

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PIERRE BÉRARD

**Problèmes de valeurs propres et application à l'indice des
surfaces de courbure moyenne constante**

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 109-118

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__109_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES DE VALEURS PROPRES ET APPLICATION À L'INDICE DES SURFACES DE COURBURE MOYENNE CONSTANTE

Pierre BÉRARD

1. Introduction

1.1. Motivations

Soit $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_c^{n+1}$ une immersion isométrique complète, où $\mathbb{S}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ quand $c = 0$ (resp. $\mathbb{S}_c^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$ quand $c = -1$), avec la métrique usuelle. Nous supposons toujours qu'il existe un champ unitaire normal $\vec{N}$, globalement défini le long de $\psi(M)$.

Nous introduisons la *fonctionnelle volume*

$$V_D(\psi) = \int_D \nu_\psi(dx), \quad (1)$$

où $D \Subset M$ est un domaine régulier, relativement compact, et où ν_ψ est la mesure associée à la métrique riemannienne induite par l'immersion ψ sur la variété M .

Si ψ_t est une variation d'une immersion donnée ψ , nous posons $V_D(\psi_t) = V_D(t)$. La *formule de la variation première* s'écrit

$$V'_D(0) = -n \int_D \langle \vec{H}, \xi \rangle \nu_\psi(dx), \quad (2)$$

où $\vec{H} = H \vec{N}$ est le vecteur courbure moyenne (normalisé) de l'immersion ψ (H est alors la courbure moyenne normalisée dans la direction $\vec{N}$) et où ξ est le vecteur variation de la famille d'immersions, $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi_t$.

Les sous-variétés minimales ($H \equiv 0$) de $\mathbb{S}_c^{n+1}$ apparaissent naturellement comme les points critiques de la fonctionnelle volume. Les sous-variétés à courbure moyenne

constante ($H \equiv C$) apparaissent naturellement comme les points critiques de la fonctionnelle volume, sous la contrainte d'une certaine fonctionnelle W . Dans le cas où $\mathbb{S}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, on peut prendre pour fonctionnelle contrainte

$$W_D(\psi) = \frac{1}{n+1} \int_D \langle \psi, \vec{N} \rangle \nu_\psi(dx). \quad (3)$$

La variation première de la fonctionnelle W est donnée par

$$W'_D(0) = \int_D \langle \vec{N}, \xi \rangle \nu_\psi(dx). \quad (4)$$

Que ce soit dans le cas d'une sous-variété minimale ou dans celui d'une sous-variété à courbure moyenne constante, la *formule de la variation seconde* s'écrit, quand $\xi = f \vec{N}$ avec f une fonction,

$$V''_D(0) = \int_D (|df|^2 - (nc + |A|^2) f^2) \nu_\psi(dx), \quad (5)$$

où $|A|$ est la norme de la seconde forme fondamentale de l'immersion ψ .

Dans le cas d'une sous-variété minimale, les fonctions admissibles sont les fonctions $f \in C_0^\infty(D)$. Dans le cas d'une sous-variété à courbure moyenne constante, les fonctions admissibles sont les fonctions $f \in C_0^\infty(D)$ telles que $\int_D f \nu_M(dx) = 0$, condition qui prend en compte la contrainte W . Nous renvoyons à [2] pour plus de détails.

1.2. Deux notions d'indice et de stabilité

Étant donnée une variété riemannienne M et une fonction continue $b \rightarrow M$, nous introduisons la forme quadratique

$$q(f) = \int_M (|df|^2 + b f^2) \nu_M(dx), \quad (6)$$

où ν_M désigne la mesure riemannienne sur M .

Cas M compacte à bord.

Lorsque M est une variété riemannienne compacte à bord (éventuellement vide), nous considérons les problèmes spectraux correspondant aux deux formes quadratiques

- $q(f)$, avec pour domaine $\mathcal{D}(M) = C_0^\infty(M)$,
- $q(f)$, avec pour domaine $\mathcal{D}_T(M) = C_0^\infty(M) \cap \{f \mid \int_M f = 0\}$.

