Laurent Bessières

# Sur le volume minimal des variétés ouvertes

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 18 (1999-2000), p. 9-16
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 9–16

# SUR LE VOLUME MINIMAL DES VARIÉTÉS OUVERTES

*Laurent BESSIÈRES*

## 1. Introduction

L'objet de cet exposé est la présentation de quelques propriétés du volume minimal des variétés ouvertes, en dimension $\geqslant 3$.

Rappelons que pour une variété différentiable $N$, le volume minimal est défini par

$$\operatorname{Minvol}(N) = \inf_{|K(g)|\leqslant 1} \operatorname{vol}_g(N) \tag{1}$$

où $g$ est une métrique riemannienne complète sur $N$ et $K(g)$ la courbure sectionnelle. En particulier, pour les variétés compactes à bord, on considère des métriques complètes sur l'intérieur de $N$, qui est une variété ouverte, le bord étant rejeté à l'infini.

Les métriques extrémales jouent un rôle crucial :

THÉORÈME 1.1 ([BCG]). — *Si* $(M,g_0)$ *est une variété hyperbolique fermée de dimension* $\geqslant 3$,

$$\operatorname{Minvol} M) = \operatorname{vol}_{g_0}(M) \tag{2}$$

*et* $g_0$ *est l'unique métrique à isométrie près à atteindre le volume minimal*

Si la variété hyperbolique est ouverte, le volume minimal est également réalisé par la métrique hyperbolique ([BCC])

Pour des variétés fermées, on a, en dimension $\geqslant 3$, le résultat suivant ([BCG] pour l'inégalité, [Bes] pour l'égalité)

---

*Classification math.* : 55C20, 53C21.

THÉORÈME 1.2 ([BCG], [Bes]). — *Soient $N$ et $M$ deux variétés fermées, orientées, connexes de même dimension $n \geqslant 3$. On suppose que $M$ est munie d'une métrique hyperbolique $g_0$ et on suppose également qu'il existe une application continue*

$$f \,:\, N \longrightarrow M$$

*de degré non nul. Alors*

$$\mathrm{Minvol}(N) \geqslant |deg\ f| \cdot \mathrm{vol}_{g_0}(M)\,. \tag{3}$$

*De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $N$ peut être munie d'une métrique hyperbolique, et s'il existe un revêtement différentiable, homotope à $f$, de $N$ sur $M$.*

Une question naturelle est de savoir si ce résultat subsiste pour des variétés ouvertes. Je vais expliquer dans cet exposé pourquoi la réponse est négative. On montre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Soit $M$ une variété compacte, connexe, orientable de dimension $n \geqslant 3$, admettant sur son intérieur une structure hyperbolique complète de volume fini, et telle que le bord $\partial M$ est une union de tores $T^{n-1}$. Il existe une variété $N$ compacte à bord, non homéomorphe à $M$, et une application propre $f \,:\, N \to M$ de degré 1, dont la restriction au bord est un homéomorphisme bien que*

$$\mathrm{Minvol}(N) \leqslant \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M)\,. \tag{4}$$

D'après un résultat récent de Boland, Connel et Clement ([BCC]), l'inégalité (3) est encore vraie pour des variétés ouvertes. On a donc, sous les hypothèses de 1.3,

$$\mathrm{Minvol}(N) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M)$$

Cela prouve qu' il n'y a plus de rigidité dans le cas d'égalité.

Le théorème de rigidité et la construction utilisée pour prouver 1.3 permettent de généraliser en toute dimension un résultat énoncé par Thurston dans ces notes [Thu] (voir corollaire 1.5 ci-dessous) :

THÉORÈME 1.4. — *Soit $M$ une variété fermée de dimension $n \geqslant 3$, orientable. On suppose qu'il existe une sous-variété $X \subset M$ ouverte, hyperbolique complète de volume fini, telle que $\partial\bar{X} = \cup_{i=1}^{p} T_i^{n-1}$ et chaque composante connexe de $M \backslash X$ est homéomorphe à $D^2 \times T^{n-2}$. Si $M$ domine une variété hyperbolique fermée $(Y, g_0)$ par une application de degré 1, alors*

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) > \mathrm{vol}_{g_0}(Y)\,. \tag{5}$$

COROLLAIRE 1.5 ([Thu], chap. 6). — *Soit $(M,g_0)$ une variété de dimension 3, fermée, orientable, hyperbolique. Soit $X \subset M$ une sous-variété ouverte telle $\partial\bar{X}$ est une union de tores et $X$ admet une structure hyperbolique complète. Si $X$ n'est pas incluse dans une boule $B^3$, alors*

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) > \mathrm{vol}_{g_0}(M)\,. \tag{6}$$

En dimension $\geqslant 4$, l'hypothèse "$M$ domine une variété hyperbolique" est la généralisation naturelle de l'hypothèse "$M$ hyperbolique" en dimension 3. En effet, en dimension 3, le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston assure que presque tous les recollements, excepté un nombre fini sur chaque cusp, donnent une variété hyperbolique. En dimension $n \geqslant 4$, si le groupe fondamental contient $Z^{n-2}$, $M$ ne peut pas porter de métrique à courbure strictement négative.

