

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

CHRISTOPHE CHAMPETIER

VINCENT GUIARDEL

Monoïdes libres dans les groupes hyperboliques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 157-170

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__157_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MONOÏDES LIBRES DANS LES GROUPES HYPERBOLIQUES

Christophe CHAMPETIER & Vincent GUIRADEL

Résumé

Dans cet exposé nous proposons une preuve élémentaire du résultat suivant: soit Γ un groupe δ -hyperbolique pour un système générateur S . Il existe une constante n explicite, ne dépendant que de δ et de $\text{card } S$, telle que, étant donnés deux éléments quelconques f et g de Γ , il existe $\epsilon = \pm 1$ pour lequel f^n et $g^{\epsilon n}$ soit sont triviaux, soit engendrent \mathbb{Z} comme groupe, soit engendrent comme monoïde (ou semi-groupe) un monoïde libre.

1. Introduction

Pour minorer l'entropie (ou la croissance) d'un groupe muni d'un système générateur fini, il suffit de trouver un sous-groupe libre de rang deux dans ce groupe. La croissance du groupe est alors minorée en fonction de la longueur des deux générateurs de ce groupe libre.

Dans [Kou], M. Koubi a montré que pour tout groupe hyperbolique Γ , il existe une constante n_Γ telle que pour tout système générateur de Γ , il existe deux éléments de longueurs majorées par n_Γ qui engendrent un groupe libre de rang 2. Ce résultat montre donc que la croissance des groupes hyperboliques est uniformément minorée (indépendamment du système générateur), autrement dit que l'entropie algébrique des groupes hyperboliques est non nulle.

Dans [Del3], T. Delzant montre que dans un groupe hyperbolique Γ , il existe une constante N telle que pour toute paire d'éléments f, g de Γ , les éléments f^N et g^N engendrent un groupe libre (de rang 0, 1 ou 2). En fait T. Delzant montre que le sous-groupe normal engendré par f^N est un groupe libre, puis en déduit la propriété précédente.

Pour minorer une croissance, il suffit d'exhiber un monoïde libre de rang 2 plutôt qu'un groupe libre de rang 2. Nous proposons ici le résultat suivant dont la preuve est bien plus élémentaire que la preuve subtile du résultat plus complet de T. Delzant.

Théorème. *Soit (Γ, S) un groupe δ -hyperbolique pointé. Il existe une constante n explicite telle que, étant donnés deux éléments quelconques f et g de Γ , il existe $\epsilon = \pm 1$ pour lequel f^n et $g^{\epsilon n}$ soit sont triviaux, soit engendrent \mathbb{Z} comme groupe, soit engendrent librement comme monoïde (ou semi-groupe) un monoïde libre.*

Notre calcul donne $n = (328\delta + 1) \max \{b_{64\delta}!, (b_{8\delta})^{2!}\}$ où b_n désigne le cardinal de la boule de rayon n de (Γ, S) (on peut donc majorer b_n par $(2 \text{ card } S)^n$). Le groupe fini $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni du système générateur Γ est 1-hyperbolique. La constante n du théorème ne peut donc pas dépendre uniquement de δ .

Notons que dans le groupe hyperbolique (à petite simplification $C'(1/6)$) sans torsion $\Gamma = \langle a, b \mid ab^{-1}a^{-2}ba^3b^{-1}a^4b^{-1}a^5b^{-1} = 1 \rangle$, les éléments a et b engendrent un monoïde libre mais pas un groupe libre. Les éléments a^6 et b engendrent un groupe libre (d'après l'algorithme de Dehn).

Pour obtenir un groupe libre (ou un monoïde libre) de rang deux dans un groupe hyperbolique, il y a deux méthodes classiques : le lemme du ping-pong au bord ou un lemme de "petite simplification", lemme 1.2 de [Del1]. Nous utiliserons la deuxième méthode (lemme 4.1 de cet article) pour obtenir plus rapidement des bornes effectives. Ce lemme de petite simplification formalise l'idée d'approcher certaines parties d'un espace métrique hyperbolique par des arbres. La preuve du théorème est alors analogue à celle qui montrerait que deux isométries hyperboliques d'un arbre dont les demi-axes positifs ne s'intersectent qu'en un segment compact engendrent un semi-groupe libre.

Dans cet exposé élémentaire, nous avons rappelé les preuves de la plupart des résultats classiques que nous utilisons.

2. Préliminaires

Définitions de l'hyperbolicité.

Étant donnés trois points a_1, a_2, a_3 d'un espace métrique X , il existe un unique arbre métrique T enveloppe convexe de trois points (tripode ou bipode) qui réalise une isométrie entre $\{a_1, a_2, a_3\}$ et les trois points de l'arbre. S'il y a un triangle géodésique $[a_1, a_2, a_3]$ (réunion de trois segments géodésiques $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, $[a_1, a_3]$) dans X , on peut prolonger cette isométrie par une application ϕ entre $[a_1, a_2, a_3]$ et T isométrique sur les trois côtés de $[a_1, a_2, a_3]$.

Le produit de Gromov $(a_2|a_3)_{a_1}$ de a_2 et a_3 centré en a_1 est la longueur du segment de l'arbre T joignant le point $\phi(a_1)$ au segment $[\phi(a_2), \phi(a_3)]$. Ainsi on a : $(a_2|a_3)_{a_1} = \frac{1}{2}[d(a_1, a_2) + d(a_1, a_3) - d(a_2, a_3)]$. Par analogie avec les arbres (ou plus précisément les graphes de Cayley des groupes libres), on peut voir $(a_2|a_3)_{a_1}$ comme une longueur de "simplification" entre les segments $[a_2, a_1]$ et $[a_1, a_3]$. Si $(a_2|a_3)_{a_1}$ est "petit" (voir le lemme 4.1) par rapport aux longueurs des segments $[a_1, a_2]$ et $[a_1, a_3]$, on dira que ces segments se simplifient peu.

