

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

MONIQUE CHYBA

Le front d'onde en géométrie sous-riemannienne : le cas Martinet

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 16 (1997-1998), p. 81-105

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1997-1998__16__81_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1997-1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE FRONT D'ONDE EN GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE : LE CAS MARTINET

Monique CHYBA

Abstract

Let U a neighborhood of the origin in \mathbb{R}^3 and Δ a distribution generated by the two following vector fields $F_1 = (1 + \varepsilon y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}$, $F_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Let's consider the local sub-Riemannian problem given by (U, Δ) , the metric being defined by taking F_1 and F_2 orthonormal. Our goal is the construction of the intersection of the wave front of small radius $W(0, r)$ with the Martinet plane $\{y = 0\}$. We complete the work done in [3] by generalizing the study of the return mapping R_n to $n > 2$.

Résumé

Soient U un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^3 et Δ la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs $F_1 = (1 + \varepsilon y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}$, $F_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Considérons le problème sous-riemannien local posé par (U, Δ) , la métrique étant définie en prenant F_1 et F_2 orthonormés. Notre but est de construire l'intersection du front d'onde de petit rayon $W(0, r)$ avec la surface de Martinet $\{y = 0\}$. Nous complétons le travail mené dans [3] en généralisant pour $n > 2$ l'étude de l'application retour R_n .

1. Introduction

Notre objectif est d'étudier la structure sous-riemannienne (U, Δ, g) où U est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant 0 et supposé suffisamment petit, Δ est la distribution engendrée par

$$F_1 = (1 + \varepsilon y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad F_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

Classification math. : 49N60

Ce travail a été réalisé alors que l'auteur était subventionné par le Fonds National Suisse.

les deux champs de vecteurs F_1, F_2 étant supposés orthonormés. Cette situation est une perturbation du cas *Martinet plat* étudié dans [1]. Hormis une étude approfondie du cas plat, les auteurs calculent également une forme normale graduée pour le problème sous-riemannien défini dans un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^3 par la distribution de type Martinet $\ker \omega$ où $\omega = dz - \frac{y^2}{2} dx$, la métrique étant de la forme $g = a(q)dx^2 + 2b(q)dxdy + c(q)dy^2$, $q = (x, y, z)$. Ils montrent que l'on peut supposer g comme somme de carrés : $g = a(q)dx^2 + c(q)dy^2$, $a(q) = 1 + yF(q)$, $c(q) = 1 + G(q)$, $G|_{x=y=0} = 0$. En attribuant le poids 1 aux variables x, y et 3 à z on obtient une forme normale graduée dont le terme d'ordre -1 est donné par le cas plat : $g = dx^2 + dy^2$ et le terme d'ordre 0 dépend de trois paramètres : $g = (1 + \alpha y)dx^2 + (1 + \beta x + \gamma y)dy^2$. L'existence de géodésiques anormales minimisantes pour des distributions de type Martinet rend l'étude de ces structures sous-riemanniennes importante (voir Agrachev et al. pour l'étude des structures de contact, [2]). La perturbation considérée ici correspond à l'étude du paramètre α dans la forme normale graduée d'ordre 0. Ce travail est un complément à l'article [3] où Bonnard et al. étudient la stabilité de certaines propriétés du cas plat, notamment la rigidité des géodésiques anormales, les singularités de la sphère $S(0, r)$ et la nature du front d'onde. D'une part nous développons et généralisons les calculs concernant l'intersection du front d'onde $W(0, r)$ de petit rayon avec la surface de Martinet $\{y = 0\}$, d'autre part nous étudions le type de courbes décrites par les géodésiques en fonction des valeurs initiales de l'application exponentielle. Dans le cas qui nous intéresse les géodésiques sont intégrables, leur paramétrisation faisant intervenir les *fonctions elliptiques* de premières et secondes espèces. Les formules sont complexes et nous donnons les détails de calcul qui ont été omis dans [3].

1.1. Définitions

Nous ne donnons ici que les définitions nécessaires aux calculs effectués dans ce travail, pour plus de détails le lecteur se reportera aux références situées à la fin de ce texte.

