Frank Pacard

Construction de surfaces à courbure moyenne constante

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 139-157
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__139_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **17** (1999) 139–157

CONSTRUCTION DE SURFACES À COURBURE MOYENNE CONSTANTE

Frank PACARD

1. Introduction

Les méthodes de recollement pour construire des surfaces à courbure moyenne constante sont maintenant bien comprises et ont déjà été utilisées à plusieurs reprises pour construire de nouvelles surfaces qui, en l'état actuel de nos connaissances, n'auraient pas pu être construites par d'autres méthodes.

Les premiers résultats ont été obtenus à la fin des années 80 par N. Kapouleas [5], qui a adapté aux surfaces à courbure moyenne constante, une méthode de recollement mise au point par R. Schoen dans le cadre du problème de Yamabe singulier [12]. Récemment, R. Mazzeo, D. Pollack et moi même avons proposé un nouveau schéma qui permet d'obtenir aisément tous ces résultats de recollement. Bien que les lignes directrices de notre construction soient parallèles aux lignes directrices de la construction initiale de R. Schoen, notre méthode présente des nouveaux aspects qui permettent de mieux comprendre la construction. En particulier, l'utilisation intensive des espaces de Hölder à poids permet de donner un cadre fonctionnel naturel à ces problèmes. De plus, notre méthode permet de souligner le rôle prépondérant que semble jouer la fonction de Green dans toutes ces constructions. Enfin, notre construction permet d'aborder le problème de la non dégénérescence des surfaces construites, notion qui semble avoir de plus en plus d'importance en vue de la compréhension des espaces de solutions [4], [7] [11].

Afin d'illustrer notre propos, nous décrirons dans le paragraphe suivant un résultat type qui peut être obtenu par notre méthode. Ensuite, nous esquisserons la construction que nous proposons en mettant tout particulièrement l'accent sur les points originaux. Des applications à l'étude des surfaces à courbure moyenne constante non compactes, complètes seront ensuite données.

Classification math.: 53A10, 49Q05

2. Désingularisation de surfaces à courbure moyenne constante

Donnons pour commencer une application de notre méthode dans un cadre simple. Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces compactes à bord de $\mathbb{R}^3$, qui sont orientables et immergées.

On suppose que $0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ et que les plans tangents à Σ_1 et Σ_2 au point 0 soient tous deux égaux au plan $x\,y$. Définissons maintenant l'orientation sur ces deux surfaces de telle sorte que ν_1, le vecteur normal à Σ_1, soit égal à $(0, 0, 1)$ au point 0 et ν_2, le vecteur normal à Σ_2, soit égal à $(0, 0, -1)$ au point 0. Ces orientations étant définies, on suppose que les deux surfaces ont la même courbure moyenne H_0 qui est supposée constante, non nulle, sur chaque surface. En effectuant une dilatation, si cela s'avère nécessaire, on se ramène alors aux deux cas suivants : $H_0 = 1$ ou $H_0 = -1$.

Sous ces hypothèses, on montre que l'on peut *désingulariser* $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, c'est à dire que l'on peut trouver une famille à un paramètre de surfaces à courbure moyenne constante qui converge vers la surface singulière $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Avant d'énoncer notre résultat, précisons quelques notations et définitions. Soit Σ une surface compacte à bord de $\mathbb{R}^3$, que l'on suppose orientée. On note ν le vecteur normal à Σ. Alors, au moins localement, toute surface Σ' proche de Σ peut être décrite comme étant un graphe normal sur Σ, c'est à dire qu'il existe une fonction w, définie sur Σ, telle que

$$\Sigma \ni p \longrightarrow p + w(p)\,\nu(p) \in \Sigma',$$

décrit Σ'. La courbure moyenne de Σ', notée $H_{\Sigma'}$, se calcule en fonction de la courbure moyenne de Σ, notée H_Σ, et de la fonction w. Au premier ordre, on trouve que

$$H_{\Sigma'} = H_\Sigma + (\Delta_\Sigma w + |\mathbf{A}_\Sigma|^2\, w) + \mathcal{O}(\|w\|_{\mathcal{C}^2}).$$

où $\mathbf{A}_\Sigma$ désigne la deuxième forme fondamentale de Σ. L'opérateur $\Delta_\Sigma + |\mathbf{A}_\Sigma|^2$ qui apparaît dans cette formule est appelé opérateur de Jacobi de Σ. Par exemple, si Σ est inclus dans une sphère, l'opérateur de Jacobi de Σ est donné par

$$\Delta_{S^2} + 2.$$

Par définition, la surface Σ est dite *non dégénérée* s'il n'existe aucun champ de Jacobi sur Σ qui s'annule sur $\partial\Sigma$. C'est à dire que si $w : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de

$$\Delta_\Sigma w + |\mathbf{A}_\Sigma|^2 w = 0, \qquad \text{et si} \qquad w|_{\partial\Sigma} = 0,$$

alors $w = 0$.

On remarque qu'un hémisphère (par exemple l'hémisphère nord) est une surface à courbure moyenne constante, dégénérée. En effet, si Σ est l'hémisphère nord, on voit que $w(x, y, z) := z/r$ est un champ de Jacobi qui s'annule sur le bord de Σ.

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 1 ([9]). — *Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces compacte à bord, immergées, orientables, non dégénérées et à courbure moyenne constante. Supposons que ces deux surfaces sont positionnées et orientées comme indiqué ci-dessus et qu'elles ont la même courbure moyenne H_0. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $(S_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ une famille à un paramètre de surfaces, telles que :*

1. *Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, la surface S_ε est immergée, à courbure moyenne constante égale à H_0.*
2. *Il existe τ un déplacements de $\mathbb{R}^3$, qui dépend de ε, tel que $\partial S_\varepsilon = \partial\Sigma_1 \cup \tau(\partial\Sigma_2)$.*
3. *Pour tout $R > 0$, la suite de surfaces $S_\varepsilon \cap [\mathbb{R}^3 \setminus B_R]$ converge vers $[\Sigma_1 \cup \Sigma_2] \cap [\mathbb{R}^3 \setminus B_R]$ et la suite ∂S_ε converge vers $\partial\Sigma_1 \cup \partial\Sigma_2$ quand ε tend vers 0, pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$.*
4. *La suite de surfaces dilatées $\varepsilon^{-1} S_\varepsilon$ converge sur tout compact de $\mathbb{R}^3$, vers un caténoïde d'axe vertical, quand ε tend vers 0, toujours pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$.*

Le résultat que nous obtenons est en fait légèrement plus fort que celui que nous avons énoncé ci-dessus. En effet, on trouve non pas une mais deux familles géométriquement distinctes de surfaces qui désingularisent $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. La deuxième famille est obtenue en échangeant le rôle joué par Σ_1 et Σ_2, ce qui correspond à modifier H_0 en $-H_0$. En particulier si $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \setminus \{0\}$ est une surface plongée, alors les surfaces de l'une des deux familles de surfaces désingularisées sont elles aussi plongées pour ε assez petit.