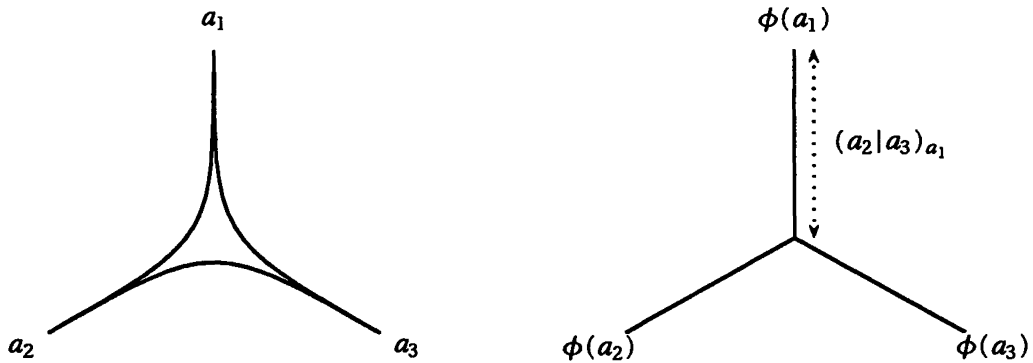


FIG. 1: *Finesse des triangles*

La propriété d'hyperbolicité au sens de Gromov et la constante δ d'hyperbolicité sont définies à l'aide du produit de Gromov dans [G-H], [CDP] et [ABC+]. On dira qu'un espace métrique X est δ -hyperbolique si :

$$\forall x, y, z, t \in X, (x|y)_t \geq \min\{(x|z)_t, (y|z)_t\} - \delta.$$

Finesse des triangles.

(Voir par exemple [CDP, prop.3.6 p.10], [G-H, prop 21 p. 41]).

Dans un espace métrique géodésique X δ -hyperbolique, les triangles sont 4δ fins : pour tout triangle géodésique $[a_1, a_2, a_3]$, l'application ϕ construite précédemment est à 4δ près une isométrie, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in [a_1, a_2, a_3], \quad d(x, y) - 4\delta \leq d(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y).$$

Ceci implique que tout côté d'un triangle géodésique est dans le 4δ voisinage des deux autres (condition de Rips).

Proximité des géodésiques.

Dans un espace hyperbolique au sens de Gromov, il n'y a pas unicité des géodésiques mais on a :

Lemme 2.1 ([CDP], prop.2.2 p. 20). *Dans un espace métrique géodésique X δ -hyperbolique, deux arcs géodésiques finis ou infinis ayant mêmes extrémités dans $X \cup \partial X$ restent à distance de Hausdorff inférieure à 8δ (on dira qu'ils sont parallèles).*

Approximation d'un pentagone par un arbre.

Lemme 2.2 (voir aussi [CDP] page 91, [G-H] page 33). *Soit X un espace δ -hyperbolique.*

Tout pentagone géodésique de X s'approxime à 12δ près par un arbre. Précisément, soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cinq points de X , et pour tout $i < j$, soit $[a_i, a_j] = [a_j, a_i]$ un segment géodésique. On note $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = A = \bigcup_{i < j} [a_i, a_j]$. Alors il existe un arbre

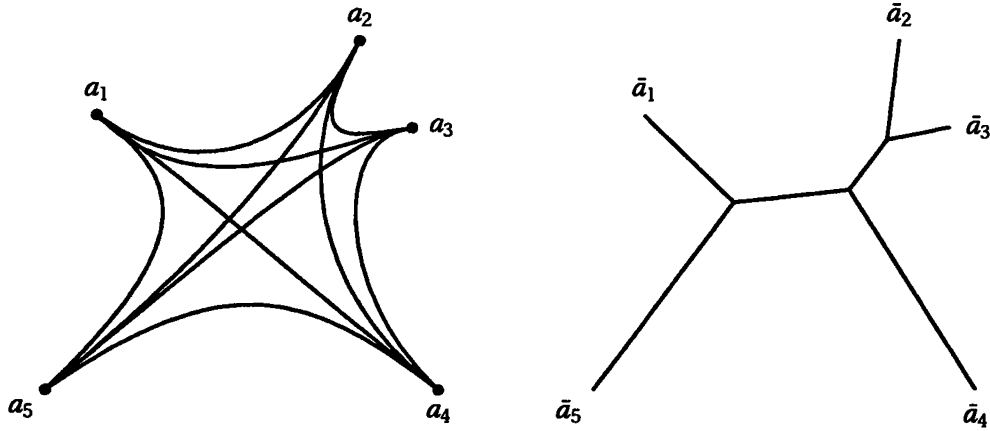


FIG. 2: Approximation d'un pentagone

métrique T et une application $\phi : A \rightarrow T$, aussi notée $\phi(x) = \bar{x}$, telle que ϕ est une $(1, 12\delta)$ -quasi-isométrie, précisément :

- (i) Pour tout $i = 2, 3, 4, 5$, $\phi|_{[a_1, a_i]}$ est une isométrie. On dira que T est basé en a_1 .
- (ii) Pour tous $x, y \in A$, $d(x, y) - 12\delta \leq d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(x, y) + 8\delta$.
- (iii) Tout point sur une géodésique se relève près de cette géodésique :

$$\forall i, j \forall t \in A, \text{ si } \bar{t} \in [\bar{a}_i, \bar{a}_j], \text{ il existe } t' \in [a_i, a_j] \text{ tel que } d(t, t') \leq 20\delta.$$

- (iv) Tout point sur un côté $[a_i, a_j]$ du pentagone se projette près du segment $[\bar{a}_i, \bar{a}_j]$:

$$\forall i, j \forall t \in [a_i, a_j], d(\bar{t}, [\bar{a}_i, \bar{a}_j]) \leq 14\delta.$$

Preuve. D'après [CDP] page 91 ou [G-H] page 33, on peut approximer $B = \cup_i [a_1, a_i]$ par un arbre T de la façon suivante : il existe $\phi : B \rightarrow T$ telle que pour tout i , $\phi|_{[a_1, a_i]}$ est une isométrie et

$$\forall x, y \in B, \quad d(x, y) - 4\delta \leq d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(x, y).$$

La finesse des triangles $[a_1, a_i, a_j]$ montre que A est contenu dans le 4δ -voisinage de B . On prolonge alors ϕ sur A (pas forcément continûment) en posant $\phi(x) = \phi(x')$ pour un choix quelconque de $x' \in B$ tel que $d(x, x') \leq 4\delta$. Cette application ϕ vérifie les propriétés (i) et (ii).