Soient F_1, F_2 définis par (1) et supposés orthonormés. Une courbe *admissible* est une courbe absolument continue $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que pour presque tout $t \in [0, T]$ on ait $\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)}$, Δ étant la distribution engendrée par F_1 et F_2 . Une courbe admissible q est donc solution presque partout du système différentiel suivant :

$$\dot{q}(t) = u_1(t)F_1(q(t)) + u_2(t)F_2(q(t)) \quad (2)$$

où $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ est une fonction mesurable et bornée appelée le *contrôle*. Une courbe *minimisante* est une courbe admissible minimisant la longueur. Il est bien connu que les géodésiques du problème de minimiser la longueur paramétrisées proportionnellement à la longueur d'arc sont aussi les géodésiques pour le problème de minimisation de l'énergie avec intervalle de temps fixé. Il en suit d'après le principe du maximum [5], que les courbes minimisantes se relèvent sur l'espace cotan-

gent T^*U comme les solutions (q, p) d'un système hamiltonien contraint donné par :

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), u(t)), \quad \frac{dp(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), u(t)) \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(q(t), p(t), u(t)) = 0 \quad (4)$$

où $H(q, p, u) = \sum_{i=1}^2 \langle p, F_i(q) \rangle u_i - \mu(u_1^2 + u_2^2)$, $\mu = \frac{1}{2}, 0$. Les *géodésiques* sont les projections $t \mapsto q(t)$ des solutions de ce système hamiltonien contraint. Il y a deux types de géodésiques. Les géodésiques *normales* correspondant à $\mu \neq 0$ et les géodésiques *anormales* qui ne dépendent que de la distribution et que l'on obtient en posant $\mu = 0$ dans les équations ci-dessus. Il faut noter qu'une géodésique peut-être à la fois normale et anormale. Lorsqu'il n'existe pas de relèvement normal, on parle alors de géodésique *strictement anormale*. On vérifie aisément que pour la perturbation considérée ici les géodésiques anormales sont contenues dans les plans $y = 0$ et $y = -\frac{2}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon \neq 0$.

Nous restreignons notre étude sous-riemannienne au domaine U , défini par $|\varepsilon y| < 1$, où la métrique peut s'écrire sous la forme

$$g = \frac{1}{(1 + \varepsilon y)^2} dx^2 + dy^2$$

et où les géodésiques anormales paramétrisées par longueur d'arc et issues de l'origine sont les droites $t \mapsto (\pm t, 0, 0)$. La surface $\{y = 0\}$ contenant les géodésiques anormales est appelée la *surface de Martinet*.

1.2. Système hamiltonien décrivant les géodésiques normales

Un calcul facile montre que l'hamiltonien correspondant aux géodésiques normales pour notre perturbation est donné par

$$H_n = \frac{1}{2} \left[\left((1 + \varepsilon y) p_x + p_z \frac{y^2}{2} \right)^2 + p_y^2 \right] = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2)$$

où $P_1 = (1 + \varepsilon y) p_x + p_z \frac{y^2}{2}$, $P_2 = p_y$. Les géodésiques normales sont donc solutions des équations suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + \varepsilon y) F & \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{y} &= p_y & \dot{p}_y &= -(\varepsilon p_x + p_z y) F \\ \dot{z} &= \frac{y^2}{2} F & \dot{p}_z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

où $p = (p_x, p_y, p_z)$ est le *vecteur adjoint* et $F = \left[p_x(1 + \varepsilon y) + p_z \frac{y^2}{2} \right]$.

REMARQUE 1.1. — Le système hamiltonien (5) possède deux coordonnées cycliques et est donc intégrable. Par ailleurs il est important de noter que lorsque $\varepsilon \neq 0$ les géodésiques anormales sont strictement anormales contrairement à la situation $\varepsilon = 0$. L'étude de cette perturbation est donc importante.

