`