De plus, nous obtenons des informations précises sur la vitesse de convergence de S_ε vers $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Nous montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathrm{dist}(S_\varepsilon, \Sigma_1 \cup \Sigma_2) := \sup_{p\in\Sigma_1\cup\Sigma_2} \mathrm{dist}(p, S_\varepsilon) \leqslant c\,\varepsilon\,|\log \varepsilon|.$$

Bien que nous ne l'ayons pas démontré, tout nous porte à croire que cette vitesse de convergence est optimale, c'est à dire qu'il existe une constante $\bar{c} > 0$ telle que

$$\mathrm{dist}(S_\varepsilon, \Sigma_1 \cup \Sigma_2) \geqslant \bar{c}\,\varepsilon\,|\log \varepsilon|.$$

Une fois que nous avons obtenu ce résultat d'existence, une question assez naturelle se pose : Les surfaces S_ε, qui sont construites à l'aide des surfaces Σ_1 et Σ_2, qui sont non dégénérées, sont elles non dégénérées?

Afin de pouvoir répondre à cette question, nous devons placer le résultat précédent dans un cadre plus général. Comme ci-dessus, nous supposons que Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces compactes à bord, immergées, orientables, non dégénérées et à courbure moyenne constante. Pour tout $p_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$, on peut appliquer un déplacement à chacune de ces surfaces de telle sorte que d'une part $p_1 = p_2 = 0$ et que d'autre part les plans tangents au deux surfaces au point 0, soient égaux au plan xy. On demande aussi qu'en ce point les deux surfaces ont des orientations différentes et la même courbure moyenne. Fixons maintenant la surface Σ_1 et faisons tourner d'un angle $\theta \in S^1$ la surface Σ_2 autour de l'axe des z. Ceci nous permet de définir une famille de configurations initiales $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2(p_1, p_2, \theta)$ qui dépend de cinq paramètres. Bien entendu, le Théorème précédent s'applique à chacune des surfaces de cette famille et l'on obtient ainsi une famille de surfaces à courbure moyenne constante $S_\varepsilon(p_1, p_2, \theta)$ qui dépend de six paramètres.

Bien entendu, nous démontrons que cette famille $S_\varepsilon(p_1, p_2, \theta)$ dépend continûment des six paramètres. Il n'est pas très étonnant de constater que ce nombre de paramètre est intimement lié à la question de savoir si les surfaces $S_\varepsilon(p_1, p_2, \theta)$ sont non dégénérées. En effet, si tel est le cas on peut appliquer le Théorème des fonctions implicites qui nous assure l'existence d'une famille à six paramètres de surfaces à courbure moyenne constante dans un voisinage de cette surface (dans le cas où $\partial\Sigma_1$ et $\partial\Sigma_2$ ne sont pas des cercles).

Malheureusement, nous n'avons pas pu démontrer que les surfaces $S_\varepsilon(p_1, p_2, \theta)$ sont non dégénérées et ce même pour de petites valeurs de ε. En revanche, nous démontrons que ces surfaces sont non dégénérées pour un choix *générique* des paramètres p_1, p_2 et θ. Plus précisément nous avons la

PROPOSITION 1. — *[9] Il existe $\mathcal{S} \subset \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times S^1$, ensemble analytique (singulier) de codimension* 1, *tel que, pour tout $(p_1, p_2, \varepsilon) \notin \mathcal{S}$ et pour tout ε assez petit, la surface $S_\varepsilon(p_1, p_2, \theta)$ est non dégénérée.*

En fait, $(p_1, p_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ étant fixé, nous démontrons que si les courbures principales de Σ_1 en p_1 sont différentes de (H_0, H_0) ou si les courbures principales de Σ_2 en p_2 sont différentes de $(-H_0, 3H_0)$ (ou le contraire), alors $S_\varepsilon(p_1, p_2, \theta)$ est non dégénérée pour tous les choix de paramètre θ mises à part au plus quatre valeurs de θ.

Ce dernier résultat exploite de manière essentielle le contrôle très précis que nous obtenons sur la surface S_ε.

3. Brève description des principales étapes de la construction

Nous donnons dans ce paragraphe une idée des principales étapes de notre construction. Habituellement, les étapes des constructions de recollement sont les suivantes. On commence par construire "à la main" une famille de solutions approchées qui dépendent d'un paramètre ε. Dans notre cas, ces solutions approchées seraient obtenues en "recollant" à l'aide de fonctions troncature les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 auxquelles de petits disques centrés en 0 ont été excisés, à l'aide d'un caténoïde d'axe vertical qui a été préalablement réduit par un facteur ε. Ensuite, il convient de perturber les solutions approchées ainsi construites pour obtenir la surface désingularisée. Bien entendu, lors de cette dernière étape, une analyse fine des propriétés de l'opérateur de Jacobi pour les solutions approchées, quand le paramètre ε tend vers 0, est nécessaire.

Nous procédons de manière légèrement différente. Dans un premier temps, on considère un caténoïde paramétré par

$$X(s,\theta):=(\cosh s\cos\theta,\cosh s\sin\theta,s).$$

On tronque ce caténoïde en ne conservant que l'image de $[-s_0,s_0]\times S^1$ par X. La surface correspondante est notée C_{s_0}. L'idée est maintenant de construire une famille de dimension infinie de surfaces à courbure moyenne constante égale à H_0 qui sont proches de C_{s_0}. Ces surfaces sont obtenues comme perturbation normale de C_{s_0} et la famille de surfaces est paramétrée par les deux bords des surfaces. Cette étape est décrite en détail dans les paragraphes 3.1 à 3.3.

Ensuite, on considère les deux surfaces Σ_i. On commence par perturber chaque surface Σ_i en lui ajoutant dans la direction de la normale, ε fois la fonction de Green, pour l'opérateur de Jacobi, avec un pôle en p_i. Cette première déformation, dite *déformation analytique*, a pour principal effet d'occulter complètement la géométrie de Σ_i au point p_i. De plus, elle permet de déformer Σ_i en une surface $\Sigma_i(\varepsilon)$ qui ressemble localement au graphe de la fonction $\pm\,\varepsilon\,\log r$ et sera ainsi plus facilement recollable à un caténoïde dont les bouts ressemblent eux aussi au graphe de la fonction logarithme. Cette étape est décrite dans le paragraphe 3.4.

Les surfaces $\Sigma_i(\varepsilon)$ sont ensuite tronquées et, comme dans le cas du caténoïde, on construit une famille de dimension infinie de surfaces à courbure moyenne constante qui sont des graphes normaux sur chacune des $\Sigma_i(\varepsilon)$. Une fois de plus, ces familles de surfaces sont paramétrées à l'aide de leurs bords respectifs. Cette étape est décrite dans le paragraphe 3.5.

Enfin, nous étudions avec soin les données de Cauchy aux bords des surfaces de ces familles de dimensions infinie. En utilisant la théorie du degré, on montre qu'il existe des données de Cauchy qui coïncident, permettant ainsi de recoller les différentes surfaces et de produire une surface à courbure moyenne constante S_ε. L'un des principaux avantages de notre construction est d'éviter toute utilisation de fonctions troncature qui, en raison de très grand degré de nonlinéarité des équations qui sont en jeu, ont été la cause de beaucoup de complications dans les constructions précédentes. Cette dernière étape est décrite dans le paragraphe 3.6.

