Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

RICHARD PEREYROL

Volume simplicial des espaces hermitiens symétriques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 81-98

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__81_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **17** (1999) 81–96

VOLUME SIMPLICIAL DES ESPACES HERMITIENS SYMÉTRIQUES

Richard PEREYROL

1. Définition du problème

1.1. Variétés kählériennes

Une structure quasi-complexe sur une variété est un $(1,1)$-tenseur J vérifiant $J^2 = -I$. On remarque que la dimension de la variété est alors nécessairement paire.

On peut alors voir l'espace tangent comme un espace complexe par :

$$(a + ib)X = aX + bJX.$$

Lorsque la variété est complexe, on dispose d'une structure quasi-complexe canonique, qui correspond à la multiplication par i sur l'espace tangent vu comme espace complexe.

Une variété riemannienne (V, g) est dite hermitienne si $g \circ J = g$. Dans ce cas, g est appelée une structure hermitienne.

La donnée de g est alors équivalente à la donnée de ω 2-forme alternée par $\omega(V, W) = g(V, JW)$.

$g + i\omega$ est une métrique hermitienne.

Définition 1.1 (Variété kählérienne). — *Une variété kählérienne est une variété hermitienne $(X, J, g$ ou $\omega)$ telle que $d\omega = 0$.*

La forme ω est appelée la forme de Kähler de X.

Classification math. : 53C23, 53C55.

Exemple : $\mathbb{C}^n$ est une variété kählérienne dont la forme de Kähler est

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_j dz^j d\overline{z}^j.$$

Étant donné une variété kählérienne X, la forme de Kähler définit un cocycle :

$$\text{Si} \quad \sigma \in H_2(X;\mathbb{R}), \ (\omega,\sigma) = \int_\sigma \omega.$$

1.2. Volume simplicial

Si X est un espace topologique, on définit la norme ℓ^1-simpliciale sur $C_m(X)$ par : si $c \in C_m(X)$, $c = \sum_i r_i\sigma_i$, avec σ_i m-simplexes,

$$\|c\|_1 = \sum_i |r_i|.$$

Alors on peut définir une pseudo-norme sur $H_m(X;\mathbb{R})$ par : pour $\alpha \in H_m(X;\mathbb{R})$,

$$\|\alpha\| = \inf\{\|c\|_1 \ ; \ c \text{ représente } \alpha\}.$$

On peut alors donner la définition suivante :

DÉFINITION 1.2 (Volume simplicial). — *Le volume simplicial d'une variété orientée X^n est la norme en le sens ci-dessus de $[X]$, la classe fondamentale de X :*

$$\|X\| = \|[X]\|.$$

1.3. Cohomologie bornée

De manière duale, on définit pour $c \in C^m(X)$ la norme ℓ^∞ par :

$$\|c\|_\infty = \sup\{|c(\sigma)| \ ; \ \sigma \ m-\text{simplexe}\}.$$

La cochaîne c est dite bornée si $\|c\|_\infty < \infty$.

Ensuite, si $\beta \in H^m(X;\mathbb{R})$, on pose :

$$\|\beta\|_\infty = \inf\{\|y\|_\infty \ ; \ y \text{ cocycle représentant } \beta\}.$$

On dit que la classe de cohomologie β est bornée si $\|\beta\|_\infty < \infty$.

On sait minorer le volume simplicial dès que l'on dispose d'une classe bornée de cohomologie non nulle. En effet, si c est bornée, on a :

$$0 < |(c,[X])| \leqslant \|c\|_\infty \|X\|,$$

ce qui donne une minoration du volume simplicial.

Comme on va le voir plus loin, pour certaines variétés kählériennes, la classe $[\omega] \in H^2(X;\mathbb{R})$ est une classe bornée. On en déduit dans ce cas une n-classe bornée à partir de ω en composant ω avec elle-même n fois par le « produit cup » qui est décrit ci-après.

1.4. Produit cup de deux classes de cohomologie

On note Δ_m le m-simplexe standard. Soit p, q deux entiers. Si σ est un $p+q$-simplexe de X, i.e. :

$\sigma \ : \ \Delta_{p+q} \longrightarrow X$, on note :

$\rho \ : \ \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p+q}$ la première p-face de Δ_{p+q}, et

$\varphi \ : \ \Delta_q \longrightarrow \Delta_{p+q}$ la dernière q-face de Δ_{p+q}.