Nous supposerons dans la suite les géodésiques paramétrisées par longueur d'arc et issues de l'origine. Les relèvements (q, p) solutions de (5) sont alors contenus dans $H_n = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) = \frac{1}{2}$. Soient $(\varphi, \lambda) \in S^1 \times \mathbb{R}$ définis par les relations suivantes :

$$P_1(0) = p_x = \sin \varphi, \quad P_2(0) = p_y(0) = \cos \varphi, \quad \lambda = p_z.$$

En adjoignant à l'équation (5) la relation $\dot{\varepsilon} = 0$, on peut remarquer que ces équations sont laissées invariantes par les transformations

$$S_1 : (x, y, z, p_x, p_y, p_z, \varepsilon) \rightarrow (-x, y, -z, -p_x, p_y, -p_z, \varepsilon),$$

$$S_2 : (x, y, z, p_x, p_y, p_z, \varepsilon) \rightarrow (x, -y, z, p_x, -p_y, p_z, -\varepsilon).$$

Nous pouvons donc supposer dans la suite $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon < 0$.

REMARQUE 1.2. — Nous limiterons notre étude sous-riemannienne au domaine U . Toutefois, les géodésiques du problème sont des trajectoires complètes, i.e définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, et ne sont pas forcément entièrement contenues dans U . Nous ne tiendrons pas compte de la contrainte $|\varepsilon y| < 1$ pour l'étude des géodésiques, notamment lors de leur classification.

1.3. Application exponentielle et Front d'onde

D'après le principe du maximum, une géodésique normale issue de l'origine est entièrement déterminée par la donnée d'un vecteur cotangent $p(0) \in T_0^*U$. On dénote par \exp l'application exponentielle qui est définie par :

$$\exp_0 : (p(0), t) \mapsto q(t, 0, p(0)).$$

Rappelons que dans le cas présent se donner un vecteur cotangent $p(0)$ équivaut à la donnée d'un angle φ et de $\lambda \in \mathbb{R}$. Le domaine de l'application exponentielle est donc $C \times \mathbb{R}$ où C est le cylindre défini par (φ, λ) . Ce domaine est *non compact*.

Le *front d'onde* de rayon r est l'ensemble $W(0, r)$ des points atteints par les géodésiques de longueur r et issues de l'origine. Dans ce travail nous supposerons r suffisamment petit pour qu'il existe une courbe minimisante joignant 0 et tout point à une distance r de l'origine. Le front d'onde $W(0, r)$ est l'image par l'application exponentielle du cylindre C lorsque le temps t est fixé et égal à r à laquelle il faut ajouter les points atteints par les géodésiques anormales de longueur r .

1.4. Application retour

Soit $q(t, \varphi, \lambda)$ la géodésique normale associée à $p(0) = (\sin \varphi, \cos \varphi, \lambda)$. On définit par R_n l'application dont le domaine est un sous-ensemble de $S^1 \times \mathbb{R}^+$ et qui associe à (φ, λ) la n -ième intersection de $q(t, \varphi, \lambda)$ avec la surface de Martinet :

$$R_n(\varphi, \lambda) = (X_n, Z_n) \in \mathbb{R}^2$$

où $q(t_n(\varphi, \lambda), \varphi, \lambda) = (X_n, 0, Z_n)$, $t_n(\varphi, \lambda)$ étant le n -ième temps d'intersection non nul de q avec $\{y = 0\}$. L'intersection du front d'onde avec la surface de Martinet est l'ensemble des points appartenant à l'image de R_n pour $n \geq 1$ et tel que $t_n(\varphi, \lambda) = r$.

L'organisation de cet article est la suivante. Dans le paragraphe 2 on étudie tous les types de géodésiques normales intervenant dans l'étude de notre perturbation. On donne une paramétrisation complète des géodésiques en fonction des valeurs initiales (φ, λ) et on calcule leurs intersections avec la surface de Martinet $\{y = 0\}$. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude de l'intersection du front d'onde $W(0, r)$ de petit rayon avec la surface de Martinet, pour ceci on utilise les résultats obtenus dans le paragraphe 2.

2. Étude des géodésiques normales

D'après les symétries du problème nous pouvons supposer $p_z = \lambda \geq 0$ dans les formules (5). Dans le paragraphe 2.1 nous étudions les géodésiques associées à $\lambda = 0$, celles correspondant à $\lambda > 0$ font l'objet du paragraphe 2.2.

2.1. Géodésiques normales correspondant à $\lambda = 0$

2.1.1. Paramétrisation des géodésiques.

D'après (5), lorsque $\lambda = p_z = 0$ on a le système linéaire

$$\ddot{y} = -\varepsilon \sin^2 \varphi (1 + \varepsilon y), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \cos \varphi. \quad (6)$$

Si $\sin \varphi = 0$, on obtient les droites $t \mapsto (0, \pm t, 0)$.