3.1. Les caténoïdes

Une paramétrisation isotherme d'un caténoïde d'axe de révolution z, est donnée par

$$X(s,\theta):=(\cosh s\cos\theta,\cosh s\sin\theta,s).$$

Choisissons alors le champ de vecteur normal donné par

$$\nu(s,\theta):=\frac{1}{\cosh s}(-\cos\theta,-\sin\theta,\sinh s).$$

Dans ce cas, il est facile de voir que l'opérateur de Jacobi pour le caténoïde est alors donné par

$$\mathcal{L} : = \frac{1}{\cosh^2 s}\left(\partial^2_{ss} + \partial^2_{\theta\theta} + \frac{2}{\cosh^2 s}\right).$$

On montre aussi sans trop de problèmes que, pour toute fonction scalaire w définie sur $\mathbb{R} \times S^1$, la surface paramétrée par

$$X_w : = X + w\,\nu,$$

est à courbure moyenne constante égale à H_0 si et seulement si w est solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w \;=\; H_0 \;&+\; \frac{1}{\cosh^2 s} Q'\left(\frac{w}{\cosh s}, \frac{\nabla w}{\cosh s}, \frac{\nabla^2 w}{\cosh s}\right) \\ &+\; \frac{1}{\cosh s} Q''\left(\frac{w}{\cosh s}, \frac{\nabla w}{\cosh s}, \frac{\nabla^2 w}{\cosh s}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Dans cette formule importante qui permet de voir la structure des nonlinéarités du problème, Q' est un polynôme homogène de degré 2 et Q'' est un polynôme qui ne contient aucun terme de degré inférieur ou égal à 2. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les coefficients de ces polynômes sont des fonctions de s et de θ qui sont bornées dans $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times S^1)$ et ce, uniformément en ε.

3.2. De l'utilité des espaces de Hölder à poids

On étudie dans un premier temps l'opérateur $\mathcal{L}$ quand il agit sur des espaces à poids. Pour ceci, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in (0, 1)$, nous définissons l'espace

$$\mathscr{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R} \times S^1) : = \left\{ w \in \mathscr{C}^{k,\alpha}_{loc}(\mathbb{R} \times S^1) : \|w\|_{k,\alpha,\delta} : = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left(\cosh^{\delta} s\, |w|_{k,\alpha,[s,s+1]}\right) < \infty \right\},$$

où par définition $|w|_{k,\alpha,[s,s+1]}$ désigne la norme usuelle dans l'espace de Hölder *classique* $\mathscr{C}^{k,\alpha}(]s, s+1[\times S^1)$.

Si I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^{k,\alpha}_{\delta}(I \times S^1)$ désignera l'espace des restriction des fonctions de $\mathscr{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}\times S^1)$ à $I \times S^1$. Bien entendu, cet espace est muni de la norme induite.

Il est facile de voir que

$$\mathcal{L} : \mathscr{C}^{2,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R} \times S^1) \longrightarrow \mathscr{C}^{0,\alpha}_{\delta-2}(\mathbb{R} \times S^1),$$

est un opérateur borné et qu'il est de Fredholm si et seulement si $\delta \notin \mathbb{Z}$. Les propriétés de $\mathcal{L}$ sont faciles à établir, en effet il suffit de projeter $\mathcal{L}$ sur l'espace des fonctions de la forme $w_n(r)\, e^{\in\theta}$ et l'étude de $\mathcal{L}$ se ramène à l'étude de la suite d'opérateurs

$$L_n = \frac{1}{\cosh^2 s}\left(\frac{d^2}{ds^2} - n^2 + \frac{2}{\cosh^2 s}\right).$$

Les propriétés de $\mathscr{L}$ peuvent être résumées dans la

PROPOSITION 2. — *Si $\delta < 0$, l'opérateur $\mathscr{L}$ est injectif et n'est pas surjectif. Soit $n \in \mathbb{N}$, si $\delta \in]n, n+1[$, l'opérateur $\mathscr{L}$ est surjectif et n'est pas injectif, son noyau est de dimension $2(n+1)$.*

Certains champs de Jacobi (solutions de l'équation homogène $\mathscr{L}w = 0$) sont simples à identifier puisqu'ils correspondent à des familles à un paramètre de surfaces minimales auxquelles appartient le caténoïde. En particulier on trouve

$$\Phi^{0,+} := \tanh s,$$

qui correspond à la translation du caténoïde le long de l'axe des z,

$$\Phi^{0,-} := 1 - s \tanh s,$$

qui correspond aux dilatations du caténoïde,

$$\Phi^{1,+} := \frac{1}{\cosh s} \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \Phi^{-1,+} = \frac{1}{\cosh s} \sin\theta,$$

qui correspondent aux translations du caténoïde dans une direction perpendiculaire à l'axe des z et enfin

$$\Phi^{1,-} := \left(\frac{s}{\cosh s} + \sinh s\right) \cos\theta, \qquad \text{et} \qquad \Phi^{-1,-} = \left(\frac{s}{\cosh s} + \sinh s\right) \sin\theta,$$

qui correspondent aux rotations de l'axe du caténoïde dans une direction perpendiculaire. On remarque que ces champs de Jacobi engendrent le noyau de l'opérateur $\mathscr{L}$, lorsque le paramètre $\delta \in]0, 1[$.

Par la suite nous ne considérerons que des caténoïdes tronqués. Pour toute fonction définie sur S^1, définissons alors l'opérateur de projection

$$\pi''\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e^{in\theta}\right) := \sum_{|n|\geqslant 2} a_n\, e^{in\theta}.$$

Dans le cas d'un caténoïde tronqué, nous obtenons, à la place de la proposition précédente la

PROPOSITION 3. — *Supposons que $\delta \in]1,2[$. Alors, pour tout $s_0 \in \mathbb{R}^+$, il existe un opérateur*

$$G_{s_0} : \mathscr{C}^{0,\alpha}_{\delta-2}([-s_0, s_0] \times S^1) \longrightarrow \mathscr{C}^{2,\alpha}_{\delta}([-s_0, s_0] \times S^1),$$

tel que, pour tout $f \in \mathscr{C}^{0,\alpha}_{\delta-2}([-s_0, s_0] \times S^1)$, la fonction $w = G_{s_0}(f)$ est solution de

$$\begin{cases} \mathscr{L}w = f & \textit{dans} \quad (-s_0, s_0) \times S^1 \\ \pi'' w = 0 & \textit{sur} \quad \{\pm s_0\} \times S^1. \end{cases}$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ indépendante de s_0 telle que $\|G_{s_0}(f)\|_{2,\alpha,\delta} \leqslant c\|f\|_{0,\alpha,\delta-2}$.

Quelques remarques s'imposent. Le choix de l'intervalle dans lequel on prend le paramètre δ ainsi que le choix, qui peut paraître étrange, de la condition au bord $\pi'' w = 0$ sont en quelque sorte imposés par le fait que l'on désire avoir une majoration uniforme de la norme de l'opérateur G_{s_0}. Par exemple, si l'on suppose toujours que $\delta \in]1, 2[$ et si l'on impose comme condition au bord $w = 0$, on peut toujours résoudre l'équation ci-dessus mais cette fois, la norme de l'inverse de $\mathscr{L}$ dépend de s_0 et tend vers $+\infty$ quand s_0 tend vers $+\infty$.

3.3. De l'utilité d'un Théorème de point fixe

Définissons

$$s_\varepsilon : = -\frac{1}{4} \log \varepsilon. \tag{2}$$

Le choix de cette constante sera justifié dans le paragraphe 3.5. On note C_ε l'image par l'homothétie de rapport ε ducaténoïde tronqué défini par $X([-s_\varepsilon, s_\varepsilon] \times S^1)$. Autrement dit

$$C_\varepsilon : = \varepsilon X([-s_\varepsilon, s_\varepsilon] \times S^1).$$

Notre objectif est maintenant de rechercher (presque) toutes les surfaces à courbure moyenne constante égale à H_0, qui sont des graphes normaux au dessus de C_ε.

