Gilles Courtois

Des questions de stabilité

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 159-162
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__159_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 17 (1999) 159–162

DES QUESTIONS DE STABILITÉ

Gilles COURTOIS

Soit (X^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension n dont la courbure de Ricci satisfait $\mathrm{Ric}(g) \geq (n-1)g$. Le théorème Bishop dit que le volume $\mathrm{vol}(X^n, g)$ de (X^n, g) vérifie

$$\mathrm{vol}(X^n, g) \leq \mathrm{vol}(S^n, g_0)$$

où (S^n, g_0) est la sphère ronde telle que $\mathrm{Ric}(g_0) = (n-1)g_0$ et l'égalité a lieu si et seulement si (X^n, g) est isométrique à (S^n, g_0).

Récemment, J. Cheeger et T. Colding ont montré que le cas d'égalité ci-dessus est stable dans le sens suivant, (cf. [5], [6]).

THÉORÈME. — *Il existe $\varepsilon(n) > 0$ tel que si (X^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n vérifiant $\mathrm{Ric}(g) \geq (n-1)g$ et $\mathrm{vol}(X^n, g) \geq (1-\varepsilon(n))\,\mathrm{vol}(S^n, g_0)$, alors X^n est difféomorphe à S^n et (X^n, g) est Gromov-Hausdorff proche de (S^n, g_0).*

Les variétés compactes de courbure sectionnelle constante négative sont aussi des extremum stricts d'invariants riemanniens. Par exemple on définit l'entropie d'une variété riemannienne compacte (Y^n, g) par

$$h(g) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{vol}\, B(y, R)$$

où $B(y, R)$ est la boule géodésique de rayon R dans le revêtement universel de Y^n centrée en un point arbitraire et on a (cf. [2], [3]) :

THÉORÈME 1. — *Soit (X^n, g_X) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ de courbure sectionnelle constante $K_{g_X} = -1$ et Y^n une variété homéomorphe à X^n. Alors*

$$h(g)^n \,\mathrm{vol}(Y^n, g) \geq h(g_X)^n \,\mathrm{vol}(X^n, g_X)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si (Y^n, g) est homothétique à (X^n, g_X)

Classification math. : 53C20, 53B21, 53C35.

THÉORÈME 2. — *Soit (X^n, g_X) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ de courbure sectionnelle constante $K_{g_X} = -1$ et Y^n une variété homéomorphe à X^n. Alors pour toute métrique g sur Y^n dont la courbure sectionnelle vérifie $K_g \leq -1$, on a*

$$\mathrm{vol}(Y^n, g) \leq \mathrm{vol}(X^n, g_X)$$

et le cas d'égalité a lieu si st seulement si (Y^n, g) est isométrique à (X^n, g_X).

Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème de comparaison de Rauch.

THÉORÈME 3. — *Soit (Y^n, g) une variété compacte dont la courbure sectionnelle vérifie $K_g \leq -1$. Alors*

$$h(g) \geq n - 1$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $K_g = -1$.

On peut se demander si les propriétés d'extremum dans les théorèmes 1, 2, 3 sont stables.

QUESTION 1. — Soit (X^n, g_X) une variété compacte de courbure constante négative et Y^n une variété homéomorphe à X^n. Existe-t-il $\varepsilon =: \varepsilon(n) > 0$ (ou $\varepsilon =: \varepsilon(X) > 0$) tel que si une métrique g sur Y^n satisfait $h(g)^n \mathrm{vol}(Y^n, g) \leq (1 + \varepsilon) h(g_X)^n \mathrm{vol}(X^n, g_X)$ alors Y^n est difféomorphe à X^n et (Y^n, g) est Gromov-Hausdorff proche de (X^n, g_X)?

QUESTION 2. — Soit (X^n, g_X) une variété compacte de courbure constante négative et Y^n une variété homéomorphe à X^n. Existe-t-il $\varepsilon =: \varepsilon(n) > 0$ (ou $\varepsilon =: \varepsilon(X) > 0$) tel que que si une métrique g sur Y^n de courbure $K_g \leq -1$ satisfait $\mathrm{vol}(Y^n, g) \geq (1 - \varepsilon) \mathrm{vol}(X^n, g_X)$ alors Y^n est difféomorphe à X^n et (Y^n, g) est Gromov-Hausdorff proche de (X^n, g_X)?