Soit $\sin \varphi \neq 0$. Si on pose $\beta := \varepsilon \sin \varphi$ la solution de (6) est de la forme

$$y(t) = A \cos(\psi + \beta t) - \frac{1}{\varepsilon},$$

les constantes A et ψ étant déterminées par les conditions initiales :

$$\psi = -\arctan(\cot \varphi) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad A = \frac{1}{\varepsilon \cos \psi}.$$

On a donc

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon \cos \psi} \cos(\psi + \beta t) - \frac{1}{\varepsilon}.$$

La variable x est obtenue en intégrant l'équation $\dot{x} = \sin \varphi (1 + \varepsilon y)^2$, c'est-à-dire

$$x(t) = \sin \varphi \, t + 2\beta \int_0^t y(s) ds + \varepsilon \beta \int_0^t y^2(s) ds.$$

Sachant que

$$\int_0^t y(s) ds = \frac{1}{\beta \varepsilon \cos \psi} \int_{\psi}^{\psi+\beta t} \cos u \, du - \frac{t}{\varepsilon},$$

$$\int_0^t y^2(s) ds = \frac{1}{\beta \varepsilon^2 \cos^2 \psi} \int_{\psi}^{\psi+\beta t} \cos^2 u \, du - \frac{2}{\beta \varepsilon^2 \cos \psi} \int_{\psi}^{\psi+\beta t} \cos u \, du + \frac{t}{\varepsilon^2}$$

et

$$\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u), \quad \sin(2u) = 2 \sin u \cos u \quad (7)$$

on obtient

$$x(t) = \frac{1}{4\varepsilon \cos^2 \psi} [2\beta t + \sin(2(\psi + \beta t)) - \sin(2\psi)].$$

D'après (5), la dérivée de z satisfait $\dot{z} = \sin \varphi (1 + \varepsilon y) \frac{\gamma^2}{2}$. Comme

$$\int_0^t y^3(s) ds = \frac{1}{\beta \varepsilon^3 \cos^3 \psi} \int_0^t \cos^3 u \, du - \frac{3}{\beta \varepsilon^3 \cos^2 \psi} \int_0^t \cos^2 u \, du$$

$$+ \frac{3}{\beta \varepsilon^2 \cos \psi} \int_0^t \cos u \, du - \frac{1}{\varepsilon^3},$$

on a

$$z(t) = \frac{1}{2\varepsilon^3 \cos^2 \psi} \int_{\psi}^{\psi+\beta t} \cos^3 u \, du - \frac{1}{\varepsilon^3 \cos^2 \psi} \int_{\psi}^{\psi+\beta t} \cos^2 u \, du$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon^3 \cos^2 \psi} \int_{\psi}^{\psi+\beta t} \cos u \, du.$$

La paramétrisation de z se déduit alors des formules (7) et de la relation

$$\int \cos^3 u \, du = \sin u - \frac{\sin^3 u}{3}.$$

PROPOSITION 2.1. — *Les géodésiques normales paramétrisées par longueur d'arc partant de l'origine et correspondant à $\lambda = 0$ sont données par*

$$x(t) = \frac{1}{4\varepsilon \cos^2 \psi} [2\beta t + \sin(2(\psi + \beta t)) - \sin(2\psi)]$$

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon \cos \psi} \cos(\psi + \beta t) - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$z(t) = \frac{1}{24\varepsilon^3 \cos \psi} \left[-\frac{12\beta t}{\cos \psi} + 12 \sin(\psi + \beta t) + \frac{9 \sin(\psi + \beta t)}{\cos^2 \psi} \right.$$

$$\left. - \frac{6 \sin(2(\psi + \beta t))}{\cos \psi} + \frac{\sin(3(\psi + \beta t))}{\cos^2 \psi} - 12 \sin \psi - \frac{9 \sin \psi}{\cos^2 \psi} + \frac{6 \sin(2\psi)}{\cos \psi} - \frac{\sin(3\psi)}{\cos^2 \psi} \right]$$

pour $\sin \varphi \neq 0$, où $\beta = \varepsilon \sin \varphi$ et $\psi = -\arctan(\cot \varphi) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Si $\sin \varphi = 0$ ce sont les droites $t \mapsto (0, \pm t, 0)$.