DÉFINITION 1.3 (Produit cup de deux cochaînes). — *Si $c \in C^p(X)$ et $d \in C^q(X)$, on définit leur produit cup $c \cup d \in C^{p+q}(X)$ par :*

$$(c \cup d,\sigma) = (c,\sigma\circ\rho)(d,\sigma\circ\varphi).$$

Le produit cup est bilinéaire.

Ensuite, on veut définir le produit cup sur $H^p(X;\mathbb{R}) \times H^q(X;\mathbb{R})$.

Pour cela, on peut montrer la formule :

$$\delta(c\cup d) = (\delta c \cup d) + (-1)^p(c \cup \delta d).$$

On en déduit

$$(c+\delta c') \cup (d+\delta d') = c\cup d + \delta(c' \cup (d+\delta d')) - (-1)^{p-1} c' \cup (\delta d + \delta\delta d').$$

D'où $(c+\delta c') \cup (d+\delta d') \sim (c \cup d)$, et par suite, le produit cup passe au quotient.

Soit maintenant β et γ deux classes bornées. Si c et d sont deux cocycles bornés les représentant, on a : pour tout σ $(p+q)$-simplexe,

$$\begin{aligned} |(c\cup d,\sigma)| &= |(c,\sigma\circ\rho)(d,\sigma\circ\varphi)| \\ &\leqslant \|c\|_\infty \|d\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\beta \cup \gamma\|_\infty = \|[c \cup d]\|_\infty \leqslant \|c\|_\infty \|d\|_\infty.$$

Par passage à la borne inférieure, on obtient :

PROPOSITION 1.4. — *Si β et γ sont deux classes bornées,*

$$\|\beta \cup \gamma\|_\infty \leqslant \|\beta\|_\infty \|\gamma\|_\infty.$$

On va maintenant décrire une variété kählérienne pour laquelle on va montrer que $[\omega]$ est une classe bornée.

2. L'espace de Siegel $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/U(n)$

2.1. Le demi-plan généralisé de Siegel

On va dans la suite souvent identifier $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\mathbb{C}^n$ par :

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \sim (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n).$$

Soit

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$$

la forme symplectique standard.

$$\Omega(X, Y) = {}^tXJY,$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 2.1 (Groupe symplectique). — *Le groupe symplectique est :*

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tgJg = J\}$$

On va définir une généralisation du demi-plan de Poincaré.

Soit $\mathscr{H} = \{Z \in M_p(\mathbb{C})\,;\, {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z)$ définie positive$\}$, le demi-plan de Siegel.

Alors on vérifie que $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ agit sur $\mathscr{H}$ par :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Le stabilisateur de iI est $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \cap O(2n)$ que l'on peut identifier à $U(n)$ via l'identification $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \cap O(2n) \\ A + iB & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient donc l'espace homogène $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/U(n)$, difféomorphe à $\mathscr{H}$. Sur l'espace $\mathscr{H}$, toutes les métriques invariantes par $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ sont proportionnelles à la métrique $(Z = X + iY)$:

$$\mathrm{Tr}(Y^{-1}dZY^{-1}d\overline{Z}).$$

2.2. Modèle du disque unité généralisé

On peut, à partir de là, généraliser le modèle du disque de Poincaré.

Soit

$$\mathcal{E} = \{W \in M_p(\mathbb{C})\,;\, {}^tW = W,\ I - W\overline{W} > 0\}.$$

On passe de $\mathcal{E}$ à $\mathscr{H}$ par la formule :

$$Z = i(I + W)(I - W)^{-1}.$$

On montre que c'est un difféomorphisme. Pour les détails des calculs, voir [4].

Le modèle du disque est un domaine borné de $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, et donc sa métrique est donnée en chaque point par un potentiel (c'est-à-dire pour tout $P \in \mathscr{H}$ une fonction ϱ_P telle que $dd^{\mathbb{C}}\varrho_P = \omega$) qui vérifie les propriétés suivantes :

a) $\varrho_P(P) = 0$;

b) ϱ_P est invariante par le groupe d'isotropie de P ;

c) $d^{\mathbb{C}}\varrho_P = 0$ sur les géodésiques issues de P.

On note $d^{\mathbb{C}} f$ la forme

$$-i\sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j.$$

L'existence d'un potentiel découle de la théorie des fonctions holomorphes de carré intégrable sur un domaine borné (voir [3]).

La condition a) peut-être imposée très facilement par soustraction d'une constante. Pour la condition b), il suffit de moyenner par le groupe d'isotropie un potentiel quelconque (vérifiant a)).

Enfin, la condition c) est alors automatiquement remplie(cf. [2]).