(iii) On a $d(\bar{a}_i, \bar{t}) + d(\bar{t}, \bar{a}_j) = d(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$. D'après (ii), $8\delta + d(a_i, a_j) \geq d(a_i, t) - 12\delta + d(t, a_j) - 12\delta$ donc $d(a_i, a_j) \geq d(a_i, t) + d(t, a_j) - 32\delta$. Considérons maintenant l'arbre d'approximation du triangle a_i, a_j, t . L'inégalité précédente signifie que son centre \bar{c} est 16δ -proche de \bar{t} . On peut alors prendre pour t' un relevé de \bar{c} dans $[a_i, a_j]$: $d(t', t) \leq 16\delta + 4\delta = 20\delta$.

(iv) $2d(\bar{t}, [\bar{a}_i, \bar{a}_j]) = d(\bar{a}_i, \bar{t}) + d(\bar{t}, \bar{a}_j) - d(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \leq d(a_i, t) + 8\delta + d(t, a_j) + 8\delta - d(a_i, a_j) + 12\delta = 28\delta$. \square

Lemme de passage du local au global.

Ce lemme classique permet d'approcher certaines parties d'un espace hyperbolique par des arbres. Plus précisément, si un arbre est plongé dans un espace métrique hyperbolique de sorte que les arêtes soient géodésiques et que deux arêtes consécutives ont une longueur grande devant la longueur sur laquelle elles se simplifient – condition locale –, alors cet arbre est quasi-isométriquement plongé dans l'espace hyperbolique – condition globale.

En particulier un chemin géodésique par morceaux dont les morceaux sont assez longs et ne se simplifient pas trop entre eux est une quasi-géodésique, et s'éloigne donc de son point de départ. Voici un énoncé précis de ce résultat :

Lemme 2.3 : passage du local au global (voir [Gro] 7.2.C, [G-H] page 92, [Del1] page 178). Soient a_0, \dots, a_n des points d'un espace δ -hyperbolique tels qu'il existe σ, L tels que pour tout i , $(a_i | a_{i+2})_{a_{i+1}} \leq \sigma$ et $d(a_i, a_{i+1}) > L$ avec $L \geq 2\sigma + 20\delta$.

On a alors :

$$(i) (a_0 | a_n)_{a_{n-1}} \leq \sigma + 10\delta$$

$$(ii) d(a_0, a_n) \geq \sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) - n(20\delta + 2\sigma) > n(L - 2\sigma - 20\delta).$$

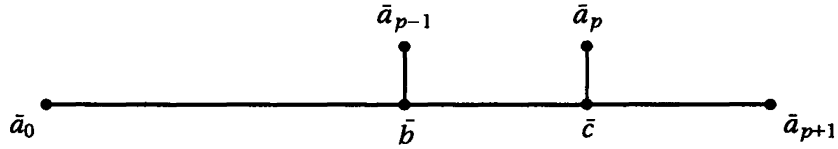


FIG. 3: Preuve du lemme de passage du local au global.

Preuve. On montre d'abord par récurrence sur p que $\sigma'_p = (a_0 | a_{p+1})_{a_p} \leq \sigma + 10\delta$ (point (i)). Considérons un arbre d'approximation de $a_0, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}$ basé en a_p . Soient \bar{b} la projection de \bar{a}_{p-1} sur $[\bar{a}_0, \bar{a}_{p+1}]$ et \bar{c} la projection de \bar{a}_p sur $[\bar{a}_{p-1}, \bar{a}_{p+1}]$.

L'hypothèse de récurrence montre que $\bar{a}_0, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}_{p+1}$ sont alignés dans cet ordre : en effet,

$$\begin{aligned} 2d(\bar{a}_{p-1}, \bar{b}) &= d(\bar{a}_0, \bar{a}_{p-1}) + d(\bar{a}_p, \bar{a}_{p-1}) - d(\bar{a}_0, \bar{a}_p) \\ &\leq (d(a_0, a_{p-1}) + 8\delta) + d(a_p, a_{p-1}) - d(a_0, a_p) + 12\delta \\ &\leq 2\sigma'_p + 20\delta \end{aligned}$$

donc $d(\bar{a}_{p-1}, \bar{b}) \leq \sigma'_p + 10\delta$. De même, on a $d(\bar{a}_p, \bar{c}) \leq \sigma + 6\delta$. Comme $d(\bar{a}_{p-1}, \bar{a}_p) > L - 12\delta$, la condition $L \geq \sigma + 38\delta \geq (\sigma + \sigma'_p) + 28\delta \geq 12\delta + d(\bar{a}_{p-1}, \bar{b}) + d(\bar{a}_p, \bar{c})$ permet de conclure que $\bar{c} \notin [\bar{a}_{p-1}, \bar{b}]$. Ceci montre que $\bar{a}_0, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}_{p+1}$ sont alignés dans cet ordre.

On en déduit que $2\sigma'_{p+1} = d(a_0, a_p) + d(a_p, a_{p+1}) - d(a_0, a_{p+1}) \leq d(\bar{a}_0, \bar{a}_p) + d(\bar{a}_p, \bar{a}_{p+1}) - d(\bar{a}_0, \bar{a}_{p+1}) + 8\delta = 2d(\bar{a}_p, \bar{c}) + 8\delta \leq 2\sigma + 20\delta$ d'où le point (i).

Linégalité $d(a_0, a_p) + d(a_p, a_{p+1}) - d(a_0, a_{p+1}) \leq 2\sigma + 20\delta$ donne alors par récurrence, $d(a_0, a_p) \geq \sum_{i=0}^{p-1} d(a_i, a_{i+1}) - p(2\sigma + 20\delta)$. \square

Projection sur un ensemble convexe.

Un ensemble $A \subset X$ est dit *convexe* si pour toute paire de points de A , au moins une géodésique de X les reliant est contenue dans A .