2.1.2. Intersection des géodésiques avec $\{y = 0\}$.

Notons que les géodésiques associées à $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ sont les droites $t \mapsto (0, \pm t, 0)$ et n'intersectent pas la surface de Martinet pour $t > 0$.

Soit $\sin \varphi \neq 0$. La symétrie $S : (x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$ correspondant à la transformation $\varphi \mapsto -\varphi, \lambda \mapsto -\lambda$ permet de supposer $\varphi \in]0, \pi[$.

PROPOSITION 2.2. — *Soit q la géodésique normale associée à $\varphi \in]0, \pi[$ et $\lambda = 0$. La n -ième intersection de q avec le plan de Martinet $\{y = 0\}$ est donnée par :*

• n impair, $n = 2p + 1$:

$$t_{2p+1}(\varphi, 0) = -\frac{2(\psi + \pi P)}{\beta}$$

$$X_{2p+1} = -\frac{1}{2\varepsilon \cos^2 \psi} [2(\psi + \pi P) + \sin(2\psi)]$$

$$Z_{2p+1} = \frac{1}{12\varepsilon^3 \cos \psi} \left[\frac{12}{\cos \psi} (\psi + \pi P) - 12 \sin \psi - \frac{9 \sin \psi}{\cos^2 \psi} + \frac{6 \sin(2\psi)}{\cos \psi} - \frac{\sin(3\psi)}{\cos^2 \psi} \right]$$

où $P = p + 1$ si $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $P = p$ si $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

• n pair, $n = 2p$:

$$t_{2p}(\varphi, 0) = -\frac{2\pi p}{\beta}$$

$$X_{2p} = -\frac{\pi p}{\varepsilon \cos^2 \psi}, \quad Z_{2p} = \frac{\pi p}{\varepsilon^3 \cos \psi}$$

Démonstration. — Pour $\varphi \in]0, \pi[$, on a $\beta < 0$. Si $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}]$ la constante ψ appartient à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, 0]$ et à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ si $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Le reste découle de la périodicité du cosinus et de la proposition 2.1.

Soit Λ_0 défini comme étant l'image par l'application R_1 de l'ensemble $\{(\varphi, 0) ; \varphi \in S^1 \setminus \{0, \pi\}\}$. Rappelons que l'application R_1 est définie par

$$R_1 : (\varphi, \lambda) \mapsto (x(t_1(\varphi, \lambda), \varphi, \lambda), z(t_1(\varphi, \lambda), \varphi, \lambda)) = (X_1, Z_1) \in \mathbb{R}^2$$

où $t_1(\varphi, \lambda)$ est le premier temps d'intersection non nul de $q(t) = (x(t), y(t), z(t))$ avec $\{y = 0\}$. L'ensemble Λ_0 est constitué de quatre composantes connexes et est paramétrisé

par la proposition 2.2 en posant $n = 1$. Il est représenté en figure 1.

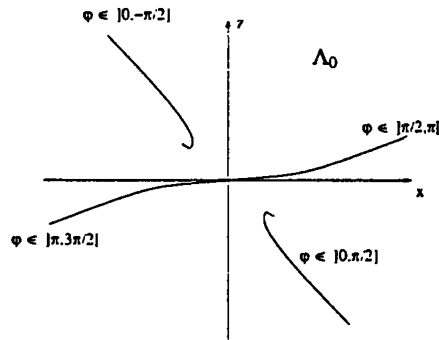


figure 1

REMARQUE 2.1. — Pour r suffisamment petit, seules les intersections (X_1, Z_1) des géodésiques associées à $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus\{\pi\}$ vont intervenir dans l'étude de l'intersection du front d'onde $W(0, r)$ avec la surface de Martinet. Elles appartiennent aux courbes de la figure 1 ramifiées à l'origine. En effet, dans les autres cas, on a $t_i(\varphi, 0) > \frac{\pi}{|\varepsilon|}$.