Nous disons alors que

- M est *fortement stable* (relativement à q) si $q(f) \geq 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(M)$, et que
- M est *faiblement stable* (relativement à q) si $q(f) \geq 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}_T(M)$.

Nous définissons

- *l'indice fort* de M , noté $\text{Ind}(M)$, comme la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{D}(M)$ sur lequel $q(f) < 0$, et
- *l'indice faible* de M , noté $\text{Ind}_T(M)$, comme la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{D}_T(M)$ sur lequel $q(f) < 0$.

Cas M complète non-compacte.

Dans le cas où la variété M est complète, non compacte, les deux notions de stabilité sont définies comme ci-dessus. Quant aux indices, nous définissons

- *l'indice fort* de M , comme $\text{Ind}(M) = \sup\{\text{Ind}(D) \mid D \in M\} \leq \infty$, et
- *l'indice faible* de M , comme $\text{Ind}_T(M) = \sup\{\text{Ind}_T(D) \mid D \in M\} \leq \infty$.

Ces notions d'indice et de stabilité ont été introduites pour étudier les sous-variétés minimales (indice et stabilité forts comme nous les avons définis ci-dessus) et pour étudier les sous-variétés de courbure moyenne constante (les deux notions d'indice et de stabilité sont utilisées dans ce cadre).

1.3. Pertinence de la notion d'indice faible

Les deux exemples qui suivent montrent que la notion d'indice faible est plus pertinente que celle d'indice fort pour l'étude des sous-variétés de courbure moyenne constante.

Exemple 1. — Pour l'immersion canonique $M = (\mathbb{S}^n, \text{can}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, la forme quadratique (5) est donnée par la formule

$$q(f) = \int_M (|df|^2 - n f^2) \nu_M(dx).$$

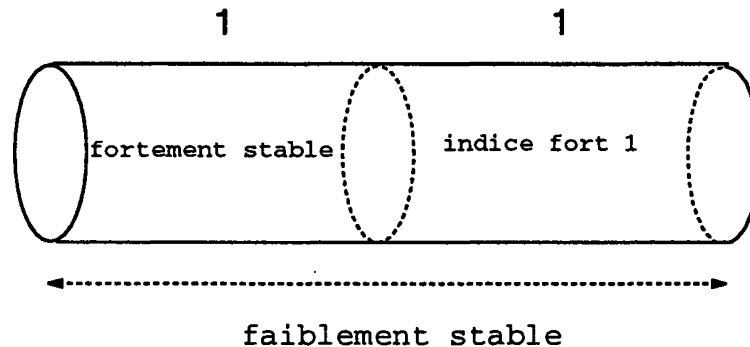
Il en résulte immédiatement que la sphère canonique $\mathbb{S}^n$ est faiblement stable, mais qu'elle a un indice fort égal à 1.

Plus généralement, on a la caractérisation suivante des sphères géodésiques des espaces de courbure constante (voir Barbosa-do Carmo-Eschenburg [2]).

THÉORÈME 1.1. — *Soit $M^n \rightarrow \mathbb{S}_c^{n+1}$ une immersion isométrique d'une variété fermée M , à courbure moyenne constante. Cette immersion est faiblement stable si et seulement si M est une sphère géodésique (totalement ombilicale) de $\mathbb{S}_c^{n+1}$.*

Exemple 2. — Soit $\mathcal{C}_a$ le domaine $[0, a\pi] \times S^1$ du cylindre $\mathbb{R} \times S^1$ plongé naturellement dans $\mathbb{R}^3$. La forme quadratique (5) correspondante est donnée par

$$q(f) = \int_M (|df|^2 - f^2) \nu_M(dx).$$

FIG. 1: *Stabilité pour le domaine $\mathcal{G}_a$*

On peut montrer facilement que $\mathcal{G}_a$ est fortement stable si et seulement si $0 \leq a \leq 1$ et faiblement stable si et seulement si $0 \leq a \leq 2$. Pour $1 < a \leq 2$, l'indice fort de $\mathcal{G}_a$ vaut 1, voir Remarque 3. La propriété de stabilité faible de $\mathcal{G}_a$ pour $a \leq 2$ a été mise en évidence expérimentalement par d'Arcy-Thomson [1].