Le lemme suivant exprime qu'un segment "orthogonal" à un ensemble convexe (par exemple un segment géodésique) se simplifie peu avec un segment contenu dans l'ensemble convexe.

Lemme 2.4 : petite simplification avec les projections. *Soit A un ensemble convexe d'un espace δ -hyperbolique X , soient $x \in X$, $\nu \geq 0$ et soit $p \in A$ tel que $d(x, p) \leq d(x, A) + \nu$ (on utilisera en fait $\nu = 0$). Alors pour tout $z \in A$, la simplification $(x|z)_p$ est petite : $(x|z)_p \leq \nu + 4\delta$.*

Pour $\nu = 0$, on dira que p est une projection "orthogonale" de x sur A .

Remarque. Ce lemme se généralise dans le cas où A est seulement quasi-convexe.

Preuve. Considérons un triangle $[x, p, z]$ dans lequel la géodésique $[z, p]$ est contenue dans A . Considérons un arbre d'approximation de $[x, p, z]$, soit \bar{c} son centre, et soit $s = d(\bar{p}, \bar{c})$ la simplification à majorer. Les préimages c_1 et c_2 de \bar{c} dans $[x, p]$ et $[p, z]$ sont 4δ proches. Donc $d(x, c_2) \leq d(x, c_1) + d(c_1, c_2) \leq d(x, p) - s + 4\delta$. Par ailleurs $d(x, c_2) \geq d(x, A) \geq d(x, p) - \nu$. On en déduit $s \leq \nu + 4\delta$. \square

3. Éléments de torsion et axes des éléments hyperboliques

Soit Γ un groupe de type fini et S un système générateur fini de Γ . On appellera (Γ, S) un groupe pointé. Le système générateur S définit un graphe de Cayley de Γ qu'on notera $\mathcal{C}(\Gamma, S)$. Muni de sa métrique de longueur (arêtes de longueur 1), ce graphe est un espace métrique géodésique (deux points quelconques sont joints par un segment géodésique, c'est-à-dire minimisant pour la longueur). La distance induite sur Γ (métrique des mots) sera notée d et la norme induite $\|\cdot\|$ (pour tout $f \in \Gamma$, $\|f\| = d(1, f)$). On dit que Γ est hyperbolique s'il existe δ pour lequel le graphe de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ est δ -hyperbolique. La propriété d'hyperbolicité ne dépend pas du choix du système générateur fini. Notons que si $\delta = 0$ le groupe Γ est un groupe libre, sinon δ est un entier supérieur ou égal à 1.

Distance de translation.

Une isométrie f d'un espace hyperbolique X possède un *déplacement minimal* et une *distance de translation* : le déplacement minimal de f est défini par $l(f) = \inf_{x \in X} d(x, f.x)$, et la distance de translation est définie comme la limite d'une suite sous-additive $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, f^n(x)) / n$, limite qui ne dépend pas du point $x \in X$.

Un élément d'un groupe hyperbolique pointé (Γ, S) agit par isométrie sur le graphe de Cayley par multiplication à gauche. Le déplacement minimal d'un élément f de Γ est donc $l(f) = \inf_{x \in \Gamma} \|x f x^{-1}\|$. La distance de translation d'un élément f du groupe pointé s'appelle également longueur stable ou norme stable de cet élément et est notée $[[f]]$ (Gromov, voir [CDP] p. 117).

Les éléments de torsion.

Nous donnons ici une preuve élémentaire d'un résultat un peu moins précis qu'un résultat obtenu par M. Koubi. Il permet de donner une borne explicite sur l'ordre des éléments de torsion de Γ .

Proposition 3.1 ([Kou] prop.3.2). *Soit (Γ, S) un groupe δ -hyperbolique pointé. Soit H un sous-groupe fini de Γ . Il existe un sommet du graphe de Cayley de (Γ, S) dont l'orbite sous l'action de H a un diamètre majoré par 64δ .*

Remarque. Ce résultat se généralise trivialement à un sous-groupe fini d'isométries d'un espace métrique δ -hyperbolique.

On note b_r le nombre d'éléments contenus dans une boule de rayon r de (Γ, S) .

Corollaire 3.2. *Soit (Γ, S) un groupe δ -hyperbolique pointé. Pour tout sous-groupe fini H de Γ , on a $\text{card } H \leq b_{64\delta}$. En particulier, en posant $n_1 = b_{64\delta}!$, pour tout $f \in \Gamma$, f^{n_1} est soit trivial, soit hyperbolique.*

De plus, il y a au plus $2^{b_{64\delta}}$ classes de conjugaisons de sous-groupes finis dans Γ .

Preuve du corollaire. Soit $x \in \mathcal{C}(\Gamma, S)$ tel que $\text{diam}(H.x) \leq 64\delta$. Comme H agit librement sur le graphe de Cayley de (Γ, S) , $\text{card } H = \text{card}(H.x) \leq b_{64\delta}$.

De plus, $x^{-1}Hx$ est contenu dans la boule de rayon 64δ (centrée en 1) de Γ . Le nombre de classes de conjugaisons de sous-groupes finis de Γ est donc au plus égal au nombre de parties de la boule de rayon 64δ . \square

Preuve de la proposition 3.1. Soit x un point de $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ dont l'orbite sous l'action de H a un diamètre l minimal. On vérifie facilement que ce point peut être pris soit en un sommet, soit en un milieu d'arête.

Soit $y \in H.x$ tel que $d(x, y) = l$. Soit m le milieu d'un segment géodésique $[x, y]$ (m est donc soit un sommet soit le milieu d'une arête). Le diamètre de $H.m$ est au moins l , donc il existe $g \in H$ tel que $d(m, g.m) \geq l$. Notons $x' = g.x$, $y' = g.y$ et $m' = g.m$.

Considérons un arbre d'approximation T du quadrilatère $[x, y, x', y']$. Il existe deux sommets terminaux $\bar{a}, \bar{b} \in \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'\}$ tels que $[\bar{m}, \bar{m}'] \subset [\bar{a}, \bar{b}]$. Quitte à permuter x, y, x', y' , on peut supposer $\bar{a} = \bar{x}$. Ainsi, $[\bar{m}, \bar{m}'] \subset [\bar{x}, \bar{b}]$.