## 2. Preuve du théorème principal

### 2.1. Construction de $N$

Soit une variété compacte $M^n$, dont l'intérieur porte une métrique hyperbolique ouverte de volume fini et le bord est une union de tores $(n-1)$ dimensionnels $T^{n-1}$. On définit la variété $N$ en identifiant une composante de bord de $M$ à une composante de bord de $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$, où $\ddot{T}^2$ est un tore de dimension 2 privé de deux disques $D^2$ :

$$N = M \bigcup_{T^{n-1}} \ddot{T}^2 \times T^{n-2} .$$

Cette variété est topologiquement différente de $M$. En effet, le théorème de Van Kampen montre que le groupe fondamental de $N$ contient un sous-groupe $Z^{n-1}$ qui ne provient pas d'une composante de bord (*i.e.* non périphérique). Or le groupe fondamental de $M$ ne peut pas contenir de tels sous-groupes si l'intérieur de M est hyperbolique.

Il s'agit maintenant de définir une application de degré 1 de $N$ dans $M$. Le tore moins deux disques peut se découper le long d'un cercle $S^1$ en l'union d'un tore moins un disque $\dot{T}^2$ et d'un cylindre moins un disque $S^1 \times [0,1] - D^2$ :

$$\ddot{T}^2 = \dot{T}^2 \bigcup_{\partial\dot{T}^2=\partial D^2} (S^1 \times [0,1]) - D^2 .$$

Ici, $\partial\dot{T}^2 = S^1 = \partial D^2$ et $S^1 \times \{0\} \times T^{n-2}$ est la composante de $\partial\ddot{T}^2$ identifiée à $T^{n-1} \subset \partial M$.

En remplaçant le tore moins un disque $\dot{T}^2$ par une disque $D^2$, le même recollement donne un cylindre

$$S^1 \times [0,1] = D^2 \bigcup_{S^1} (S^1 \times [0,1]) - D^2$$

L'identification de $S^1 \times \{0\} \times T^{n-2}$ à $T^{n-1} \subset \partial M$ donne cette fois

$$M \bigcup_{T^{n-1}} S^1 \times [0,1] = M .$$

Il existe une application continue, propre de degré 1, du tore moins un disque sur le disque

$$\dot{T}^2 \longrightarrow D^2$$

et qui est l'identité sur le bord. Cette application s'étend par l'identité en une application continue, propre de degré 1, du tore moins deux disques dans le cylindre

$$\ddot{T}^2 = \dot{T}^2 \bigcup_{S^1} (S^1 \times [0,1]) - D^2 \longrightarrow D^2 \bigcup_{S^1} (S^1 \times [0,1]) - D^2 = S^1 \times [0,1] .$$

On peut alors étendre cette application en une application continue, propre de degré 1

$$N = M \bigcup_{T^{n-1}} \ddot{T}^2 \times T^{n-2} \longrightarrow M = M \bigcup_{T^{n-1}} S^1 \times [0,1] \times T^{n-2} .$$

### 2.2. Majoration de Minvol($N$)

On établit dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 2.1. — *Sous les hypothèses de la section 2.1, on a*

$$\mathrm{Minvol}(N) \leqslant \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M) .$$

*Démonstration.* — On construit sur $N$ une famille de métriques riemanniennes $(g_{\varepsilon,\eta})_{\varepsilon>0,\eta>0}$ telles que :

1. la courbure sectionnelle reste uniformément bornée
$$|K(g_{\varepsilon,\eta})| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta}$$
2. lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, la restriction de $g_{\varepsilon,\eta}$ à l'intérieur de $M$ converge en volume vers le volume hyperbolique.
3. lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, la restriction de $g_{\varepsilon,\eta}$ à $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ converge en volume vers 0.