Ainsi, la bonne notion de stabilité pour les sous-variétés de courbure moyenne constante est celle de stabilité faible.

2. Sur la stabilité des surfaces minimales et des surfaces de courbure moyenne constante

Les résultats ci-dessous illustrent la force d'une hypothèse de stabilité. À noter que les surfaces à courbure moyenne 1 jouent, dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3(-1)$ de courbure -1 , un rôle analogue à celui des surfaces minimales de $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME 2.1. — Soit $M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion minimale complète, fortement stable. Alors M est un plan affine.

THÉORÈME 2.2. — Soit $M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ une immersion complète, de courbure moyenne constante 1, faiblement stable. Alors, M est une horosphère.

THÉORÈME 2.3. — Soit $M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d'une surface à bord, complète, de courbure moyenne $H > 0$, et fortement stable. Alors,

$$\text{dist}(x, \partial M) \leq \frac{\pi}{H}, \quad \forall x \in M.$$

THÉORÈME 2.4. — Soit $M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ une immersion d'une surface à bord, complète, de courbure moyenne constante $H > 1$, et fortement stable. Alors,

$$\text{dist}(x, \partial M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H^2 - 1}}, \quad \forall x \in M.$$

Le Théorème 2.1 a été démontré, de manière indépendante, par do Carmo – Peng, Fischer-Colbrie – Schoen et Pogorelov (voir [8] par exemple). Le Théorème 2.2 est dû à da Silva [11]. Le Théorème 2.3 est dû à Ros-Rosenberg, le Théorème 2.4 à Freire.

Remarque. — Seul le Théorème 2.2 utilise l'hypothèse de stabilité faible, les trois autres supposent la stabilité forte (alors que c'est la stabilité faible que l'on attendrait dans le Théorème 2.4). Nous illustrons ci-dessous comment intervient l'hypothèse de stabilité forte en donnant les grandes lignes de la démonstration du Théorème 2.1.

Idée de la démonstration du Théorème 2.1.

Commençons par un lemme assez général, dû à Glazman dans le cas euclidien et à Fischer-Colbrie – Schoen sur une variété.

LEMME 2.5. — *Soit M une variété riemannienne complète non-compacte et soit $q : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étant donné $D \in M$, notons $\lambda_1(D)$ la plus petite valeur propre de l'opérateur $\Delta + q$ avec condition de Dirichlet dans D . Il est équivalent de dire*

- (1) $\forall D \in M, \quad \lambda_1(D) \geq 0,$
- (2) $\forall D \in M, \quad \lambda_1(D) > 0,$
- (3) $\exists u : M \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive telle que $(\Delta + q)u = 0$.

Démonstration du lemme. — L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) suit de la monotonie des valeurs propres du problème de Dirichlet.

Pour montrer que (2) $\Rightarrow$ (3), on prend $D = B(R)$, une boule géodésique centrée en un point $x_0 \in M$ donné et on résout l'équation $\Delta v_R + q v_R + q = 0$ dans $B(R)$, avec $v_R|_{\partial B(R)} = 0$ (ce qui est possible parce que $\lambda_1(D) > 0$). On pose alors $u_R = v_R + 1$. Si la fonction u_R s'annulait dans $B(R)$, on trouverait un domaine $D_1 \subset B(R)$ dans lequel u_R serait positive et telle que $\Delta u_R + q u_R = 0$, avec $u_R|_{\partial D_1} = 0$. On aurait donc $\lambda_1(D_1) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse. On peut donc poser $w_R(x) = (u_R(x_0))^{-1} u_R(x)$ et cette fonction vérifie $\Delta w_R + q w_R = 0$ dans $B(R)$, $w_R(x_0) = 1$ et $w_R|_{\partial B(R)} > 0$. Faisant tendre R vers l'infini et utilisant l'inégalité de Harnack, on obtient la fonction $u = \lim_{R \rightarrow \infty} w_R$ qui vérifie $\Delta u + q u = 0$ et $u \geq 0$. Le principe du maximum permet ensuite de conclure que $u > 0$.