Premier cas : \bar{m} est entre \bar{x} et \bar{m}' . Alors $d(\bar{m}, \bar{m}') \leq d(\bar{m}, \bar{b}) = d(\bar{x}, \bar{b}) - d(\bar{x}, \bar{m})$ donc d'après le lemme 2.2, $d(m, m') - 12\delta \leq d(\bar{m}, \bar{m}') \leq d(\bar{x}, \bar{b}) - d(\bar{x}, \bar{m}) \leq d(x, b) + 8\delta - (d(x, m) - 12\delta) \leq l + 8\delta - (l/2 - 12\delta) = l/2 + 20\delta$. Donc $l \leq d(m, m') \leq l/2 + 32\delta$, et $l \leq 64\delta$.

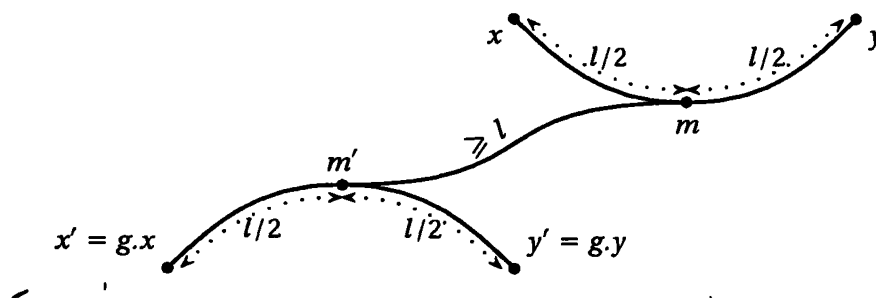


FIG. 4: Preuve de la proposition 3.1

Deuxième cas : \bar{m} est entre \bar{m}' et \bar{b} . Alors $d(\bar{m}, \bar{m}') \leq d(\bar{x}, \bar{m})$ donc d'après le lemme 2.2, $d(m, m') - 12\delta \leq d(\bar{m}, \bar{m}') \leq d(\bar{x}, \bar{m}) \leq (d(x, m) + 8\delta) \leq l/2 + 8\delta$. Donc $l \leq d(m, m') \leq l/2 + 20\delta$, et $l \leq 40\delta$. \square

Axes des éléments hyperboliques.

La proposition suivante de T. Delzant permet de minorer uniformément dans un groupe hyperbolique pointé la distance de translation des éléments hyperboliques et donne une puissance uniforme telle que tout élément hyperbolique élevé à cette puissance agit par translation sur cet axe. Nous rappellerons la preuve de T. Delzant.

Proposition 3.3 ([Del2] prop.3.1, voir aussi [Kou, prop.3.2]). *Soit (Γ, S) un groupe hyperbolique pointé. Il existe $n_2 = (b_{8\delta}^2)!$ tel que pour tout élément hyperbolique f de Γ , f^{n_2} agit par translation sur (au moins) une droite géodésique, appelé axe de translation de f^{n_2} . De plus si deux éléments hyperboliques f et g ont mêmes points fixes à l'infini, alors f^{n_2} et g^{n_2} possèdent un axe de translation commun.*

Le corollaire suivant est immédiat en utilisant la proposition 3.1.

Corollaire 3.4. *Soit (Γ, S) un groupe hyperbolique pointé. Il existe $n_0 = \sup(n_1, n_2)$ tel que pour tout élément f de Γ , f^{n_0} est soit trivial, soit un élément hyperbolique ayant un axe de translation.*

Preuve de la proposition 3.3 (suivant [Del2]). Appelons arc géodésique spécial un arc géodésique de Γ minimisant pour un ordre lexicographique (une fois choisi un ordre total sur les générateurs de Γ). Un sous-arc d'une géodésique spéciale est une géodésique spéciale. On dit qu'un chemin géodésique infini est *spécial* si tous ses sous-arcs sont spéciaux. Il y a une unique géodésique spéciale (finie) entre deux points de Γ . Pour tout chemin géodésique, il y a donc un nombre uniformément borné de chemins géodésiques spéciaux à distance de Hausdorff inférieure à 8δ (ces chemins sont déterminés par leurs extrémités, leur nombre est donc majoré par $b_{8\delta}^2$). Le nombre de chemins géodésiques spéciaux joignant deux points donnés à l'infini est donc borné par $b_{8\delta}^2$. Un simple argument de compacité montre qu'il y a toujours au moins une géodésique spéciale entre deux points à l'infini.

Soit f un élément hyperbolique de Γ . Alors f permute les géodésiques spéciales joignant ses deux points fixes à l'infini. Par conséquent, pour $n_2 = (b_{8\delta}^2)!$, f^{n_2} préserve

toutes les géodésiques spéciales joignant ses points fixes à l'infini. Et si g a les mêmes points fixes que f , f^{n_2} et g^{n_2} préservent les mêmes géodésiques spéciales. \square

Remarque. Si f est un élément de Γ agissant par translation sur une ligne géodésique, la distance de translation de f sur cet axe est la norme stable de f . Le lemme de Delzant montre que pour un élément hyperbolique f quelconque de Γ , on a $[[f]] = l(f^{n_2})/n_2$.

Remarque. La longueur de translation de f^{n_2} sur un de ses axes est au moins 1. Donc les longueurs de translations des éléments hyperboliques sont uniformément minorés par $[[f]] \geq 1/n_2$. La constante n_2 dépend du cardinal d'une boule de Γ , qu'on peut majorer par exemple en fonction du nombre de générateurs de Γ et de δ . On ne peut obtenir une constante n_2 dépendant seulement de δ . En effet pour tout entier k , \mathbb{Z} muni du système générateur $\{1, 2, \dots, k\}$ est 1-hyperbolique mais l'élément 1 a une longueur stable égale à $1/k$.

Un élément f peut avoir plusieurs axes de translation, ils sont alors parallèles et f agit par translation de même longueur sur ces axes. Deux éléments hyperboliques ayant un axe de translation commun et même longueur de translation sont égaux (puisque le groupe agit librement sur son graphe de Cayley).