Il est alors immédiat que $d\omega = ddd^{\mathbf{C}}\varrho_{\mathrm{P}} = 0$, et donc $\mathscr{E}$ est une variété kählérienne. Pour $\mathscr{H}$, on a :

$$\varrho_0 = -\log\det(I - Z^*Z).$$

En effet, calculons ω en 0 :

$$\begin{aligned}
dd^{\mathbf{C}}\varrho_0 &= \frac{1}{2i}d\left(\sum_{i,j}\frac{\partial\varrho_0}{\partial z_{ij}}dz_{ij} - \frac{\partial\varrho_0}{\partial\overline{z_{ij}}}d\overline{z_{ij}}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{i,j,k,\ell}\left(\frac{\partial^2\varrho_0}{\partial z_{k\ell}\partial z_{ij}}dz_{k\ell} + \frac{\partial^2\varrho_0}{\partial\overline{z_{k\ell}}\partial z_{ij}}d\overline{z_{k\ell}}\right)\wedge dz_{ij}\\
&\qquad - \left(\frac{\partial^2\varrho_0}{\partial z_{k\ell}\partial\overline{z_{ij}}}dz_{k\ell} + \frac{\partial^2\varrho_0}{\partial\overline{z_{k\ell}}\partial\overline{z_{ij}}}d\overline{z_{k\ell}}\right)\wedge\overline{dz_{ij}}\\
&= \frac{i}{2}\sum_{i,j,k,\ell} 2\frac{\partial^2\varrho_0}{\partial\overline{z_{k\ell}}\partial z_{ij}}dz_{ij}\wedge d\overline{z_{k\ell}} + \frac{\partial^2\varrho_0}{\partial z_{k\ell}\partial z_{ij}}dz_{ij}\wedge dz_{k\ell} + \frac{\partial^2\varrho_0}{\partial\overline{z_{k\ell}}\partial\overline{z_{ij}}}d\overline{z_{ij}}\wedge d\overline{z_{k\ell}}.
\end{aligned}$$

Mais avec $D\det_A.H = \mathrm{Tr}(\det(A)A^{-1}H)$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_{ij}}(Z^*Z) &= Z^*E_{ij}\\
\frac{\partial}{\partial\overline{z_{ij}}}(Z^*Z) &= E_{ji}Z,
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\overline{z_{ij}}}\det(I - Z^*Z) &= -D\det.\frac{\partial}{\partial\overline{z_{ij}}}(Z^*Z)\\
&= -\det(I - Z^*Z)\,\mathrm{Tr}\left((I - Z^*Z)^{-1}E_{ji}Z\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\varrho_0 &= \mathrm{Tr}\left[(I - Z^*Z)Z^*E_{ij}\right]\\
\frac{\partial}{\partial\overline{z_{ij}}}\varrho_0 &= \mathrm{Tr}\left[(I - Z^*Z)E_{ji}Z\right]
\end{aligned}$$

puis :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial \overline{z_{k\ell}} \partial z_{ij}} &= \mathrm{Tr}\left[(I - Z^*Z)^{-1} E_{ij} Z (I - Z^*Z)^{-1} Z^* E_{ij} + (I - Z^*Z)^{-1} E_{lk} E_{ij}\right] \\
&= \delta_{lj}\delta_{ki} \text{ en } 0 \\
\frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial z_{k\ell} \partial \overline{z_{ij}}} &= \delta_{lj}\delta_{ki} \\
\frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial z_{k\ell} \partial z_{ij}} &= \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial \overline{z_{k\ell}} \partial \overline{z_{ij}}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

On obtient finalement :

$$dd^{\mathbb{C}} \varrho_0 = i \sum_{i,j} dz_{ij} \wedge d\overline{z_{ij}}.$$

Remarque. — On peut vérifier que cette métrique(associée à ω) coïncide avec celle qui provient de $\mathscr{H}$.

2.3. $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) / U(n)$ espace symétrique hermitien

Définition 2.2 (Espace riemannien symétrique). — *Une variété riemannienne est un espace (riemannien) symétrique si tout point est point fixe isolé d'une isométrie involutive (symétrie).*

Pour une variété complexe, on a de plus la notion suivante :

Définition 2.3 (Espace hermitien symétrique). — *Une variété complexe munie d'une structure hermitienne est un espace hermitien symétrique si tout point est point fixe isolé d'une isométrie involutive holomorphe.*

Si M est un espace riemannien symétrique et $p \in M$, on a :

$$M \simeq G/K,$$

où $G = I(M)$ et $K = G_p$. On identifie alors les algèbres de Lie de G et K, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ avec leurs espaces tangents en e. On montre alors que $\mathfrak{g}$ se décompose de la manière suivante (parce que $\mathfrak{g}$ est semi-simple) :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où $\mathfrak{p}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ par rapport à la forme de Killing B, et on a les relations :