QUESTION 3. — Soit (X^n, g_X) une variété compacte de courbure constante négative et Y^n une variété homéomorphe à X^n. Existe-t-il $\varepsilon =: \varepsilon(n) > 0$ (ou $\varepsilon =: \varepsilon(X) > 0$) tel que que si une métrique g sur Y^n de courbure $K_g \leq -1$ satisfait $h(g) \leq (1 + \varepsilon)(n - 1)$ alors Y^n est difféomorphe à X^n et (Y^n, g) est Gromov-Hausdorff proche de (X^n, g_X)?

Remarque. — Si la réponse à la question 2 est affirmative, il en est de même pour la question 3. En effet, sous les hypothèses de la question 3, le théorème 2 entraîne

$$(n-1)^n \mathrm{vol}(X^n, g_X) \leq h(g)^n \mathrm{vol}(Y^n, g) \leq (n-1)^n (1 + \varepsilon) \mathrm{vol}(Y^n, g)$$

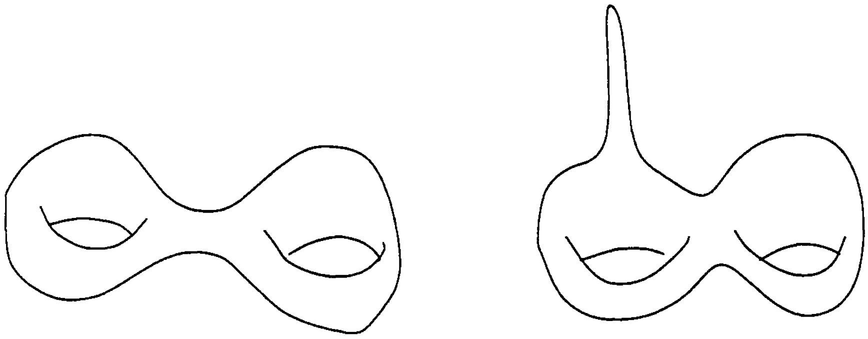
ce qui implique

$$\mathrm{vol}(Y^n, g) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \mathrm{vol}(X^n, g_X).$$

Exemple. — En dimension $n \geq 5$, F.T. Farell et L.E. Jones ont construit une famille dénombrable de variétés riemanniennes (Y_i, g_i) telle que chaque Y_i est homéomorphe et non difféomorphe à une variété hyperbolique X_i et telle que la courbure sectionnelle K_{g_i} vérifie $-1 - \varepsilon_i \leq K_{g_i} \leq -1$ où $\lim \varepsilon_i = 0$. Ces exemples montrent que la réponse à la question 2 est négative avec $\varepsilon = \varepsilon(n)$. En effet, avec l'hypothèse sur K_{g_i} l'entropie de g_i vérifie $h(g_i) = (n-1)(1-\alpha_i)$ où $\lim \alpha_i = 0$ et le théorème 1 entraîne

$$(n-1)^n \operatorname{vol}(X_i, g_{X_i}) \leq h(g_i)^n \operatorname{vol}(Y_i, g_i) = (n-1)^n (1+\alpha_i)^n \operatorname{vol}(Y_i, g_i).$$

Dans ces questions de stabilité, une borne sur la courbure semble être une hypothèse nécessaire. En effet, I. Babenko a montré que l'entropie minimale d'une variété compacte Y^n de dimension n définie par $\operatorname{minent}(Y^n) = \inf[h(g)^n \operatorname{vol}(Y^n, g), g$ métrique sur $Y^n]$ est un invariant d'homotopie, ce qui montre la non-stabilité différentiable dans la question 1. En fait il n'y a pas non plus de stabilité métrique dans la question 1 car il est possible de construire sur une variété hyperbolique (X, g_X) une métrique g conforme à g_X telle que $|h(g) - h(g_X| < \varepsilon$ et $|\operatorname{vol}(X, g) - \operatorname{vol}(X, g_X)| \leq \varepsilon$ bien que (X, g) ne soit pas Gromov-Hausdorff proche de (X, g_X).



(X, g_X) (X, g)

Si on se donne des hypothèses de pincement sur la courbure sectionnelle, on dispose alors des théorèmes de compacité.