Pour montrer que (3) $\Rightarrow$ (1), on utilise le fait que $\Delta u + q u = 0$ pour écrire,

$$\int_M (|df|^2 + q f^2) \nu_M(dx) = \int_M |df - f d \ln u|^2 \nu_M(dx) \geq 0,$$

pour toute $f \in C_0^\infty(M)$. □

Démonstration du Théorème 2.1. — La stabilité de l'immersion s'écrit $\Delta - |A|^2 = \Delta + 2K \geq 0$ sur $C_0^\infty(M)$, où K est la courbure de Gauss de M . Il résulte du lemme qu'il existe une fonction u strictement positive sur M telle que $(\Delta + 2K)u = 0$. Cette fonction se remonte au revêtement universel $\tilde{M}$ en une fonction positive qui vérifie la même équation sur $\tilde{M}$. Il en résulte que l'immersion $\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est elle aussi stable. Par ailleurs, la

surface simplement connexe $\tilde{M}$ est conformément équivalente au plan complexe $\mathbb{C}$ ou bien au disque unité $\mathbb{D}$.

Dans le premier cas, on a une fonction $v \geq 0$ sur $\mathbb{C}$ qui vérifie $\Delta v = -2aKv \geq 0$ d'où l'on déduit que v doit être constante et donc que $K \equiv 0$. Dans le second cas, il faut utiliser le résultat suivant (voir [8])

LEMME 2.6. — *Soit $g = ag_e$ une métrique riemannienne conforme à la métrique euclidienne sur le disque $\mathbb{D}$. La courbure de Gauss de la métrique g est donnée par $K_g = \frac{1}{2}\Delta^g \ln a$. Si la métrique g est complète, et pour tout $\alpha \geq 1$, il n'existe pas de solution positive de l'équation $(\Delta^g + \alpha K^g)u = 0$.*

□

Remarque 1. — Comme on l'a vu ci-dessus, l'hypothèse de stabilité forte intervient pour construire une solution positive d'une certaine équation elliptique. L'hypothèse de stabilité faible ne permet pas une telle construction. En effet, la première fonction propre du problème de Dirichlet "tordu" change nécessairement de signe parce qu'elle est d'intégrale nulle. La démonstration du Théorème 2.2 nécessite donc un argument supplémentaire.

Remarque 2. — L'hypothèse de stabilité forte d'un domaine D d'une immersion minimale ou d'une immersion de courbure moyenne constante dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{H}^3$ permet d'obtenir, dans certaines conditions, des estimées de la courbure dans le domaine D . Ces estimées permettent de donner une autre démonstration des Théorèmes 2.1 et 2.2. Voir [10] pour le cas d'une immersion minimale, et [4] pour le cas d'une immersion de courbure moyenne constante.

3. Problème de Dirichlet et problème de Dirichlet "tordu"

Il est utile, pour la théorie des variétés de courbure moyenne constante, de comprendre les relations entre les notions d'indice faible et d'indice fort d'une part, celles de stabilité faible et de stabilité forte d'autre part. Pour cela, il est naturel de se placer dans un cadre général, avec la forme quadratique (6) de la Section 1.2, voir [3].

Cas compact à bord.