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \ [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

De plus, il existe un automorphisme θ de $\mathfrak{g}$ tel que :

$$\theta \mid \mathfrak{k} = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad \theta \mid \mathfrak{p} = -\,\mathrm{id}.$$

Réciproquement, si on dispose d'un groupe de Lie G et d'un sous-groupe K, ainsi que d'un automorphisme analytique dont l'ensemble des points fixes et sa composante neutre encadrent K, on dit qu'on a une paire symétrique (G, K).

Ceci est notamment le cas lorsqu'il existe sur $\mathfrak{g}$ un automorphisme involutif particulier (pour les détails, cf. [3]).

Dans le cas qui nous intéresse, $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ et $K = U(n)$, cet automorphisme est donné par : $X \mapsto JXJ^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,;\, {}^tXJ + JX = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -{}^tX_1 \end{pmatrix} ;\ X_i \in M_n(\mathbb{R}) \,;\, X_2, X_3 \ \text{symétriques} \right\}.
\end{aligned}$$

La métrique sur G/K est donnée en eK par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} ;\ X_i \in M_n(\mathbb{R}) \ \ \text{symétriques} \right\}.$$

Sachant que la forme de Killing est donnée par :

$$B(X, Y) = (2n + 2)\,\mathrm{Tr}(XY)$$

sur $\mathfrak{g}$, on obtient que :

$$B\,|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}\,(X, X) = (4n + 4)\,\mathrm{Tr}({X_1}^2 + {X_2}^2),$$

et est donc bien définie positive. Si $\pi \ : \ G \longrightarrow G/K$, $d\pi \ : \ \mathfrak{g} \longrightarrow T_{eK}M$. On construit la métrique sur M par :

$$\begin{array}{llll}
Q_{eK} = Q_0 \ : & T_{eK}M \times T_{eK}M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & (\tilde{X}, \tilde{Y}) & \longmapsto & B((d\pi)^{-1}\tilde{X}, (d\pi)^{-1}\tilde{Y}).
\end{array}$$

On définit ensuite

$$Q_P = \tau(g^{-1})^*\, Q_0,$$

où $\tau(g)$ est l'application :

$$hK \mapsto ghK.$$

Q_P est bien définie(grâce à l'invariance de B par $\mathrm{Ad}(K)$).

Enfin, la matrice

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

donne par conjugaison par $d\pi$ un endomorphisme A de $T_{eK}M$ de carré $-$ id par lequel Q_0 est invariante.

Alors, la théorie générale (cf. [3]) nous dit que M est munie d'une unique structure quasi-complexe G-invariante J qui coïncide avec A sur $T_{eK}M$; que Q est hermitienne et que M est munie d'une structure complexe compatible avec J ; et enfin M est un espace hermitien symétrique.

De plus, on dit que $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/U(n)$ est du type non-compact car $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}))$ n'est pas compact. (Les domaines symétriques bornés sont tous du type non-compact).

Dans la cas non-compact, il est montré que la courbure sectionnelle se calcule par la formule :

$$K(S) = B([X,Y],[X,Y]),$$

en notant S un 2-plan de $\mathfrak{g}$, et (X,Y) un base orthonormée.

Ainsi, étant donné $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, et le fait que $B\mid_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ est définie négative, on obtient la négativité de la courbure.

Cependant, il y des plats.

DÉFINITION 2.4 (Plat). — *Un plat est une sous-variété totalement géodésique de courbure nulle.*

En identifiant l'espace tangent à M à $\mathfrak{p}$, l'espace tangent à un plat s'identifie à un sous-espace $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{p}$.

D'après la formule pour la courbure sectionnelle

$$K(S) = B([X,Y],[X,Y]),$$

et le fait que $B\mid_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ est non-dégénérée, il apparaît que :

$$\forall X,Y \in \mathfrak{s},\ [X,Y] = 0.$$

Posons la définition suivante :

DÉFINITION 2.5 (Rang). — *Le rang d'un espace espace riemannien symétrique est la dimension maximale de ses plats.*

Le rang est donc la dimension d'un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$. Puisque

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} \ ;\ X_i \in M_n(\mathbb{R}) \text{ symétriques} \right\},$$

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \; ; \; D = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n); \; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

constitue un tel sous-espace.