2.1.3. Classification des géodésiques en fonction du paramètre φ .

La variable y étant, pour $\sin \varphi \neq 0$, la translation d'une homothétie de la fonction cosinus, elle suit un mouvement périodique de période 2π et d'amplitude $\frac{1}{\varepsilon \cos \psi}$. On peut remarquer que $|\varepsilon y| = \left| \frac{\cos(\psi + \beta t)}{\cos \psi} - 1 \right|$ et

$$\forall \varphi \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}, |y(t_\varphi)\varepsilon| = 1 \text{ pour } t_\varphi = \frac{\text{sign}(\sin \varphi) \frac{\pi}{2} - \psi}{\beta}.$$

Les géodésiques associées à $\lambda = 0$ ne sont donc pas entièrement contenues dans U . De plus, la dérivée de x s'annule en $t_\varphi + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ce sont les seuls zéros de \dot{x} . En figure 2, nous avons représenté la projection sur le plan (x, y) d'une géodésique correspondant à $\lambda = 0$, $\sin \varphi \neq 0$. Si $\sin \varphi = 0$ on obtient les droites $x(t) = \pm t, y \equiv 0$.

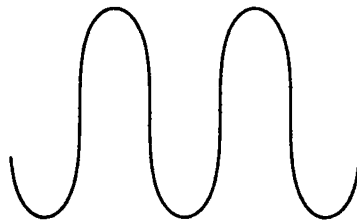


figure 2

REMARQUE 2.2. — Lors de l'étude du cas plat dans [1] il est montré que dans ce cas la projection sur le plan (x, y) des géodésiques correspondant à $\lambda = 0$ est une droite quelque soit l'angle φ . Les géodésiques étaient alors globalement minimisantes et n'intersectaient pas la surface de Martinet $\{y = 0\}$.

2.2. Géodésiques normales correspondant à $\lambda > 0$.

Les géodésiques normales paramétrisées par longueur d'arc sont contenues dans le niveau d'énergie $H_\eta = \frac{1}{2}$. D'après les formules (5) ceci est équivalent à l'équation caractéristique

$$\dot{y}^2 + P_1^2(y) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (8)$$

Soit $\lambda > 0$ et soient $k > 0, k'' \in \mathbb{R}$ définis par

$$2k^2 = 1 - \sin \varphi + \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2\lambda}, \quad 2k'' = 1 + \sin \varphi - \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2\lambda}. \quad (9)$$

Avec le changement de variable $\eta = \frac{1}{2k} (y\sqrt{\lambda} + \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{\lambda}})$ l'équation (8) prend la forme

$$\frac{\dot{\eta}^2}{\lambda} = (1 - \eta^2)(k'' + k^2 \eta^2) \quad (10)$$

où par définition, $k^2 + k'' = 1$ et $\eta(0) = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{2k\sqrt{\lambda}}$.

Pour l'analyse des géodésiques, il faut distinguer les trois situations suivantes :

1. Cas A : $k'' > 0$
2. Cas B : $k'' < 0$
3. Cas C : $k'' = 0$.

De plus, pour chacun des trois cas nous allons devoir distinguer les géodésiques ascendantes des géodésiques descendantes. Posons

$$\sigma = \begin{cases} \text{signe } \dot{y}(0) & \text{si } \dot{y}(0) \neq 0 \\ \text{signe } \ddot{y}(0) & \text{si } \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Observons que $\dot{y}(0)$ et $\ddot{y}(0)$ ne peuvent pas s'annuler en même temps. En effet, pour $\varepsilon < 0$, on a $\dot{y}(0) = P_2$ et $\ddot{y}(0) = -\varepsilon P_1^2(0)$. Donc pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sigma = +1$ et $\sigma = -1$ si $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Lorsque $\varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ et $\varepsilon < 0$, on a $\sigma = +1$ et y garde un signe constant le long de la trajectoire.

La remarque générale suivante est immédiate.

REMARQUE 2.3. — La propriété suivante des géodésiques normales est une conséquence directe de la forme du potentiel P_1 : $P_1(y) = \sin \varphi(1 + \varepsilon y) + \lambda \frac{y^2}{2}$. Soit $q(t, \varphi, \lambda)$

une géodésique normale. Si $(\sin \varphi, \lambda) \neq (0, 0)$ et $k'' \neq 0$, alors y s'annule exactement une fois entre deux intersections de q avec la surface de Martinet. Si $k'' = 0$, y s'annule au plus une fois le long de la géodésique. Pour $(\sin \varphi, \lambda) = (0, 0)$, on a $y \equiv \pm 1$. Nous pouvons par ailleurs noter que la dérivée de x s'annule aux points frontières de U : $\varepsilon y = -1$.