Dans le cas où la variété M est compacte à bord (éventuellement vide) nous sommes conduits à comparer les propriétés spectrales de la forme quadratique q sur l'espace $H_0^1(M)$ avec celles de la forme quadratique q sur l'espace $H_{0,T}^1(M) = \{u \in H_0^1(M) \mid \int_M u = 0\}$, c'est-à-dire à comparer les propriétés spectrales du problème de Dirichlet (classique)

$$\begin{cases} (\Delta + b)u = \lambda u, \\ u|_{\partial M} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

avec celles du problème de Dirichlet *tordu*

$$\begin{cases} (\Delta + b)u = \lambda u + \text{Vol}(M)^{-1} \int_M (\Delta + b)u(x) v_M(dx), \\ u|_{\partial M} = 0 \text{ et } \int_M u(x) v_M(dx) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

PROPOSITION 3.1. — *Les valeurs propres $\lambda_j^D(M)$ du problème de Dirichlet classique sur M et les valeurs propres $\lambda_j^T(M)$ du problème de Dirichlet tordu sur M sont entrelacées, plus précisément,*

$$\lambda_1^D(M) < \lambda_1^T(M) \leq \lambda_2^D(M) \leq \lambda_2^T(M) \leq \dots$$

On a en particulier,

$$\text{Ind}_T(M) \leq \text{Ind}(M) \leq \text{Ind}_T(M) + 1. \quad (9)$$

De plus, génériquement par rapport au potentiel b , les valeurs propres des deux problèmes sont simples et strictement entrelacées.

Démonstration. — Les deux premières assertions résultent du min-max. L'assertion de généricité reprend des arguments classiques de perturbations (voir [12]). Nous renvoyons à [3] pour les détails de la démonstration. $\square$

Remarque. — La première inégalité est toujours stricte (cela résulte du fait qu'une première fonction propre pour le problème de Dirichlet classique ne change pas de signe dans le domaine). Des exemples montrent que les autres inégalités sont larges en général et donc que la première valeur propre $\lambda_1^T(M)$ n'est pas nécessairement simple, contrairement à la valeur propre $\lambda_1^D(M)$.

Exemple. — On peut calculer explicitement les valeurs propres des problèmes de Dirichlet classique et tordu pour $-\frac{a^2}{4t^2}$ sur l'intervalle $[0, a]$. On trouve

Pour le problème de Dirichlet classique

$$\frac{k^2 \pi^2}{a^2}, \quad k \geq 1.$$

Pour le problème de Dirichlet tordu

$$\begin{cases} \frac{(2k)^2 \pi^2}{a^2}, & k \geq 1, \\ \frac{4\tau_m^2}{a^2}, & m \geq 1, \end{cases}$$

où les τ_m sont les zéros de $\tan x = x$.

Posons $\alpha_k = \frac{a\sqrt{\lambda_k}}{\pi}$. La figure 2 montre les positions relatives des spectres α_k du problème de Dirichlet classique et du problème de Dirichlet tordu.

Remarque. — Cet exemple permet de déterminer explicitement $\text{Ind}(\mathcal{C}_a)$ et $\text{Ind}_T(\mathcal{C}_a)$ pour le domaine cylindrique $\mathcal{C}_a$ de l'Exemple 2, Section 1.3. Les intervalles