En effet :

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} DX_1 - X_1 D & = & 0 \\ DX_2 + X_2 D & = & 0 \,. \end{array} \right.$$

Or

$$\left[\mathrm{diag}(\lambda_i), (x_{ij})_{i,j}\right]_{k,\ell} = (\lambda_k, \lambda_\ell) x_{k\ell}$$

et

$$\left(\mathrm{diag}(\lambda_i)(x_{ij})_{i,j} + (x_{ij})_{i,j}\, \mathrm{diag}(\lambda_i)\right)_{k,\ell} = (\lambda_k + \lambda_\ell) x_{k\ell}.$$

Les conditions forcent alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_1 & \text{diagonale} \\ X_2 & = 0 \,. \end{array} \right.$$

Et par conséquent

PROPOSITION 2.6. — *Le rang de l'espace* $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) / U(n)$ *est* n.

3. Estimation de la norme de $[\omega]$

Nous allons nous intéresser à des variétés kählériennes dont la forme de Kähler définit une classe bornée, afin d'estimer sa norme.

Mais tout d'abord, remarquons que le cocycle ω que nous avons défini plus haut :

$$(\omega, \sigma) = \int_\sigma \omega,$$

n'est pas borné. En effet, σ peut s'enrouler plusieurs fois sur lui-même. Il est donc nécessaire de trouver un autre cocycle.

C'est l'objet du premier paragraphe. Ensuite, nous étudierons différents espaces.

3.1. Cochaînes droites - Réduction aux simplexes géodésiques

Soit X une variété kählérienne compacte, et $\widetilde{X}$ son revêtement universel. Dans [1], M.Gromov introduit le complexe des « cochaînes droites » (dans le cas qui nous intéresse, il s'agit de 2-cochaînes). Il s'agit du complexe des fonctions mesurables sur $\widetilde{X}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}$ qui sont invariantes par l'action de $\pi_1(X)$:

$$c(\gamma x_0, \gamma x_1, \gamma x_2) = c(x_0, x_1, x_2), \;\; \forall \gamma \in \pi_1(X), \forall x_i \in \widetilde{X}.$$

On a ainsi des fonctions sur $\pi_1(X)\backslash\tilde{X}^3$.

Lorsque l'on peut définir des simplexes géodésiques (comme par exemple pour les variétés hyperboliques), on a une bijection entre ces (2-)simplexes et $\pi_1(X)\backslash\tilde{X}^3$. Cela revient alors à considérer le cocycle :

$$\sigma \longmapsto \int_{\sigma'} \omega,$$

où σ' est le simplexe σ « redressé ».

Sinon, on a seulement un bijection avec les triangles géodésiques définis à partir des sommets seuls, mais comme ω est fermée, la façon de les remplir n'influence pas le calcul.

En calculant les normes dans ce nouveau complexe, Gromov prouve que l'on obtient les mêmes normes que précédemment. Cela signifie que l'on peut se restreindre lors du calcul de $\|[\omega]\|$ aux triangles géodésiques du revêtement universel.

3.2. L'espace hyperbolique $\mathscr{H}^2$

Dans l'espace hyperbolique, le calcul de l'aire d'un triangle géodésique est assez classique.

On peut se placer dans le demi-plan de Poincaré, on a

$$\mathrm{aire}(T) = \int_T \frac{dxdy}{y^2} = \int_{\partial T} \frac{dx}{y}$$

par la formule de Stokes.

Ensuite, sachant que les côtés du triangle sont des géodésiques, et donc des cercles orthogonaux à l'axe réel, on paramètre sur chaque arc de cercle en coordonnées polaires par rapport aux centres des cercles. On obtient :

$$\mathrm{aire}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

où α, β, γ sont les angles du triangle.

On remarque que l'aire maximale est atteinte par les triangles dits *idéaux*, c'est-à-dire les triangles qui ont leurs trois sommets sur le bord.

Proposition 3.1. — *Si X a pour revêtement universel $\mathscr{H}^2$,*

$$\|[\omega_X]\| \leqslant \pi.$$

3.3. Sur $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$

L'espace $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$ est de rang 2. Il y a donc des plats. Cependant, l'aire des triangles géodésiques est bornée par 2π.

Démonstration. — La forme de Kähler est la somme des deux formes de Kähler de chaque copie de $\mathcal{H}^2$:

Si z_1 est la coordonnée sur le premier facteur et z_2 celle sur le second, la forme de Kähler sur le produit est donnée par :

$$\frac{i}{2}\sum_{i,j} \tilde{G}_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

$\tilde{G}$ est la métrique sur le produit : c'est le bloc diagonal

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

G étant la métrique sur $\mathcal{H}^2$. Ainsi, les termes croisés disparaissent.