2.2.1. Étude du cas A.

Lorsque $k'' > 0$, on a $0 < k^2, k'' < 1$ et l'équation caractéristique (10) est directement sous forme normale pour les intégrales elliptiques de première espèce, voir le livre de Lawden par exemple [4].

PROPOSITION 2.3. — *Les géodésiques normales paramétrisées par longueur d'arc partant de l'origine et correspondant à $\lambda > 0$, $k'' > 0$ sont données par*

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[-t + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} (E(u) - E(\phi)) \right] \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} \right) - \sigma \frac{2\varepsilon k}{\lambda} (\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} \phi \operatorname{dn} \phi) \\ y(t) &= -\sigma \frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{cn}(u) - \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\lambda} \\ z(t) &= t \left(\frac{1 + \sin \varphi}{3\lambda} - \frac{2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{3\lambda^2} \right) + \frac{2 \sin \varphi}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) (E(u) - E(\phi)) \\ &\quad + \sigma \frac{2\varepsilon \sin \varphi k}{\lambda^2} (\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} \phi \operatorname{dn} \phi) + \frac{4k^2}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} \phi \operatorname{cn} \phi \operatorname{dn} \phi) \end{aligned}$$

où $u = \phi + t\sqrt{\lambda}$ et ϕ est défini par $\phi = T_1$ si $\sigma < 0$, $\phi = 2K - T_1$ si $\sigma > 0$ et $T_1 = \int_{\eta(0)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k''+k^2t^2)}}$. Les fonctions $\operatorname{cn}, \operatorname{sn}$ et dn sont les fonctions de Jacobi et K est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Démonstration. — Les calculs concernant cette paramétrisation sont entièrement détaillés dans [3]. Nous ne les reprendrons pas ici.

2.2.2. Intersection des géodésiques avec $\{y = 0\}$.

Lorsque $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on a $k'' = -\frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2\lambda} < 0$ et l'on se trouve dans le cas B ou C. Soit donc $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

PROPOSITION 2.4. — *Soit (φ, λ) tel que $k'' > 0$ et q la géodésique normale correspondante. La n -ième intersection de q avec le plan de Martinet $\{y = 0\}$ est donnée par :*

- n impair, $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} t_{2p+1}(\varphi, \lambda) &= \frac{(p+1)4K - 2\phi}{\sqrt{\lambda}} \\ X_{2p+1} &= \left[-\frac{(p+1)4K - 2\phi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{\sqrt{\lambda}} ((p+1)E - E(\phi)) \right] \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} \right) + \sigma \frac{4\varepsilon k}{\lambda} \operatorname{sn} \phi \operatorname{cn} \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{2p+1} = & \frac{(p+1)4K - 2\phi}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 + \sin \varphi}{3\lambda} - \frac{2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{3\lambda^2} \right) \\
& + \frac{2 \sin \varphi}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) (4(p+1)E - 2E(\phi)) - \sigma \frac{4\varepsilon \sin \varphi k}{\lambda^2} \operatorname{sn} \phi \operatorname{dn} \phi \\
& - \frac{8k^2}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sn} \phi \operatorname{cn} \phi \operatorname{dn} \phi
\end{aligned}$$

• n pair, $n = 2p$:

$$\begin{aligned}
t_{2p}(\varphi, \lambda) &= \frac{p4K}{\sqrt{\lambda}} \\
X_{2p} &= \left[-p \frac{4K}{\sqrt{\lambda}} + \frac{8pE}{\sqrt{\lambda}} \right] \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} \right) \\
Z_{2p} &= \frac{p4K}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 + \sin \varphi}{3\lambda} - \frac{2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{3\lambda^2} \right) + \frac{8p \sin \varphi}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) E
\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $u \in [0, 2K]$, les propriétés de périodicité suivantes sont satisfaites pour la fonction cn :

$$\operatorname{cn}(u) = \operatorname{cn}(4K - u), \quad \operatorname{cn}(u) = \operatorname{cn}(u + 4K).$$

La preuve de la proposition découle immédiatement de ce résultat et de la proposition 2.3. En effet, on a $\phi \in [0, 2K]$ et $y(t) = -\frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{cn}(\phi + t\sqrt{\lambda}) - \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\lambda}$.