Si deux éléments d'un groupe hyperbolique agissent sur le graphe de Cayley par translation sur des axes ayant une extrémité commune au bord à l'infini, alors ces éléments sont hyperboliques, ont mêmes points fixes à l'infini, et ont une puissance commune (voir théorème 30 p. 154 de [G-H], proposition 7.1 de [CDP]).

Fait principal. Soit (Γ, S) un groupe δ -hyperbolique pointé. Si deux éléments f et g de Γ agissent par translation sur des axes non parallèles et avec des distances de translation strictement supérieures à 328δ , alors il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que f et g^ϵ engendrent un monoïde (ou semi-groupe) libre.

Remarque. Quitte à éventuellement changer f en f^{-1} , ce fait s'énonce également (avec les mêmes constantes) pour deux isométries d'un espace δ -hyperbolique dont les axes ne sont pas parallèles (mais qui peuvent avoir un seul point fixe commun au bord à l'infini).

Théorème. Soit (Γ, S) un groupe δ -hyperbolique pointé. Il existe une constante $n = (328\delta + 1)n_0$ telle que étant donnés deux éléments quelconques f et g de Γ , il existe $\epsilon = \pm 1$ pour lequel f^n et $g^{\epsilon n}$ soit sont triviaux, soit engendrent \mathbb{Z} comme groupe, soit engendrent librement comme monoïde (ou semi-groupe) un monoïde libre.

Preuve du théorème en supposant le fait principal. Soit f et g deux éléments de Γ . D'après la proposition 3.1 et la proposition 3.3, f^{n_0} et g^{n_0} sont soit triviaux, soit agissent par translation sur des axes. Dans ce deuxième cas, si les axes de f et g sont parallèles, f^{n_0} et g^{n_0} ont un axe de translation commun. Sur cet axe, ils engendrent un groupe de translation isomorphe à \mathbb{Z} , et cela montre que le groupe engendré par f^{n_0} et g^{n_0} (donc *a fortiori* par f^n et g^n) est isomorphe à \mathbb{Z} .

Sinon f^{n_0} et g^{n_0} agissent par translation (de longueurs au moins 1) sur des axes non parallèles, et le fait principal conclut. \square

4. Preuve du fait principal

Rappelons l'énoncé que nous allons prouver

Fait principal. Soit (Γ, S) un groupe δ -hyperbolique pointé. Si deux éléments f et g de Γ agissent par translation sur des axes non parallèles et avec des distances de translation strictement supérieures à 328δ , alors il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que f et g^ϵ engendrent un monoïde (ou semi-groupe) libre.

Dans toute la suite on travaille dans l'espace métrique δ -hyperbolique $\mathcal{C}(\Gamma, S)$. On considère deux éléments hyperboliques f et g de Γ , ayant chacun un axe de translation, les deux axes étant non parallèles (on ne suppose pour l'instant rien sur les longueurs de translations). Comme f et g sont deux éléments du groupe hyperbolique Γ agissant sur son graphe de Cayley, les axes de f et g n'ont donc pas d'extrémité commune au bord à l'infini (théorème 30 p. 154 de [G-H], proposition 7.1 de [CDP]).

Soit $A(f)$, $A(g)$ des axes orientés pour f et g . On note $d = \max\{20\delta, d(A(f), A(g))\}$.

Pour prouver le fait principal, le but est de trouver un point x de $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ tel que si w, w' sont deux mots positifs distincts en f et g , alors $w.x \neq w'.x$. Ce point x sera choisi comme un point de l'axe de f à partir duquel les axes de f et g vont diverger.

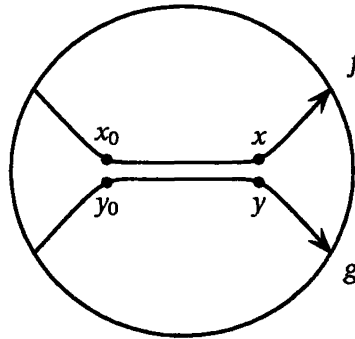


FIG. 5: Choix du point x .

On note $[x_0, x]$ le sous-segment de $A(f)$ enveloppe convexe des point de $A(f)$ à distance inférieure ou égale à d de $A(g)$. Ce segment est compact puisque les axes n'ont pas d'extrémités communes au bord à l'infini (en réalité la preuve n'utilise pas le fait que le segment est compact, mais seulement les positions de x et de y et les orientations des deux axes). Quitte à échanger x_0 et x , on peut supposer que $[x_0, x]$ est orienté positivement dans $A(f)$. Soient $y_0, y \in A(g)$ tels que $d(x, y) = d(x, A(g)) = d$ et $d(x_0, y_0) = d(x_0, A(g)) = d$.

Quitte à changer g en g^{-1} , on peut supposer que $[y_0, y]$ est positivement orienté dans $A(g)$.

Ce choix de point base x est justifié par le lemme suivant. Ce lemme permet de se placer dans les conditions du lemme de passage du local au global 2.3 pour montrer la proposition suivante, qui conclut la preuve.

Lemme de petite simplification locale 4.1. *Soient f et g deux éléments de Γ agissant sur le graphe de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ par translation sur des axes non parallèles, avec choix de l'orientation de g et du point base x comme ci-dessus. Soient p, q deux entiers non nuls tels que $p > 0$ ou $q > 0$.*

Alors $(f^p \cdot x | g^q \cdot x)_x \leq \sigma$ avec $\sigma = 154\delta$.

Ce lemme de petite simplification locale implique la proposition suivante :

Proposition 4.2. *Posons $K = \min\{l(f), l(g)\} - 2\sigma - 20\delta = \min\{l(f), l(g)\} - 328\delta$ de sorte que $K > 0$ sous les hypothèses du fait principal.*

Si w et w' sont deux mots positifs distincts en f et g commençant par deux lettres différentes (ou éventuellement $w' = 1$), alors

$$d(w \cdot x, w' \cdot x) \geq K (|w| + |w'|).$$

Cette proposition conclut la preuve du fait principal. En effet, si w et w' sont deux mots distincts en f et g , on écrit $w = uv$ et $w' = u'v'$ où u le plus long sous-mot en f et g commun à gauche de w, w' . La proposition montre que $v \cdot x \neq v' \cdot x$, donc $w \neq w'$.