On a donc, pour tout triangle géodésique T :

$$\begin{aligned} \int_T \omega &= \int_T \omega_1 + \int_T \omega_2 \\ &= \int_{\pi^1(T)} \omega_1 + \int_{\pi^2(T)} \omega_2 \\ &\leqslant 2\pi \end{aligned}$$

(où π^i sont les projections sur chacun des facteurs) puisque $\pi^1(T)$ et $\pi^2(T)$ sont des triangles géodésiques. □

Remarque. — Cela se généralise aisément à tous les produits.

3.4. L'espace $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) / U(n)$

Nous allons faire un calcul dans

$$D_{p,q} = \{Z \in M_{p,q}\mathbb{C}\,;\, I - Z^* Z > 0\},$$

pour $p \leqslant q$. Il s'agit du domaine $I_{p,q}$ dans la classification des domaines symétriques irréductibles de Cartan (*AIII* dans [3]). On peut faire un calcul pour $\mathcal{E}$ qui est très similaire ou bien utiliser le résultat pour $D_{p,q}$ (c'est l'espace III_p, ou *CI* dans [3]). Ces deux espaces sont de rang p.

La preuve est issue de [2].

$D_{p,q}$ peut être vu comme la sous-variété ouverte de la Grassmannienne $G(p,q)$ des p-plans complexes de $\mathbb{C}^{p+q} = \{(u,v); u \in \mathbb{C}^p, v \in \mathbb{C}^q\}$ sur laquelle la forme hermitienne $|u|^2 - |v|^2$ est définie positive à travers l'application :

$$\begin{array}{ccc} D_{p,q} & \longrightarrow & G(p,q) \\ Z & \longmapsto & \{(u, Zu) ; u \in \mathbb{C}^p\} \end{array}$$

Ce modèle pour $D_{p,q}$ permet de voir plus facilement que $SU(p,q)$ agit transitivement dessus, par :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} SU(p,q) \quad = \quad & \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(p+q, \mathbb{C}) ; \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Pour l'espace III_p, i.e. $\mathcal{E}$ on peut le modéliser par les lagrangiens de $\mathbb{C}^{2n}$ sur lesquels la forme hermitienne $|u|^2 - |v|^2$ est définie positive.

Il faut alors remplacer $SU(p,q)$ par $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap SU(n,n)$ et l'action par :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \cdot Z = (AZ+B)(\overline{B}Z+\overline{A})^{-1}.$$

Nous allons maintenant montrer la

PROPOSITION 3.2. — *Si Δ est un triangle géodésique dans $D_{p,q}$ ($\mathcal{E}$), alors*

$$\int_\Delta \omega = \arg \frac{\overline{\det(I - Z^*{}_0 Z)}}{\det(I - Z^*{}_0 Z)}$$

Démonstration. — Tout d'abord, nous allons relier $\int_\Delta \omega$ au potentiel de Bergmann.

Pour un triangle géodésique de sommets P, Q, R, on a :

$$\int_\Delta \omega = \int_\Delta dd^{\mathbb{C}} \varrho_P = \int_{\partial\Delta} d^{\mathbb{C}} \varrho_P = \int_{\gamma(Q,R)} d^{\mathbb{C}} \varrho_P,$$

puisque $d^{\mathbb{C}} \varrho_P = 0$ sur les géodésiques issues de P. $\gamma(Q,R)$ désigne le segment géodésique de Q à P.

Maintenant, en posant $h_{PQ} = \varrho_P - \varrho_Q$, on obtient une fonction pluri-harmonique (c'est-à-dire $dd^{\mathbb{C}} h_{PQ} = 0$). Et donc h_{PQ} est la partie réelle d'une fonction holomorphe H_{PQ}. Soit k_{PQ} sa partie imaginaire.

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma(Q,R)} d^{\mathbb{C}} \varrho_P &= \int_{\gamma(Q,R)} d^{\mathbb{C}} (h_{PQ} - \varrho_Q) \\
&= \int_{\gamma(Q,R)} d^{\mathbb{C}} h_{PQ} \qquad \text{car } d^{\mathbb{C}} \varrho_Q = 0 \text{ sur } \gamma(Q,R) \\
&= -i \sum_{k,\ell} \frac{\partial h_{PQ}}{\partial z_{k\ell}} dz_{k\ell} - \frac{\partial h_{PQ}}{\partial \overline{z_{k\ell}}} d\overline{z_{k\ell}} \\
&= -i \sum_{k,\ell} i \frac{\partial k_{PQ}}{\partial z_{k\ell}} dz_{k\ell} + i \frac{\partial k_{PQ}}{\partial \overline{z_{k\ell}}} d\overline{z_{k\ell}} \\
&\qquad \text{(par les équations de Cauchy-Riemann)} \\
&= \int_{\gamma(Q,R)} dk_{PQ} \\
\int_{\gamma(Q,R)} d^{\mathbb{C}} \varrho_P &= k_{PQ}(R) - k_{PQ}(Q)
\end{aligned}
$$