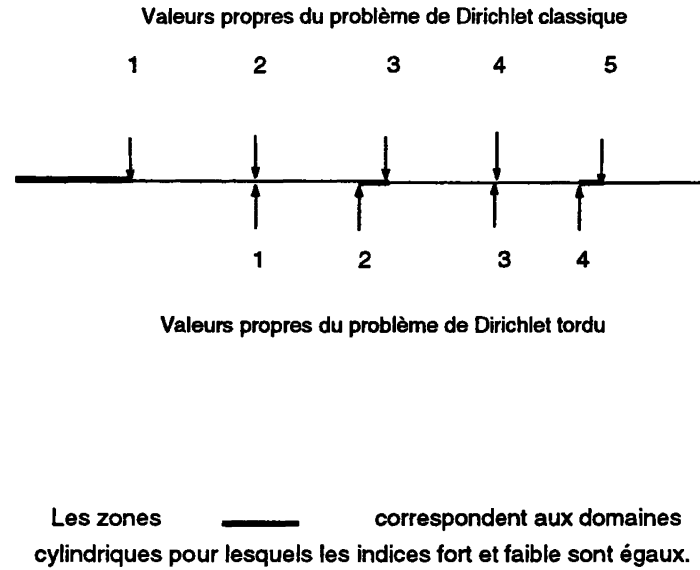


FIG. 2: Valeurs propres du problème de Dirichlet tordu dans un intervalle

en trait gras dans la Figure 2 correspondent aux domaines cylindriques pour lesquels les deux indices sont égaux. On constate que, pour la plupart des domaines cylindriques, les indices fort et faible sont différents.

Cas complet, non-compact.

Il se peut, dans un tel cas, que les indices faible ou fort soient infinis. On a le résultat suivant

PROPOSITION 3.2. — *Supposons que la variété M soit complète non-compacte. Dans ce cas,*

- (a) $\text{Ind}(M) < \infty \iff \text{Ind}_T(M) < \infty$.
- (b) Si $\text{Ind}(M) < \infty$, alors l'opérateur $\Delta + b$ est borné inférieurement sur $\mathcal{D}(M)$.

Démonstration. — La première assertion est une conséquence immédiate de la Proposition 3.1. La deuxième assertion est due à Fischer-Colbrie [7] : si $\text{Ind}(M) < \infty$, la variété M doit être stable en dehors d'un compact K . On peut alors utiliser le Lemme 2.5 et trouver une fonction positive u telle que $(\Delta + q)u = 0$ en dehors de K . Un calcul permet alors de conclure. $\square$

La proposition précédente montre que les deux indices $\text{Ind}(M)$ et $\text{Ind}_T(M)$ sont simultanément finis ou infinis.

Il existe de nombreuses surfaces complètes de courbure moyenne constante pour lesquelles ces indices sont infinis (par exemple les cylindres de $\mathbb{R}^3$ et les onduloïdes de Delaunay dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{H}^3$). Dans ce cas, les indices fort et faible différant d'au plus une unité, on peut se poser la question de leur comportement asymptotique sur une famille exhaustive de domaines relativement compacts, voir [5] pour un résultat dans cette direction.

Il existe aussi de nombreuses surfaces complètes, de courbure moyenne constante $H = 1$ dans $\mathbb{H}^3$, pour lesquelles ces indices sont finis (voir [9] pour des exemples et des estimées de l'indice). Il est naturel dans ce cas de se demander s'il est possible de préciser l'inégalité $\text{Ind}_T(M) \leq \text{Ind}(M) \leq \text{Ind}_T(M) + 1$. On peut démontrer le résultat suivant [3] (à comparer avec la Remarque 3).

THÉORÈME 3.3. — *Soit $M^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion isométrique complète, non-compacte, de courbure moyenne H et telle que $\text{Ind}(M) < \infty$. On a alors*

$$\text{Ind}(M) = \text{Ind}_T(M).$$

En particulier, les deux notions de stabilité forte et de stabilité faible coïncident.

Remarque 1. — Il résulte d'un résultat de da Silveira [11] que la finitude de l'indice dans le cadre du théorème ci-dessus impose que $H \leq 1$.

Remarque 2. — Le Théorème 3.3 est un cas particulier d'un théorème plus général qui s'applique aux opérateurs de la forme $\Delta - b$, où b est une fonction continue positive ou nulle sur une variété M complète de volume infini, et telle qu'il existe une constante C pour laquelle $V(R+1) \leq C V(R)$ où $V(R)$ est le volume de la boule $B(x_0, R)$ ($x_0 \in M$ fixé).