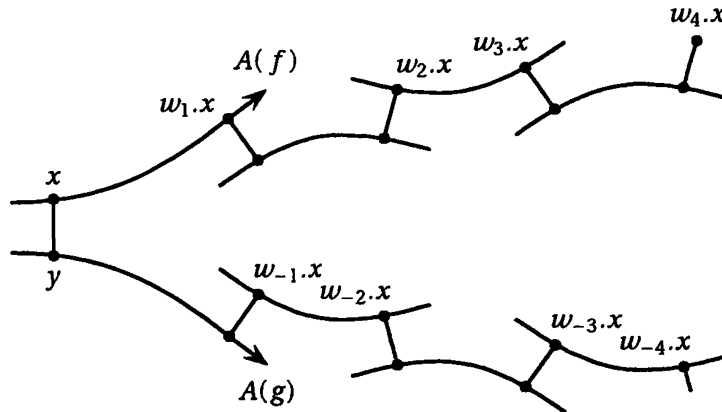


FIG. 6: Preuve de la proposition 4.2.

Preuve de la proposition en admettant le lemme de petite simplification locale (voir fig. 6). Soient w et w' deux mots en f et g commençant par des lettres distinctes. On peut supposer $w = f^{n_1} g^{n_2} \dots g^{n_k}$ et $w' = g^{n_{-1}} f^{n_{-2}} \dots f^{n_{-l}}$ avec n_1, \dots, n_{k-1} et n_{-1}, \dots, n_{-l+1} strictement positifs, $k > 0$, et l éventuellement nul.

On notera $w = u_1 \dots u_k$ avec $u_i = f^{n_i}$ ou $u_i = g^{n_i}$ selon le cas, et $w' = u_{-1} \dots u_{-k}$ avec $u_{-i} = f^{n_{-i}}$ ou $u_{-i} = g^{n_{-i}}$. On pose $w_0 = 1$, et pour $i > 0$ on pose $w_i = u_1 \dots u_i$ et $w_{-i} = u_{-1} \dots u_{-i}$. Enfin, pour $-l \leq i \leq k$ on note $x_i = w_i.x$. Ainsi $x_{-l} = w'.x$, $x_0 = x$ et $x_k = w.x$.

On applique le lemme de passage au global 2.3 à la suite x_{-l}, \dots, x_k :

En multipliant à gauche par w_i^{-1} , on voit que la simplification $(x_{i-1}|x_{i+1})_{x_i}$ entre trois points consécutifs est égale à $(f^{-n_i}.x|g^{n_{i+1}}.x)_x$, $(g^{-n_i}.x|f^{n_{i+1}}.x)_x$ ou $(g^{n_{i-1}}.x|f^{n_i}.x)_x$ selon que u_i est une puissance de f ou de g . D'après le lemme 4.1, la simplification entre trois points consécutifs est donc au plus s . D'autre part l'hypothèse sur la distance de translation de f et g donne $d(x, f.x), d(x, g.x) > 328\delta = 2\sigma + 20\delta$. Le lemme de passage au global 2.3 conclut ainsi que $d(x, w.x) \geq |w| (\min\{l(f), l(g)\} - 2\sigma - 20\delta)$. \square

Nous concluons par la preuve du lemme de petite simplification locale.

Preuve du lemme de petite simplification locale 4.1. Lorsque d est assez grand ($d > 28\delta$), on peut appliquer le lemme de passage au global à la suite de 5 points $f^p.x, x, y, g^q.y, g^q.x$ (voir fig. 7).

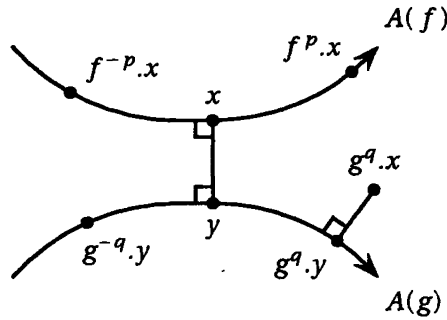
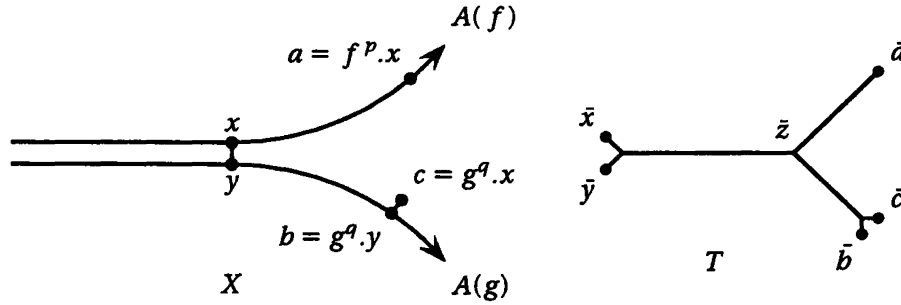


FIG. 7: Petite simplification locale lorsque d est grand

En effet le lemme 2.4 des projections orthogonales montre que les simplifications entre trois points consécutifs de cette suite sont au plus 4δ . De plus l'hypothèse que d et les longueurs de translation de f et g sont strictement supérieures à 28δ montre que la distance entre deux points consécutifs de cette suite est strictement supérieure à 28δ . On peut donc appliquer le lemme de passage au global avec $\sigma = 4\delta$.

Le premier point de ce lemme montre alors que $(f^p.x|g^q.x)_x \leq 2\sigma + 20\delta = 28\delta$, ce qui termine la preuve lorsque $d > 28\delta$. (Dans ce cas, on n'a pas eu besoin d'hypothèse sur le signe de p ou q et f et g engendrent donc un groupe libre).