Maintenant, soit Z_0 et Z. Pour calculer ϱ_{Z_0}, utilisons l'élément de $SU(p,q)$ qui envoie Z_0 sur 0 :

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I - Z_0 Z_0^*)^{-1/2} & -(I - Z_0 Z_0^*)^{-1/2} Z_0 \\ -Z_0^* (I - Z_0 Z_0^*)^{-1/2} & (I - Z_0^* Z_0)^{-1/2} \end{pmatrix}.
$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\varrho_{Z_0} &= -\log\det\Big(I - \big[(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\big]^* (AZ+B)(CZ+D)^{-1}\Big) \\
&= -\log\det\Big((CZ+D)^{*-1}(CZ+D)^*(CZ+D)(CZ+D)^{-1} \\
&\qquad -(CZ+D)^{*-1}(AZ+B)^*(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\Big) \\
&= \log|\det(CZ+D)|^2 \\
&\qquad -\log\det\Big((CZ+D)^*(CZ+D) - (AZ+B)^*(AZ+B)\Big) \\
&= \log|\det(CZ+D)|^2 + \varrho_0.
\end{aligned}
$$

car

$$
\forall Z \in SU(p,q),\ (CZ+D)^*(CZ+D) - (AZ+B)^*(AZ+B) = I - Z^* Z.
$$

Mais alors,

$$
h_{0Z_0} = -\log|\det(CZ+D)^{-2}| = \mathrm{Re}(\log\det(CZ+D)^{-2}).
$$

Donc

$$k_{0Z_0} = \operatorname{Im}(\log\det(CZ+D)^{-2}),$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_\Delta \omega &= \arg\det(CZ+D)^{-2}\Big|_{Z_0}^{Z}\\ &= \arg\frac{\det\overline{(CZ+D)}}{\det(CZ+D)}\Bigg|_{Z_0}^{Z}\\ &= \arg\frac{\det\overline{(I+D^{-1}CZ)}}{\det(I+D^{-1}CZ)}\Bigg|_{Z_0}^{Z}\end{aligned}$$

Mais on a :

$$D^{-1}CZ = -(I-Z_0^*Z_0)^{1/2}Z_0^*(I-Z_0^*Z_0)^{-1/2}Z = -Z_0^*Z.$$

(Z_0^* commute avec les fonctions analytiques en Z_0^*).

Finalement,

$$\int_\Delta \omega = \arg\frac{\det\overline{(I-Z_0^*Z)}}{\det(I-Z_0^*Z)}\Bigg|_{Z_0}^{Z} = \arg\frac{\det\overline{(I-Z_0^*Z)}}{\det(I-Z_0^*Z)}.$$

Puisque $Z_0^*Z \in D_{p,p}$, ses valeurs propres λ_i sont de module strictement plus petit que 1, et donc on a :

$$\left|\int_\Delta \omega\right| = \left|\sum_{j=1}^{p}\arg\frac{1-\overline{\lambda_j}}{1-\lambda_j}\right| < p\pi.$$

En fait le résultat est montré aussi pour les domaines du type III_p, puisqu'ils se plongent de manière totalement géodésique dans $D_{p,q}$.

Ceci prouve

$$\|[\omega]\|_\infty \leqslant p\pi$$

pour toutes les variétés compactes dont le revêtement universel est un de ces domaines. □

Valeur exacte de la norme. — On a en fait :

PROPOSITION 3.3. —

$$\|[\omega]\|_\infty = p\pi$$

Démonstration. — La valeur de $\|[\omega_X]\|_\infty$ ne dépend pas du quotient compact X (il suffit de relever les simplexes sur le revêtement universel). Il suffit donc de construire un exemple pour lequel on établisse l'égalité.

Pour cela, on va utiliser une construction arithmétique.

On représente $D_{p,q}$ comme l'ouvert de $G(p, q)$ sur lequel la forme

$$H = |u|^2 - \sqrt{2}|v|^2$$

est définie positive. Alors, si $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, le groupe

$$\Gamma = SL(p+q, \mathcal{O}) \cap SU(H)$$

est co-compact dans $SU(H)$, qui est isomorphe au groupe d'automorphismes de $D_{p,q}$.