Remarque 3. — Le Théorème 3.3 permet de donner une preuve géométrique du Théorème 2.2, en utilisant les estimées de courbures des surfaces stables, à courbure moyenne constante 1 dans l'espace hyperbolique (voir [4]).

Démonstration. — Plaçons-nous dans la situation générale d'un opérateur de la forme $\Delta - b$ sur une variété complète M , de volume infini, où $b : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive ou nulle. Supposons que les indices $\text{Ind}(M)$ et $\text{Ind}_T(M)$ sont finis. Désignons par L (resp. L_T) l'opérateur $\Delta - b$ avec le domaine $\mathcal{D}(M)$ (resp. avec le domaine $\mathcal{D}_T(M)$). Il résulte de l'hypothèse de volume infini que les deux opérateurs L et L_T sont à domaine dense dans $L^2(M)$, et il résulte d'un lemme de [7] qu'ils sont bornés inférieurement (voir Proposition 3.2). En particulier, ils admettent des extensions de Friedrichs notées L^F et L_T^F . On peut alors montrer que $\text{Ind}(M) = \text{Ind}(L^F)$ et que $\text{Ind}_T(M) = \text{Ind}(L_T^F)$. Si on suppose de plus que M vérifie la propriété $V(R+1) \leq C V(R)$ pour une certaine constante C , on peut également montrer que L et L_T ont même extension de Friedrichs, ce qui démontre l'égalité des indices fort et faible. Nous renvoyons à [3] pour les détails techniques. $\square$

Remarque. — Sous une hypothèse additionnelle sur M , on peut aussi montrer [3] que les opérateurs L et L_T sont essentiellement auto-adjoints dans $L^2(M)$ et qu'ils ont la même extension auto-adjointe (voir également [6] où cette propriété est établie pour certaines hypersurfaces de courbure moyenne 1 dans $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$).

Bibliographie

- [1] D'ARCY-THOMPSON, W. — On growth and form, Cambridge University Press, 1942
- [2] BARBOSA, L., DO CARMO, M., ESCHENBURG, J. — Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, *Math. Z.* 197 (1988), 123–138.
- [3] BÉRARD, P., BARBOSA, L. — Eigenvalue and “twisted” eigenvalue problems, Applications to cmc surfaces, *J. Math. Pures Appl.* 79 (2000), 427–450
- [4] BÉRARD, P., HAUSWIRTH, L. — General curvature estimates for stable H -surfaces immersed into a space form, *J. Math. Pures Appl.* 78 (1999), 667–700
- [5] BÉRARD, P., LIMA, L., ROSSMAN, W. — Index growth of hypersurfaces with constant mean curvature, à paraître dans *Math. Zeitschrift*
- [6] CASTILLON, P. — Spectral properties of constant mean curvature submanifolds in hyperbolic space, *Ann. Global Anal. Geom.* 17 (1999), 563–580
- [7] FISCHER-COLBRIE, D. — On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds, *Inventiones Math.* 82 (1987), 121–132
- [8] FISCHER-COLBRIE, D., SCHOEN, R. — The structure of complete minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33 (1980), 199–211
- [9] LIMA, L., ROSSMAN, W. — Index of constant mean curvature 1-surfaces in $\mathbb{H}^3$, *Indiana Univ. Math. J.* 47 (1998) 685–723.
- [10] SCHOEN, R. — Estimates for stable minimal surfaces in three manifolds, in : E. Bombieri (Ed.), *Seminar on Minimal Submanifolds*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1983
- [11] DA SILVEIRA, A. — Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature, *Math. Ann.* 277 (1987), 629–638.
- [12] UHLENBECK, K. — Generic properties of eigenfunctions, *Amer. J. Math.* 98 (1976), 1059–1078

Pierre BÉRARD
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 UMR 5582 (UJF-CNRS)
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
 Pierre.Berard@ujf-grenoble.fr
 www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/