On constate en utilisant (1) que, pour résoudre ce problème, il suffit de résoudre pour tout couple $(\phi''_+, \phi''_-) \in \pi'' \left(\mathscr{C}^{2,\alpha}(S^1)\right)^2$, l'équation

$$\left\{ \begin{array}{lclll} \mathscr{L} w & = & \varepsilon^2 H_0 + \varepsilon\, \bar{Q}(w/\varepsilon) & \text{dans} & (-s_\varepsilon, s_\varepsilon) \times S^1 \\ \pi'' w & = & \phi''_\pm & \text{sur} & \{\pm s_\varepsilon\} \times S^1. \end{array} \right. \tag{3}$$

où $\bar{Q}$ regroupe l'ensemble des termes non linéaires. Afin de résoudre cette équation non linéaire, on utilise bien entendu le résultat de la Proposition 3 ainsi que les propriétés de Q et Q' qui permettent de mettre en œuvre un Théorème de point fixe pour les applications contractantes.

Pour tout $\kappa > 0$, on montre qu'il existe une constante $c_\kappa > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et pour tout $(\phi''_+, \phi''_-) \in \pi'' \left(\mathscr{C}^{2,\alpha}(S^1)\right)^2$ vérifiant $||\phi''_\pm||_{2,\alpha} \leqslant \kappa\, \varepsilon^{3/2}$, il existe une unique solution de (3). Le fait que l'on restreigne notre étude aux données aux bords dont la norme est plus petite que $\kappa\, \varepsilon^{3/2}$ sera justifié dans le paragraphe 3.5.

Afin d'effectuer le recollement, toutes les informations dont nous aurons besoin sont contenues dans l'opérateur qui au couple de données aux bords (ϕ_+, ϕ_-) associe les données de Cauchy de w solution de (3) aux deux bords. Analytiquement, on définit l'opérateur de Cauchy

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{S}_\varepsilon : & \left(\pi'' \left(\mathscr{C}^{2,\alpha}(S^1)\right)\right)^2 & \longrightarrow & \left(\mathscr{C}^{2,\alpha}(S^1) \times \mathscr{C}^{1,\alpha}(S^1)\right)^2 \\ & (\phi''_+, \phi''_-) & \longrightarrow & (w(\pm s_\varepsilon, \cdot), \partial_s w(\pm s_\varepsilon, \cdot)), \end{array}$$

où w est la solution de (3). L'opérateur $\mathcal{S}_\varepsilon$ est clairement un opérateur non linéaire dont on montre qu'il est très proche d'un opérateur linéaire qui est simplement donné par

$$\mathcal{S}_0(\phi''_+, \phi''_-) : = \left(\phi''_\pm, D_\theta \phi''_\pm\right).$$

Où par définition

$$D_\theta \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e^{in\theta}\right) : = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\, a_n\, e^{in\theta}.$$

En effet, on montre que l'on a l'estimation suivante

$$||(\mathcal{S}_\varepsilon - \mathcal{S}_0)(\phi''_+, \phi''_-)||_{(\mathscr{C}^{2,\alpha}\times\mathscr{C}^{1,\alpha})^2} \leqslant c\,\varepsilon^{3/2},$$

qui est valable pour tout $\|\phi''_\pm\|_{2,\alpha} \leqslant \kappa\,\varepsilon^{3/2}$. Remarquer, et ceci est très important, que la constante c ne dépend pas de κ, pourvu que ε soit choisi suffisamment petit.

Pour résumer, on a obtenu une famille de dimension infinie de surfaces à courbure moyenne constante égale à H_0, qui sont proches de C_ε. Cette famille est paramétrée par les données aux bords $\phi''_\pm$ et l'on notera $C_\varepsilon(\phi''_+, \phi''_-)$ la surface correspondante.

3.4. De l'utilité de la fonction de Green

Déformation analytique. Considérons le cas de la surface Σ_1. Au voisinage de l'origine, Σ_1 peut être localement paramétrée comme un graphe vertical

$$B_\rho \ni (x, y) \longrightarrow (x, y, u(x, y)) \in \Sigma_1 \subset \mathbb{R}^3,$$

Avec ces notations, la courbure moyenne de Σ_1 au point de paramètre (x, y) est donnée par

$$H_u(x, y) = \nabla\left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}}\right).$$

L'opérateur de Jacobi prend alors la forme suivante

$$\Lambda_u w : = \nabla\left(\frac{\nabla w}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} - \frac{\nabla u \cdot \nabla w}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \nabla u\right).$$

On note Λ_{Σ_1} l'opérateur de Jacobi pour Σ_1 correspondant au champ de vecteur normal ν_1. Par hypothèse la surface est non dégénérée. Il existe donc une fonction Γ_0 solution de

$$\left\{\begin{array}{rclcc} \Lambda_\Sigma \Gamma_0 & = & -2\pi\,\delta_0, & \text{dans} & \Sigma_1 \\ \Gamma_0 & = & 0 & \text{sur} & \partial\Sigma_1. \end{array}\right.$$

Au voisinage de l'origine, l'opérateur Λ_{Σ_1} est proche de l'opérateur Λ_u et on montre aisément qu'il existe des constantes $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\Gamma_0(x, y) = -\log r + a_0 + a_1\,x + a_2\,y + \mathcal{O}(r^2\,\log 1/r),$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ nous définissons la surface $\Sigma_1(\varepsilon)$ comme étant la surface paramétrée par

$$\Sigma_1 \setminus B_{r_\varepsilon} \ni p \longrightarrow p + \varepsilon \Gamma_0(p)\, \nu(p) \in \mathbb{R}^3.$$

où par définition, nous avons posé

$$r_\varepsilon := \varepsilon \cosh s_\varepsilon.$$

Ce choix sera lui aussi justifié ultérieurement. Remarquons que la surface $\Sigma_1(\varepsilon)$ a maintenant deux bords. L'un qui correspond au bord de Σ_1, et que nous désignerons par *bord extérieur*, et l'autre qui est l'image de $\partial B_{r_\varepsilon} \cap \Sigma_1$ par $p \longrightarrow p + \varepsilon \Gamma_0(p)\, \bar{\nu}(p)$, et que nous désignerons par *bord intérieur.*

Déformation géométrique. Une fois que cette déformation *analytique* de la surface initiale à été faite, nous passons maintenant à la déformation *géométrique.* Dans un premier temps, dans la définition de $\Sigma_1(\varepsilon)$, on modifie le paramètre ε en $\varepsilon - e$, pour tout $e \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Ensuite, étant donné $R \in \mathbb{R}^2$, on fait agir la rotation d'angle $|R|$ dans le plan engendré par les vecteurs $(0,0,1)$ and $(R/|R|, 0)$. Enfin, on translate la surface par le vecteur $(T, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

L'ensemble des paramètres ci-dessus est noté $\mathscr{A} = (T, R, d, e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on notera $\Sigma_1(\varepsilon, \mathscr{A})$ la surface obtenue après toutes ces transformations. Par définition, la norme de $\mathscr{A}$ est donnée par

$$\|\mathscr{A}\| := \varepsilon^{1/4}\, \|T\|_{\mathbb{R}^2} + |\log \varepsilon|^{-1}\, |d| + \varepsilon^{3/4}\, \|R\|_{\mathbb{R}^2} + |e|.$$