Le volume minimal d'une variété compacte Y est défini par

$$\operatorname{minvol} X = \inf \operatorname{vol}(Y, g)$$

où g parcourt l'ensemble des métriques sur Y dont la courbure sectionnelle satisfait $|K_g| \leq 1$. On a (cf. [2]) :

THÉORÈME. — *Soit (X^n, g_X) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ de courbure sectionnelle constante $K_{g_X} = -1$ et Y^n une variété homéomorphe à X^n. Alors pour toute métrique g sur Y^n dont la courbure sectionnelle vérifie $|K_g| \leq 1$, on a*

$$\operatorname{vol}(Y^n, g) \geq \operatorname{vol}(X^n, g_X)$$

et le cas d'égalité a lieu si et seulement si (Y^n, g) est isométrique à (X^n, g_X).

Dans [1], L. Bessières a prouvé le

THÉORÈME. — *Soit (X^n, g_X) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ de courbure sectionnelle constante $K_{g_X} = -1$ et Y^n une variété homéomorphe et non difféomorphe à X^n. Alors* minvol $Y \geq (1 + \varepsilon(X^n)) \operatorname{vol}(X^n, g_X)$ *où $\varepsilon(X^n)$ est une constante positive.*

Une autre situation où la compacité s'applique est le résultat suivant dû à M. Gromov (cf. [8]) :

THÉORÈME. — *Pour $n \geq 4$ et $V > 0$ il existe $\varepsilon(n, V) > 0$ tel que pour toute variété riemannienne compacte (Y^n, g) de dimension $n \geq 4$ dont la courbure sectionnelle satisfait $-1 - \varepsilon(n) \leq K_g \leq -1$ et le volume $\mathrm{vol}(Y^n, g) \leq V$, alors Y^n est hyperbolique.*

QUESTION 4. — Existe-t-il $\varepsilon(n, V)$ tel que pour toute variété riemannienne compacte (Y^n, g) de dimension n dont la courbure sectionnelle, le volume et l'entropie satisfont $K_g \leq -1$, $\mathrm{vol}(Y^n, g) \leq V$, et $h(g) \leq (n-1)(1+\varepsilon(n, V))$, alors Y^n est hyperbolique?

Il serait intéressant de tester cette question sur les exemples de Farell-Jones cités plus haut ou sur les exemples M. Gromov et W. Thurston. Rappelons que ces derniers sont des revêtements ramifiés au-dessus de variétés hyperboliques le long de sous-variétés compactes totalement géodésiques de codimension 2.

QUESTION 5. — Soit Y^n une variété compacte de dimension n fixée, et $C > 0$, $V > 0$ deux constantes positives. L'ensemble des métriques riemanniennes g sur Y^n telles que $K_g \leq -1$, $\mathrm{vol}(Y^n, g) \leq V$ et $h(g) \leq C$ est-il relativement compact?

QUESTION 6. — Soit (X, g) une variété compacte de courbure sectionnelle négative. L'ensemble des métriques à courbure sectionnelle négative h sur X dont le flot géodésique est conjugué à celui de g est-il relativement compact?

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BESSIÈRES. — *Un théorème de rigidité différentielle*, Comment. Math. Helv. **73** (3) (1998), 443–479.

[2] G. BESSON-G. COURTOIS-S. GALLOT. — *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Gafa **5** (1995), 731–799.

[3] G. BESSON-G. COURTOIS-S. GALLOT. — *Lemme de Schwarz réel et applications géométriques*, à paraître Acta Math., 1999.

[4] G. BESSON-G. COURTOIS-S. GALLOT. — *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **16** (1996), 623–649.

[5] J. CHEEGER-T. COLDING. — *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below*, J. Diff. Geom. **46** (1997), 406–480.

[6] T. COLDING. — *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 175–191.

[7] F.T. FARELL-L.E. JONES. — *Negatively curved manifolds with smooth exotic structures*, J. Amer Math Soc **2** (4) (1989), 899–908.

[8] M. GROMOV. — *Manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. **13** (1978), 223–230.

[9] M. GROMOV-W. THURSTON. — *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, Invent. Math. **89** (1987), 1–12.

Gilles COURTOIS
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Centre de Mathématiques
URA 169 du CNRS
91128 PALAISEAU Cedex (France)