On représente de même le disque unité de $\mathbb{C}$ (cela correspond au cas $p = q = 1$), avec $H_1 = dx^2 - \sqrt{2}dy^2$.

Soit f l'application :

$$\begin{array}{ccc} D_{1,1} & \longrightarrow & D_{p,q} \\ z & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \\ \hline & 0 & \end{array}\right) \end{array}$$

Alors f est une application totalement géodésique, et son image est de courbure $-\frac{1}{p}$. En effet, la métrique de Bergmann donne :

$$-\log(1 - |z|^2)^p = -p\log(1 - |z|^2)$$

sur l'image. Cette métrique est celle du plan hyperbolique multipliée par p.

Comme plus haut, on a un groupe isomorphe à $SU(H_1)$ qui stabilise $f(D_{1,1})$. On obtient un sous-groupe co-compact dans $SU(H_1)$ en posant

$$\Gamma_1 = SL(2, \mathcal{O}) \cap SU(H_1).$$

On prend maintenant des quotients compacts des domaines $D_{1,1}$ et $D_{p,q}$ à l'aide de sous-groupes Γ_1' et Γ' d'indice fini sans torsion de Γ_1 et Γ (pour avoir des variétés). Posons $S = \Gamma_1' \backslash D_{1,1}$ et $X = \Gamma' \backslash D_{p,q}$. Soit g le genre de la surface de Riemann compacte S.

L'application f passe au quotient en :

$$f : S \to X.$$

Alors, en notant ω la forme de Kähler sur X, la forme $f^*\omega$ est la forme de Kähler d'une métrique de courbure constante $-\frac{1}{p}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_S f^*\omega &= p\int_S \frac{1}{p} f^*\omega \\ &= -p\int_S -K\,dA \\ &= 4\pi p(g-1).\end{aligned}$$

par la formule de Gauss-Bonnet.

On a alors :

$$\left|\int_S f^*\omega\right| = |(f^*[\omega_X],[S]| \leqslant \|f^*[\omega_X]\|\|[S]\|_1 \leqslant \|[\omega_X]\|\|[S]\|_1 \leqslant 4p\pi(g-1).$$

Ainsi, puisque les termes extrémaux sont égaux, on a l'égalité :

$$\|[\omega_X]\|_\infty = p\pi.$$

□

4. Retour au volume simplicial

Dans certains, on connaît la valeur du volume simplicial. Par exemple, pour les variétés hyperboliques, on montre que

$$\|X\| = \frac{\mathrm{vol}(X)}{v_n},$$

où v_n est le volume commun des simplexes idéaux réguliers, qui est le volume maximal pour les simplexes géodésiques (voir [5]).

Un simplexe géodésique de $\mathbf{H}^n$ est dit idéal si les sommets sont à l'infini. Il est dit régulier si toute permutation des sommets peut être réalisée par une isométrie.

La preuve de l'égalité ci-dessus utilise une « triangulation » de la variété obtenue en moyennant un simplexe idéal régulier par un quotient compact du groupe d'isométries (voir [5]) :

Si $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ et $X = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n$, on utilise

$$\int_{\Gamma\backslash G} \pi(g\sigma)\,dg,$$

où π est la projection de $\mathbf{H}^n$ sur X.

En fait, pour cela, on a généralisé la notion de chaîne.

Le problème est d'obtenir une telle égalité dans le cas général des espaces hermitiens symétriques. Pour cela, on voudrait :

- d'une part calculer la norme $\|\omega^n\|_\infty$ explicitement, et donc trouver les simplexes qui généralisent les simplexes idéaux réguliers, sachant que contrairement au cas hyperbolique, les faces ne sont plus nécessairement des sous-variétés totalement géodésiques ;
- d'autre part trouver une triangulation optimale qui réalise l'égalité.

Bibliographie

[1] M. Gromov : *Volume and bounded cohomology*, Publ. IHES **56** (1982), 5–100.

[2] A. Domic, D. Toledo : *The Gromov norm of the Kähler class of symmetric domains*, Math. Ann. **276** (1987), 425–432.

[3] S. Helgason : *Differential Geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York 1978.

[4] C.L. Siegel : *Symplectic geometry*, Academic Press, New York-London 1964.

[5] U. Haagerup, H.J. Munkholm : *Simplicies of maximal volume in hyperbolic n-space*, Act. Math. **1941** (1981), 1–11.

Richard PEREYROL
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)