Le point important est l'étude de l'influence des transformations géométriques décrites ci-dessus sur le sur le bord de $\Sigma_1(\varepsilon)$. On montre qu'un voisinage du bord intérieur de $\Sigma_1(\varepsilon, \mathscr{A})$ est paramétré par

$$(x,y) \longrightarrow \left(x, y, -\varepsilon \log r + \left(e \log r + d + R_1 x + R_2 y + \varepsilon\, r^{-2}(T_1 x + T_2 y)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})\right), \tag{4}$$

si $\|\mathscr{A}\| \leqslant \kappa\, \varepsilon^{3/2}$. Ici aussi, le point important c'est que $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ peut être majoré indépendamment de κ pourvu que ε soit choisi assez petit. De plus, la restriction de la fonction

$$(x,y) \longrightarrow \left(e \log r + d + R_1 x + R_2 y + \varepsilon\, r^{-2}(T_1 x + T_2 y)\right),$$

à $\partial B_{r_\varepsilon}$ est une fonction qui appartient à l'espace $\mathrm{Vect}\{1, e^{\pm i\theta}\}$.

On procède maintenant comme dans le paragraphe précédent et l'on construit, à partir de $\Sigma_1(\varepsilon, \mathscr{A})$ une famille de dimension infinie, de surfaces à courbure moyenne constante, qui est paramétrée par la donnée au bord $\phi'' \in \pi''(\mathscr{C}^{2,\alpha}(S^1))$. On notera $\Sigma_1(\varepsilon, \mathscr{A}, \phi'')$ la surface correspondante.

Une fois de plus, toutes les informations concernant $\Sigma_1(\varepsilon, \mathscr{A}, \phi'')$ qui seront nécessaires pour le recollement, sont contenues dans l'opérateur de Cauchy qui à $\mathscr{A}$ et ϕ'' associe les données de Cauchy qui correspondent à $\Sigma_1(\varepsilon, \mathscr{A}, \phi'')$. Nous ne donnons pas les détails mais les résultats sont très proches de ceux obtenus dans le paragraphe précédent pour le caténoïde. On effectue un travail semblable avec Σ_2.

3.5. Justification du choix de s_ε et de r_ε

Comme promis, nous justifions notre choix de s_ε et de r_ε. Au voisinage de l'origine, la surface modifiée $\Sigma_1(\varepsilon)$ est paramétrée par

$$(x,y) \longrightarrow (x,y,u(x,y) - \varepsilon \log r + \mathcal{O}(\varepsilon\, r)). \tag{5}$$

De plus, étant donné que le plan tangent à Σ_1 en 0 est le plan $x\,y$, on voit que $u(x,y) = \mathcal{O}(r^2)$.

D'autre part, on constate que la partie inférieure de l'image du caténoïde de C_1 par une homothétie de rapport ε peut être paramétrée (modulo une translation) par

$$(x,y) \longrightarrow \left(x,y,-\varepsilon \log r + \mathcal{O}(\varepsilon^3\, r^{-2})\right). \tag{6}$$

La comparaison de ces deux développements limités montre que, pour minimiser la distance entre ces deux surfaces, il suffit de minimiser une expression de la forme

$$\mathcal{O}\left(r^2 + \varepsilon\, r + \varepsilon^3\, r^{-2}\right).$$

Autrement dit, il faut choisir

$$r \sim \varepsilon^{3/4},$$

ce qui correspond au choix effectué au paragraphe 3.4. Étant donné la relation entre les variables r et s

$$r = \varepsilon\, \cosh s,$$

le choix de $r \sim \varepsilon^{3/4}$ correspond donc au choix de

$$s \sim -\frac{1}{4}\log \varepsilon,$$

ce qui est conforme à notre choix dans le paragraphe 3.3.

Avec de tels choix on constate que la distance entre les deux surfaces est majorée par une constante fois $\varepsilon^{3/2}$. C'est la raison pour laquelle nous ne nous intéressons qu'aux perturbations des bords intérieurs, perturbations qui sont mesurées par la norme de $\phi''_\pm$ et la norme de $\mathcal{A}$, de l'ordre de $\kappa\, \varepsilon^{3/2}$. Pour une constante $\kappa > 0$ fixée assez grande.

3.6. Le recollement

Il s'agit maintenant de déterminer ϕ''_+, ϕ''_- et $\mathcal{A}$ de telle sorte que les données de Cauchy des trois surfaces $\Sigma_1(\varepsilon,\mathcal{A},\phi''_-)$, $C_\varepsilon(\phi''_+,\phi''_-)$ et $\Sigma_2(\varepsilon,\mathcal{A},\phi''_+)$ coïncident. L'existence de telles données est une conséquence de la Théorie de degré de Schauder. Plus précisément, on utilise les limites des opérateurs de Cauchy définis dans les paragraphes précédents (par exemple $\mathcal{S}_0$ pour $C_\varepsilon(\phi''_+,\phi''_-)$). Ces opérateurs sont linéaires et l'on montre montre facilement que, pour le problème limite, il existe des données de Cauchy qui coïncident, ensuite on utilise un argument de degré pour démontrer que le même résultat subsiste pour les opérateurs non linéaires (tels que $\mathcal{S}_\varepsilon$ pour $C_\varepsilon(\phi''_+,\phi''_-)$). Ceci termine la construction de S_ε.

4. Surfaces à courbure moyenne constante et un nombre fini de bouts de type Delaunay

Les premiers exemples de surfaces à courbure moyenne constante font partie d'une famille à un paramètre de surfaces de révolution qui ont été découvertes en 1841 par Delaunay [1]. Nous renvoyons à l'article de J. Eells [2] qui montre comment les courbes qui engendrent ces surfaces apparaissent de manière naturelle comme roulettes de coniques.

Dans cette famille de surfaces de révolution, deux sous familles se distinguent. La première est constituée de surfaces plongées, les *onduloïdes*. Géométriquement parlant, ces surfaces sont engendrées par une courbe qui est obtenue en repérant la trajectoire d'un des foyers d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite. La deuxième sous famille est constituée de surfaces immergées les *nodoïdes*, obtenues en recollant les trajectoires des deux foyers d'une hyperbole qui roule sans glisser sur une droite. Nous donnons maintenant une définition analytique de ces surfaces.

4.1. Surfaces de Delaunay plongées : les onduloïdes

Pour tout $\tau \in (0, 1/2)$, définissons la fonction σ comme étant l'unique solution de

$$(\partial_s \sigma)^2 + 4\,\tau^2 \cosh^2 \sigma = 1, \qquad \text{et} \qquad \partial_s \sigma(0) = 0. \tag{7}$$

Ensuite, nous définissons la fonction k

$$\partial_s k = \tau^2\,(1 + e^{2\sigma}), \qquad \text{et} \qquad k(0) = 0. \tag{8}$$

On vérifie alors sans peine que la surface de révolution paramétrée par

$$X_\tau : (s, \theta) \longrightarrow (\tau\, e^{\sigma(s)} \cos\theta, \tau\, e^{\sigma(s)} \sin\theta, k(s)),$$

est une surface à courbure moyenne constante qui est plongée. Le fait que cette surface est à courbure moyenne constante est essentiellement dû au fait que σ est solution de (7) et le fait que la surface soit plongée est une conséquence du fait que k est strictement croissante [13]. Les surfaces décrites ci-dessus ainsi que leurs images par des déplacement sont appelées *onduloïdes*.