On suppose donc maintenant $d \leq 28\delta$ (voir fig. 8). Considérons T un arbre d'approximation basé en x du pentagone $[x, y, f^p.x, g^q.y, g^q.x]$. Pour simplifier les notations, on pose $a = f^p.x$, $b = g^q.y$ et $c = g^q.x$. Soit \bar{z} le point de T défini par $[\bar{x}, \bar{z}] = [\bar{x}, \bar{a}] \cap [\bar{x}, \bar{c}]$.


 FIG. 8: Petite simplification locale lorsque d est petit

La simplification $(a|c)_x$ qu'on veut majorer satisfait $2(a|c)_x \leq 2d(\bar{x}, \bar{z}) + 12\delta$. Il suffit donc de majorer $s = d(\bar{x}, \bar{z})$.

Supposons donc que $s = d(\bar{x}, \bar{z})$ est grand et trouvons une contradiction. Par hypothèse, on a $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d \leq 28\delta$, et $d(\bar{b}, \bar{c}) \leq d + 8\delta \leq 36\delta$. Par conséquent, lorsque $s > 28\delta + 36\delta = 64\delta$, le point $\bar{u} \in [\bar{x}, \bar{z}]$ tel que $d(\bar{x}, \bar{u}) = s - 36\delta$ appartient à $[\bar{x}, \bar{a}] \cap [\bar{y}, \bar{b}] \cap [\bar{x}, \bar{c}]$.

Considérons u_1 un antécédant de \bar{u} dans $[x, a]$ et u_2 un point de $[y, b]$ 20δ -proche de u_1 (lemme 2.2 (iii)). On a donc $\bar{u}_1 = \bar{u}$ et $d(\bar{u}_2, \bar{u}) \leq 28\delta$.

Comme u_1 est sur l'axe de f et u_2 est sur l'axe de g , on a ainsi $d(A(f), A(g)) \leq 20\delta$ et $d = 20\delta$. De plus $d(u_1, u_2) \leq 20\delta$, donc $u_1 \in [x_0, x]$ (on rappelle que $[x_0, x]$ est l'enveloppe convexe dans $A(f)$ des points à distance au plus d de $A(g)$).

Ainsi $u_1 \in [x_0, x] \cap [x, f^p.x]$. Si $p > 0$, le choix de x_0 et x en fonction de l'orientation de $A(f)$ montre que $u_1 = x$, ce qui est absurde dès que $s > 36\delta$ puisque $d(\bar{x}, \bar{u}) = s - 36\delta$.

Le cas $q > 0$ se traite de même en étudiant u_2 . On n'a pas nécessairement $u_2 \in [y_0, y]$, mais on a $d(u_2, [y_0, y]) \leq 2d + 16\delta = 56\delta$: c'est le lemme 4.3 ci-dessous.

Or $u_2 \in [y, g^q.y]$ et d'après le choix de l'orientation de $A(g)$, $[y_0, y] \cap [y, g^q.y] = \{y\}$, donc $d(y, u_2) \leq 56\delta$. Or $d(\bar{y}, \bar{u}) \leq d(\bar{y}, \bar{u}_2) + d(\bar{u}_2, \bar{u}) \leq 64\delta + 28\delta = 92\delta$. D'autre part $d(\bar{y}, \bar{u}) \geq d(\bar{x}, \bar{u}) - d(\bar{x}, \bar{y}) \geq s - 36\delta - 20\delta = s - 56\delta$. On obtient donc une contradiction dès que $s > 92\delta + 56\delta = 148\delta$.

□

Lemme 4.3. Si $u_2 \in A(g)$ est tel que $d(u_2, A(f)) \leq d$, alors $d(u_2, [y_0, y]) \leq 2d + 16\delta$

Preuve. Soit $u_1 \in A(f)$ tel que $d(u_1, u_2) \leq d$. Par définition de $[x_0, x]$, on a $u_1 \in [x_0, x]$. Considérons un arbre d'approximation du pentagone $[x_0, x, u_2, y, y_0]$ basé en u_2 . Comme $d(y_0, x_0) \leq d$ et $d(x, y) \leq d$, on a $d(\bar{y}_0, \bar{x}_0) \leq d + 8\delta$ et $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d + 8\delta$, donc la distance de Hausdorff dans l'arbre entre $[\bar{x}_0, \bar{x}]$ et $[\bar{y}_0, \bar{y}]$ est au plus $d + 8\delta$. En particulier, $d(\bar{u}_2, [\bar{y}_0, \bar{y}]) \leq d(\bar{u}_2, \bar{u}_1) + d(\bar{u}_1, [\bar{y}_0, \bar{y}]) \leq 2d + 16\delta$. Comme la projection sur

l'arbre d'approximation est une isométrie en restriction à $[u_2, y]$ et $[u_2, y_0]$, on obtient $d(u_2, [y_0, y]) \leq 2d + 16\delta$.

□

Bibliographie

- [ABC+] J.M. ALONSO et al., Notes on word hyperbolic groups, in "Group theory from a Geometrical Viewpoint", E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky ed., ICTP, World Scientific, 1991.
- [CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS, *Groupes et géométrie : les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Math. **1441**, (Springer Verlag 1991).
- [Del1] T. DELZANT, *Sous-groupes à deux générateurs des groupes hyperboliques*, in "Group theory from a Geometrical Viewpoint", E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky ed., ICTP, World Scientific, 1991.
- [Del2] T. DELZANT, *Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques*, Duke Math. J. vol. **83** (1996), 661-682.
- [Del3] T. DELZANT, *Asphéricité et sous-groupes libres des groupes hyperboliques*, notes d'un exposé à Genève, juin 1996.
- [G-H] E. GHYS et P. DE LA HARPE (eds), *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*, Birkhäuser, Progress in Math. **83**, 1990.
- [Gro] M. GROMOV, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S.M. Gerstern (ed), M.S.R.I. Publ. **8** (Springer 1987), 75-263.
- [Kou] M. Koubi, *Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques*, Ann. de l'Inst. Fourier (1998), 1441-1453.

Christophe CHAMPETIER, Vincent GUIARDEL,
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 UMR5582 (UJF-CNRS)
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
 Christophe.Champetier@ujf-grenoble.fr
 Vincent.Guirardel@ujf-grenoble.fr