Soit sur l'intérieur de $M$ la métrique hyperbolique complète de volume fini qui existe par hypothèse. Considérons le cusp $T^{n-1} \times [0,\infty[$ de $M$, qui correspond à la composante de bord recollée avec $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$. Sur le cusp, la métrique est de la forme

$$(e^{-t})^2 ds^2 + dt^2$$

où $ds^2$ est une métrique euclidienne sur $T^{n-1}$. À partir de $t_0 = -\ln \varepsilon$, qui correspond à $e^{-t_0} = \varepsilon$, et sur un intervalle de longueur $\eta$, on remplace la métrique hyperbolique de $T^{n-1} \times [t_0, t_0 + \eta]$ par une métrique "warped-product"

$$g_{\varepsilon,\eta} := f_{\varepsilon,\eta}(t)^2 ds^2 + dt^2 \tag{7}$$

qui est euclidienne au voisinage de $T^{n-1} \times \{t_0 + \eta\}$. Précisément, $f_{\varepsilon,\eta}(t) = \varepsilon$ au voisinage de $t_0 + \eta$. On découpe ensuite le morceau $T^{n-1} \times [t_0 + \eta, \infty[$ qui n'intervient plus dans la suite.

Clairement, la courbure sectionnelle de la métrique $g_{\varepsilon,\eta}$ sur $T^{n-1} \times [t_0,t_0+\eta]$ est d'autant plus pincée que l'intervalle $[t_0,t_0+\eta]$ est long. Le point important est que cette courbure ne dépend pas de $\varepsilon$, et donc pas de $t_0$ :

LEMME 2.2. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|K(g_{\varepsilon,\eta})| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta}. \tag{8}$$

La preuve (voir [Bes2]) repose sur la formule suivante

$$K(\Pi) = -\frac{f''_{\varepsilon,\eta}(t)}{f_{\varepsilon,\eta}(t)}s - \frac{f'^2_{\varepsilon,\eta}(t)}{f^2_{\varepsilon,\eta}(t)}(1-s) \tag{9}$$

où $s \in ]0,1[$ dépend de la position du plan $\Pi$ dans le plan tangent.

En considérant une fonction $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ suffisamment régulière telle que

$$\rho(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \leqslant 0 \tag{10}$$

$$\rho(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 1 \tag{11}$$

on définit alors

$$f_{\varepsilon,\eta}(t) = e^{-t_0-\rho(\frac{t-t_0}{\eta})(t-t_0)}.$$

En posant $x = \frac{t-t_0}{\eta}$ et $F(x) = x\rho(x)$, définir une fonction $\rho$ qui minimise (9) revient à définir la fonction $F$ de manière que

$$|F'(x)| \leqslant 1 \tag{12}$$

et

$$\left| -\frac{F''(x)}{\eta} + (F'(x))^2 \right| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta} \tag{13}$$

pour une constante $C > 0$.

*Remarque.* — L'étude de $F$ montre que, sans normalisation, la courbure sectionnelle n'est **pas** pincée par $-1$ et $0$.

Il est clair que pour $\eta$ fixé, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(T^{n-1} \times [0,t_0+\eta]) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(T^{n-1} \times [0,\infty[)\,.$$

Donc, en coupant la partie $T^{n-1} \times ]t_0+\eta,\infty[$, on définit ainsi sur $M$ une métrique $g_{\varepsilon,\eta}$ non complète, de volume fini, telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(M) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(\mathring{M})\,.$$

On procède sur $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ de manière analogue. Soit une métrique hyperbolique complète de volume fini sur le tore moins deux disques $\ddot{T}^2$. Sur un cusp $S^1 \times [0,\infty[$, on coupe la partie $S^1 \times ]t_0+\eta,\infty[$ et on remplace la métrique hyperbolique de $S^1 \times [t_0,t_0+\eta]$ par une métrique qui devient euclidienne au voisinage de $S^1 \times \{t_0+\eta\}$. On choisit sur $T^{n-2}$ une métrique euclidienne de la forme

$$\varepsilon^2 de^2 .$$

On a alors sur $S^1 \times \{t_0+\eta\} \times T^{n-2} = T^{n-1}$ la métrique euclidienne

$$\varepsilon^2 dt^2 + \varepsilon^2 de^2 .$$

On déforme la métrique euclidienne obtenue sur le bord du cusp $T^{n-1} \times \{t_0+\eta\}$ de $M$, de manière à l'identifier à cette métrique. Précisément, soit sur le tore cylindrique $T^{n-1} \times [t_0+\eta, t_0+2\eta]$ la métrique

$$\varepsilon^2 s_t + dt^2$$

où $s_t$ est une métrique euclidienne sur $T^{n-1}$ telle que $s_{t_0+\eta} = ds^2$ et $s_{t_0+2\eta} = dt^2 + de^2$. On peut choisir une telle métrique de manière que les recollements soient suffisamment réguliers. Le point important est le

LEMME 2.3 ([Bes2]). — *La courbure sectionnelle de la métrique $\varepsilon^2 s_t + dt^2$ sur $T^{n-1} \times [t_0+\eta, t_0+2\eta]$ ne dépend pas de $\varepsilon$.*

Donc en prenant $\eta$ suffisamment grand, la courbure est pincée par $-1$ et $1$.