Quand τ tend vers 0, ces surfaces convergent vers une réunion de sphères de rayon 1 alignées sur l'axe des z alors que quand τ tend vers $1/2$, ces surfaces convergent vers un cylindre droit de rayon $1/2$.

4.2. Surfaces de Delaunay immergées : les nodoïdes

Cette fois ci, pour tout $\tau > 0$, nous définissons $\bar\sigma$ comme étant l'unique solution de

$$(\partial_s \bar\sigma)^2 + 4\,\tau^2 \sinh^2 \bar\sigma = 1, \qquad \text{et} \qquad \partial_s \bar\sigma(0) = 0. \tag{9}$$

Ensuite, nous définissons la fonction k

$$\partial_s \bar{k} = \tau^2 (1 - e^{2\bar{\sigma}}), \qquad \text{et} \qquad \bar{k}(0) = 0. \tag{10}$$

La surface de révolution paramétrée par

$$(s, \theta) \longrightarrow (\tau\, e^{\bar{\sigma}(s)} \cos\theta, \tau\, e^{\bar{\sigma}(s)} \sin\theta, \bar{k}(s)),$$

est une surface à courbure moyenne constante qui est immergée. Remarquons que cette fois ci, la fonction k n'est plus un difféomorphisme et ceci entraîne que la surface n'est pas plongée. Les surfaces décrites ci-dessus ainsi que leurs images par des déplacement sont appelées *nodoïdes*.

Quand τ tend vers 0, ces surfaces convergent vers une réunion de sphères de rayon 1 alignées sur l'axe des z.

4.3. L'opérateur de Jacobi pour les surfaces de Delaunay

Comme nous l'avons fait dans le cas des caténoïdes, nous pouvons étudier les propriétés de l'opérateur de Jacobi associé à une surface de Delaunay. Celui ci est donné par

$$\mathscr{L}_\tau : = \frac{1}{\tau^2 e^{2\sigma}} \left(\partial_s^2 + \partial_\theta^2 + 4\,\tau^2 \cosh(2\sigma)\right). \tag{11}$$

Certains champs de Jacobi sont faciles à déterminer puisqu'ils correspondent à des familles à un paramètres de surfaces à courbure moyenne constante. Par exemple

$$\Psi_\tau^{0,+} : = \sigma_s,$$

qui correspond à la translation de la surface de Delaunay le long de l'axe des z.

$$\Psi_\tau^{0,-} : = \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau} \sigma_s\, \partial_\tau k - \sqrt{1-\tau^2}\, e^{\sigma} \cosh\sigma\, (1 + \tau \partial_\tau \sigma),$$

qui correspond au variations du paramètre τ. Ensuite,

$$\Psi_\tau^{1,+} : = \tau \cosh\sigma \cos\theta, \qquad \text{et} \qquad \Phi_\varepsilon^{-1,+} = \tau \cosh\sigma \sin\theta,$$

qui correspondent aux translations de la surface de Delaunay dans une direction perpendiculaire à l'axe des z. Et enfin

$$\Psi_\tau^{1,-} : = k\,\tau\,(\cosh\sigma + \sigma_s\, e^{\sigma}) \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \Phi_\varepsilon^{-1,-} = k\,\tau\,(\cosh\sigma + \sigma_s\, e^{\sigma}) \sin\theta,$$

qui correspondent aux rotations de l'axe de la surface de Delaunay dans une direction perpendiculaire.

L'observation essentielle est que tous ces champs de Jacobi croissent au plus linéairement par rapport à s. En utilisant la projection de l'opérateur de Jacobi sur l'espace des fonctions engendrées par $e^{in\theta}$, on détermine aisément les propriétés de $\mathcal{L}_\tau$. On démontre qu'il existe une suite $(\gamma_n(\tau))_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}$, vérifiant

$$\gamma_0(\tau) = \gamma_1(\tau) = 0,$$

et, pour tout $n \geqslant 1$

$$\gamma_n(\tau) < \gamma_{n+1}(\tau).$$

Les constantes $\gamma_n(\tau)$ sont appelés *racines indicielles*, elle déterminent les différents comportement asymptotique (quand $s \to \pm\infty$) des solutions de l'équation homogène $\mathcal{L}_\tau w = 0$. Ces racines indicielles jouent une rôle essentiel dans la compréhension des propriétés de l'opérateur de Jacobi lorsqu'on le fait agir sur les espaces à poids que nous avons définis dans le paragraphe 3.2. En effet, on montre que l'opérateur

$$\mathcal{L}_\tau : \mathcal{C}^{2,\alpha}_\delta(\mathbb{R} \times S^1) \longrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}_\delta(\mathbb{R} \times S^1),$$

est de Fredholm si et seulement si $\delta \notin \{\pm\gamma_n(\tau) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. De plus, nous avons la

PROPOSITION 4. — *Supposons que $\delta < 0$, alors l'opérateur $\mathcal{L}_\tau$ est injectif et n'est pas surjectif. Pour tout $n \geqslant 1$, l'opérateur $\mathcal{L}_\tau$ est surjectif et n'est pas injectif si $\delta \in]\gamma_n(\tau), \gamma_{n+1}(\tau)[$.*

Ce résultat est pour les surfaces de Delaunay, une traduction du résultat de la Proposition 2 que nous avions énoncé pour les caténoïdes.

Soit χ une fonction troncature telle que $\chi \equiv 1$ pour tout $s \geqslant 1$ et $\chi \equiv 0$ pour tout $s \leqslant -1$. Définissons

$$\mathcal{D} : = \mathrm{Vect}\{\chi \Psi^{j,\pm}_\tau, (1-\chi)\Psi^{j,\pm}_\tau \ : \ j = -1, 0, 1\}.$$

C'est un espace de dimension 12. On vient de voir que, lorsque $\delta < 0$, l'opérateur $\mathcal{L}_\tau$ est injectif mais n'est pas surjectif. Néanmoins, nous avons le résultat suivant

THÉORÈME 2. — *[7] Supposons que $\delta \in]-\gamma_2(\tau), 0[$. Alors, l'opérateur*

$$\mathcal{L}_\tau : \mathcal{C}^{2,\alpha}_\delta(\mathbb{R} \times S^1) \oplus \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}_\delta(\mathbb{R} \times S^1),$$

est surjectif et son noyau est un espace de dimension 6.

Nous verrons dans le paragraphe suivant que, sous une hypothèse non dégénérescence, le résultat précédent peut être étendu à toutes les surfaces non compacte à bouts de type Delaunay.

4.4. Le rôle des surfaces de Delaunay et espace des solutions

Les surfaces de Delaunay jouent un rôle très important dans l'étude des surfaces à courbure moyenne constante non compactes. Par exemple, N. Korevaar, R. Kusner et B. Solomon [6] ont démonté que tout bout plongé d'une surface à courbure moyenne constante est asymptote à une surface de Delaunay.

Supposons que M est une surface à courbure moyenne constante avec k bouts $E_1, \dots, E_k$ de type Delaunay. Modulo un déplacement, chaque bout E_i est un graphe normal au dessus d'une demi surface de Delaunay

$$[S_i, +\infty) \times S^1 \ni (s, \theta) \longrightarrow X_{\tau_i} + w_i \, \nu_{\tau_i} \in E_i,$$

où $\tau_i \in]0, 1/2[$, ν_{τ_i} est un champ de vecteur tangant à la surface de Delaunay paramétrée par X_{τ_i} et où la fonction $w_i \in \mathscr{C}^{2,\alpha}_{\delta}([S_j, +\infty) \times S^1)$ pour tout $\delta \in] - \gamma_2(\tau), 0[$. Pour chaque bout, on trouve, comme nous l'avons fait pour une surface de Delaunay, 6 champs de Jacobi qui correspondent aux transformations géométriques évoquées précédemment et qui sont associées aux racines indicielles $\pm\gamma_j(\tau_i)$, pour $j = -1, 0, 1$. On les note

$$\Psi_i^{j,\pm} \qquad \text{for} \qquad j = -1, 0, 1 \qquad \text{et} \qquad i = 1, \dots, k.$$

Enfin, on note $\mathscr{L}_M$ l'opérateur de Jacobi associé à M.

On décompose M en une partie compacte M^c et les différents bouts E_i. Nous définissons alors sur M l'espace

$$\mathscr{E}^{k,\alpha}_{\delta}(M) : = \left\{ w \in \mathscr{C}^{k,\alpha}_{loc}(M) \ : \ |w|_{k,\alpha,\delta} : = \sum_{i=1}^{k} \| w_{|E_i} \|_{k,\alpha,\delta} + \| w_{|M^c} \|_{k,\alpha,M^c} < +\infty \right\}$$

où $\| \ \|_{k,\alpha,\delta}$ est la norme qui a été définie dans le paragraphe 3.2.

On note

$$\mathscr{D} : = \oplus_{i=1,\dots,k} \mathrm{Vect}\{ \chi(\cdot - S_i) \Psi_{\tau_i}^{j,\pm} \ : \ j = -1, 0, 1 \}.$$

Le résultat du Théorème 2, qui n'était valable que pour des surfaces de Delaunay, peut alors s'énoncer ne toute généralité sous la forme du

Théorème 3. — *Supposons que $\delta \in \cap_{i=1}^{k}] - \gamma_2(\tau_i), 0[$. Supposons de plus que l'opérateur*

$$\mathscr{L}_M : \mathscr{E}^{2,\alpha}_{\delta}(M) \longrightarrow \mathscr{E}^{0,\alpha}_{\delta}(M),$$

est injectif. Alors $\mathscr{L}_M$ défini de $\mathscr{E}^{2,\alpha}_{\delta}(M) \oplus \mathscr{D}$ dans $\mathscr{E}^{0,\alpha}_{\delta}(M)$ est surjectif et son noyau est un espace de dimension 3 k.

Nous pouvons maintenant donner la définition de surface à courbure moyenne constante non compacte non dégénérée.

DÉFINITION 1. — *Nous dirons que la surface à courbure moyenne constante M est non dégénérée si l'opérateur de Jacobi*

$$\mathcal{L}_M : \mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(M) \longrightarrow \mathcal{E}_\delta^{0,\alpha}(M),$$

est injectif pour tout $\delta \in (-\infty, 0)$.

Cette définition étend aux surfaces non compactes, la notion de surface non dégénérée que nous avons déjà utilisée pour les surfaces compactes à bord. Par exemple, une surface de Delaunay est toujours non dégénérée.

Les surfaces de Delaunay mises à part, de nombreuses surfaces à courbure moyenne constante non compacte, complètes, à k bouts ont été construites par N. Kapouleas [5] et plus récemment K. Grosse-Brauckmann a construit des familles de telles surfaces qui ont une symétrie [3].

On notera $\mathcal{M}_{g,k}$ l'ensemble des surfaces à courbure moyenne constantes de genre g qui ont k bouts de type surface de Delaunay. Il sera utile de décomposer cet ensemble de la manière suivante

$$\mathcal{M}_{k,g} = \mathcal{M}_{k,g}^u \cup \mathcal{M}_{k,g}^n \cup \mathcal{M}_{k,g}^m,$$

où $\mathcal{M}_{k,g}^u$ désigne l'ensemble des surfaces dont tous les bouts sont asymptotes à des onduloïdes et $\mathcal{M}_{k,g}^n$ désigne l'ensemble des surfaces dont tous les bouts sont asymptotes à des nodoïdes. Enfin $\mathcal{M}_{k,g}^m$ désigne l'ensemble des surfaces dont les bouts sont des deux types.

R. Kusner, R. Mazzeo et D. Pollack ont étudié les propriétés de $\mathcal{M}_{k,g}$ [7]. Le résultat principal de leur étude est que cet ensemble est localement une variété analytique de dimension $3k$ au voisinage de tout élément non dégénéré. Bien que de nombreux exemples de surfaces appartenant à $\mathcal{M}_{g,k}$ aient été mis en évidence grâce aux travaux de N. Kapouleas et K. Grosse-Brauckman, l'existence de surfaces non dégénérées était un des problèmes ouverts qui a motivé la construction de nouvelles surfaces [8].

4.5. Construction de nouvelles surfaces

On démontre, en utilisant la technique exposée dans le paragraphe 3, que des surfaces à courbure moyenne constante appartenant à $\mathcal{M}_{g,k}$ peuvent être construites à partir de surfaces de Delaunay et de surfaces minimales à k bouts asymptotiques à des caténoïdes.

On note $\mathcal{H}_{g,k}$ l'ensemble des surfaces minimales de genre g ayant k bouts, tous de type plan ou bien de type caténoïdaux. Comme nous l'avons fait pour les surfaces à courbure moyenne constante, nous décomposons cet ensemble en

$$\mathcal{H}_{g,k} = \mathcal{H}_{g,k}^s \cup \mathcal{H}_{g,k}^m \cup \mathcal{H}_{g,k}^0,$$

où $\mathcal{H}^s_{g,k}$ désigne l'ensemble des surfaces dont tous les bouts sont asymptotes à des caténoïdes qui ont la même orientation et $\mathcal{H}^m_{g,k}$ désigne l'ensemble des surfaces dont tous les bouts sont asymptotes à des caténoïdes qui ont des orientations différentes. Enfin $\mathcal{H}^0_{g,k}$ désigne l'ensemble des surfaces dont au moins l'un des bouts est de type plan.

L'espace $\mathcal{H}_{g,k}$ a été étudié par J. Perez et A. Ros [11]. Comme dans le cas des surfaces à courbure moyenne constantes, on retrouve le fait que $\mathcal{H}_{g,k}$ est une variété analytique au voisinage de tout élément vérifiant une certaine condition de non dégénérescence.

DÉFINITION 2. — *Nous dirons que la surface minimale $M \in \mathcal{H}^s_{g,k} \cup \mathcal{H}^m_{g,k}$ est non dégénérée si l'opérateur de Jacobi*

$$\mathcal{L}_M : \mathcal{E}^{2,\alpha}_\delta(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,\alpha}_\delta(M),$$

est injectif pour tout $\delta \in (-\infty, -1)$.

Ici, la définition de l'espace $\mathcal{E}^{k,\alpha}_\delta(M)$ est identique à celle donnée dans le paragraphe précédent pour les surfaces à courbure moyenne constantes. Il suffit simplement de remplacer le rôle joué par les surfaces de Delaunay de paramètre τ, par des images des caténoïdes par des homothéties de rapport $\tau > 0$.