La métrique $g_{\varepsilon,\eta}$ est maintenant entièrement définie sur $N$. Il est clair que

$$|K(g_{\varepsilon,\eta})| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(N) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M) .$$

L'inégalité pour le volume minimal s'en déduit en normalisant $g_{\varepsilon,\eta}$ et en faisant tendre $\eta$ vers $+\infty$.

□

## 3. Sur le volume des sous-variétés hyperboliques

On démontre maintenant le théorème 1.4. On suppose que $M^n$ est une variété fermée de dimension $n \geqslant 3$ et $X^n$ une sous-variété ouverte, hyperbolique complète de volume fini. On suppose également que $\partial\bar{X}$ est une union de tores $\cup_{i=1}^{p} T_i^{n-1}$ et que chaque composante connexe de $M\backslash X$ est homéomorphe à $D^2 \times T^{n-2}$.

Soient

$$\phi_i : \partial(D_i^2 \times T^{n-2}) = S^1 \times T^{n-2} \to T_i^{n-1} \qquad (14)$$

les difféomorphismes tels que

$$M = X \bigcup_{\phi_i} \left( \coprod_{i=1}^{p} D_i^2 \times T^{n-2} \right) . \tag{15}$$

On définit une variété fermée $N$, en posant

$$N = X \bigcup_{\phi_i} \left( \coprod_{i=1}^{p} \dot{T}_i^2 \times T^{n-2} \right) \tag{16}$$

où $\dot{T}_i^2$ désigne encore un tore moins un disque. Le groupe fondamental de cette variété contient $Z^{n-1}$, donc $N$ n'est pas être homéomorphe à la variété hyperbolique fermée $Y$. Par ailleurs, il existe une application $f : N \to M$, de degré 1. On obtient cette application en prolongeant par l'identité l'application de $\dot{T}_i^2 \times T^{n-2}$ dans $D_i^2 \times T^{n-2}$ qui envoie dans $\partial \dot{T}_i^2$ sur $\partial D_i^2$. Par hypothèse, $M$ domine une variété hyperbolique fermée $Y$ donc on obtient par composition une application continue de degré 1

$$N \longrightarrow Y .$$

Le théorème de rigidité 1.2 montre alors que

$$\mathrm{Minvol}(N) > \mathrm{vol}_{g_0}(Y) . \tag{17}$$

Les mêmes arguments qu'en 2.2 montrent que

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) \geqslant \mathrm{Minvol}(N) \tag{18}$$

d'où le résultat.

On démontre maintenant le corollaire 1.5.

*Démonstration.* — Observons que $M \backslash X$ est irréductible. En effet, soit $S^2$ une sphère plongée dans $M \backslash X$. Puisque $M$ est hyperbolique, $M$ est irréductible donc $S^2$ borde une boule $B^3$ dans $M$. Cette boule n'intersecte pas $X$ puisque $X$ n'intersecte pas $S^2$ et n'est pas incluse dans $B^3$. Donc $S^2$ borde $B^3$ dans $M \backslash X$.

Par ailleurs, les tores de $\partial \bar{X}$ sont compressibles dans chaque composante connexe de $M \backslash X$. En effet, $M$ est hyperbolique donc atoroidale et les tores de $\partial \bar{X}$ sont compressibles dans $M$. Et comme $\partial \bar{X}$ est le bord d'une variété hyperbolique, $\partial \bar{X}$ est incompressible dans $\bar{X}$.

La variété $M \backslash X$ est donc irréductible, bordée par des tores compressibles : c'est donc une union de tores solides ([Jaco]). On applique alors le théorème 1.4 en prenant pour variété hyperbolique $Y$ la variété $M$ elle-même. □

## Bibliographie

[Bes] L. Bessières, *Un théorème de rigidité différentielle*, Commentarii Mathematici Helvetici, juin 1998 (vol 73).

[Bes2] L. Bessières, *Sur le volume minimal des variétés ouvertes*, Annales de l'Institut Fourier, à paraître.

[BCG] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative.*, GAFA, vol 5, n5, octobre 1995.

[BO] R.L. Bishop, B. O'Neill, *Manifolds of negative curvature*, Trans. of the A.M.S. volume 145, november 1969.

[BCC] J. Boland, C. Connel, J.S. Clement, *The minimal volume of open rank one symmetric manifolds*, preprint.

[C-G] J. Cheeger, M. Gromov, *Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I*, J. Differential geometry, 23 (1986), 309–346.

[Gro] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, IHES, 56 (1981).

[Jaco] W. Jaco, *Lectures on 3-manifolds topology*, Amer. Math. Soc., 43 (1980).

[Thu] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton (1978).

Laurent BESSIÈRES
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

Laurent.Bessieres@ujf-grenoble.fr