En utilisant les éléments de $\mathcal{H}_{g,k}$, nous démontrons le

THÉORÈME 4. — *[8] Soit $\Sigma_0 \in \mathcal{H}^s_{g,k} \cup \mathcal{H}^m_{g,k}$. On suppose que Σ_0 n'est pas dégénérée. Alors, il existe deux familles distinctes de surfaces à courbure moyenne constante $\Sigma^+_\varepsilon, \Sigma^-_\varepsilon \in \mathcal{M}_{g,k}$, indexées par $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, qui sont construites en recollant des demi surfaces de Delaunay sur chaque bout de la surface $\varepsilon\,\Sigma_0$.*

Les surfaces $\Sigma^\pm_\varepsilon$ sont construites de telle sorte que :

1. *Pour tout $R > 0$, les suites de surfaces $\varepsilon^{-1}\,\Sigma^\pm_\varepsilon \cap B_R$ convergent vers $\Sigma_0 \cap B_R$, quand ε tend vers 0, pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$.*
2. *Si $\Sigma_0 \in \mathcal{H}^s_{g,k}$ alors $\Sigma^+_\varepsilon \in \mathcal{M}^u_{g,k}$ et $\Sigma^-_\varepsilon \in \mathcal{M}^n_{g,k}$.*
3. *Si $\Sigma_0 \in \mathcal{H}^m_{g,k}$ alors $\Sigma^\pm_\varepsilon \in \mathcal{M}^m_{g,k}$.*
4. *Les surfaces $\Sigma^\pm_\varepsilon$ sont des points non dégénérés de $\mathcal{M}_{g,k}$.*

Les deux familles distinctes de surfaces de $\mathcal{M}_{g,k}$ correspondant à un même élément Σ_0 sont obtenues en recollant des demi surfaces de Delaunay (qui peuvent être des onduloïdes ou bien des nodoïdes) sur chaque bout de la surface minimale $\varepsilon\,\Sigma_0$, selon l'orientation choisie pour Σ_0. Si tous les bouts de Σ_0 sont asymptotiques à un caténoïde dont l'orientation est fixée, alors on peut attacher des nodoïdes à chaque bout ou bien des onduloïdes à chaque bout. En revanche, si les bouts de Σ_0 sont asymptotiques à des caténoïdes d'orientations différentes et si l'on attache des onduloïdes sur tous les bouts qui ont une orientation donnée, on doit alors attacher des nodoïdes sur les autre bouts, qui correspondent à l'autre orientation.

4.6. Les surfaces construites par N. Kapouleas

Il est instructif de voir comment les surfaces obtenues par N. Kapouleas, peuvent être obtenues par notre méthode. En effet, les solutions construites par N. Kapouleas, sont qualitativement distinctes des solutions qui sont décrites ci-dessus.

Étant données les étapes de notre construction telles qu'elles ont été décrites dans le paragraphe 3, la construction de N. Kapouleas correspondrait à la stratégie suivante. On part de la sphère unité S^2. On se donne un certain nombre de points $p_1, \dots, p_k \in S^2$ et un certain nombre de réels $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dans un premier temps, on perturbe la sphère S^2 en utilisant la solution de Green. Plus précisément on considère (si elle existe) la fonction Γ solution de

$$\Delta_{S^2}\Gamma + 2\Gamma = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \delta_{p_i}. \tag{12}$$

Ensuite, on définit, pour tout $\varepsilon > 0$, la surface $S^2(\varepsilon)$ par

$$S^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \ni p \longrightarrow p + \varepsilon \Gamma(p) \nu(p)$$

Le reste de la construction est identique à ce qui a été esquissé dans le paragraphe 3 : On essaie alors de recoller cette surface avec des demi surfaces de Delaunay dont les paramètres τ_j sont très petits. La relation entre τ_i, ε et le paramètre a_i est

$$a_i \, \varepsilon = \tau_i^2.$$

Malheureusement, comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'opérateur $\Delta_{S^2}+2$ n'est pas injectif et, afin que l'équation (12) ait une solution, il faut que le membre de droite vérifie la relation de compatibilité suivante

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \, p_i = 0.$$

Cette relation est une contrainte que doivent vérifier les points p_j ainsi que les coefficients a_j pour que la construction soit possible (balancing formula). Remarquons que dans la construction du Théorème 4 et bien que cela ne soit pas explicite, nous imposons aussi une telle contrainte qui est cette fois ci est implicitement contenue dans le fait que la surface minimale Σ_0 existe.

5. Surfaces de type dipoles

Bien entendu le résultat de désingularisation de surfaces compactes à bords, obtenu dans le Théorème 1, s'étend aisément aux surfaces non compactes. On peut par exemple remplacer les surfaces Σ_1 et Σ_2 par des surfaces non dégénérée de $\mathcal{M}_{k,g}$. Dans le cas particulier où Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces de Delaunay tangentes qui sont désingularisées grâce à notre méthode, la surface désingularisée est appelée *surface de type dipôle* par analogie avec les solutions obtenues par R. Mazzeo, D. Pollack et K. Ulhenbeck dans le cadre du problème de Yamabe singulier [10].

Bibliographie

[1] C. DELAUNAY, *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. de Mathématiques, **6** (1841) 309–320.

[2] J. EELLS, *On the surfaces of Delaunay and their Gauss maps.* Proc. IV. int. Colloq. Differential geometry, Santiago de Compostela 1978, 97–116 (1979).

[3] K. GROSSE-BRAUCKMANN, *New surfaces of constant mean curvature*, Math. Z. **214** (1993) 527–565.

[4] K. GROSSE-BRAUCKMANN, R. Kusner et J. Sullivan, *Constant mean curvature surfaces with three ends.* To appear.

[5] N. KAPOULEAS, *Complete constant mean cuvature surfaces in Euclidean three space*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), 239–330.

[6] N. KOREVAAR, R. KUSNER et B. SOLOMON, *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*, J. of Diff. Geometry, **30** (1989) 465–503.

[7] R. KUSNER, R. MAZZEO et D. POLLACK, *The moduli space of complete embedded constant mean curvature surfaces*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996) 120–137.

[8] R. MAZZEO et F. PACARD, *Constant mean curvature surfaces with Delaunay ends.* On peut trouver le fichier ps à l'adresse suivante http://xxx.lanl.gov/ps/math.DG/9807039

[9] R. MAZZEO, F. PACARD et D. POLLACK, *Connected sums of constant mean curvature surfaces in Euclidean* 3 *space.* On peut trouver le fichier ps à l'adresse suivante http://xxx.lanl.gov/ps/math.DG/9905077

[10] R. MAZZEO, D. POLLACK et K. UHLENBECK, *Connected sum constructions for constant scalar curvature metrics*, Top. Methods Nonlin. Anal. **6** No. 2, (1995), 207–233.

[11] J. PEREZ et A. ROS, *The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*, Indiana Uni. Math. J. **45** (1996) 177–204.

[12] R. SCHOEN, *The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equation.* Comm. Pure and Appl. Math. **XLI** (1988), 317–392.

[13] H. WENTE, *Complete immersions of constant mean curvature*, Proc. Sympos. Pure Math. **54** Amer. Math. Soc. (1993).

Frank PACARD
Université Paris 12
61, avenue du Général de Gaulle
94010 CRÉTEIL (France)