2.2.3. Classification des géodésiques en fonction des paramètres φ, λ .

La variable y suit un mouvement périodique de période $4K$ et d'amplitude $\frac{2k}{\sqrt{\lambda}}$. Les figures 3-9 décrivent les différents types de courbes correspondant à la projection dans le plan (x, y) des géodésiques du cas A en fonction des paramètres φ, λ . Si $\sin \varphi \geq 0$, on est dans la situation des figures 3 et 4. Soit $\sin \varphi < 0$. Pour φ fixé, la forme de la courbe se modifie suivant les figures 5-9 en fonction de la valeur du paramètre λ . La figure 8 réalise la transition entre les courbes 7 et 9, elle correspond aux valeurs de φ et λ satisfaisant l'égalité $2E = K$ où K et E sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce. Cette condition provient de $x\left(\frac{4K}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ où $\frac{4K}{\sqrt{\lambda}}$ est le deuxième temps d'intersection de la géodésique avec la surface de Martinet. Les géodésiques associées aux figures 5-7 sont caractérisées par la condition $2E > K$ et celles à la figure 9 par $2E < K$.

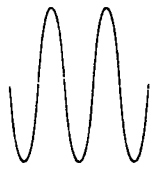


figure 3
 $\varphi \in]0, \pi[$

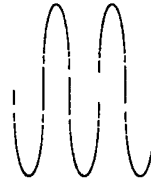


figure 4
 $\varphi = 0, \pi$

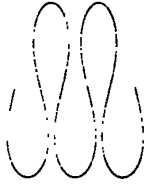


figure 5

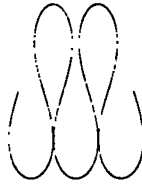


figure 6

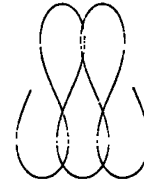


figure 7

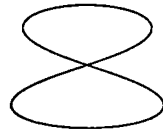


figure 8

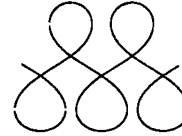


figure 9

REMARQUE 2.4. — Lorsque $k'' > 0$, la dérivée de x ne s'annule pas uniquement aux points frontières de U : $\varepsilon y = -1$, mais également aux points y^\pm où le potentiel $P_1(y)$ s'annule. Ces points sont donnés par

$$y^\pm = -\frac{\varepsilon \sin \varphi}{\lambda} \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi \varepsilon^2 - 2\lambda \sin \varphi}}{\lambda}$$

et satisfont $y^+ < y_+$, $y_- < y^-$ où y_\pm sont les valeurs maximales et minimales de la courbe $t \mapsto y(t)$ (voir [3] pour une étude détaillée de y_\pm).

2.2.4. Étude du cas B.

Afin de pouvoir exprimer l'équation caractéristique (8) associée à $k'' < 0$ sous forme normale pour les intégrales elliptiques de première espèce avec des modules compris entre 0 et 1, nous devons introduire de nouveaux paramètres. Soit $\hat{k}' > 0$ défini par $\hat{k}'^2 = -\frac{k''}{k^2}$. Comme $1 > k^2 > 0$ et $-\frac{k''}{k^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$, on a $\hat{k}'^2 < 1$. On introduit $0 < \hat{k} < 1$ par la relation $\hat{k}^2 + \hat{k}'^2 = 1$. L'équation caractéristique peut alors s'écrire

$$\frac{\dot{\eta}^2}{k^2 \lambda} = (1 - \eta^2)(\eta^2 - \hat{k}'^2) \quad (11)$$

et être intégrée de manière analogue au cas A. Le lecteur doit cependant être attentif au fait que dans la paramétrisation du cas B le module des fonctions de Jacobi est \hat{k} et non pas k . Notons que si $\sin \varphi = 0$, on a $k'' > 0$, donc $\mu = -\text{sign}(\sin \varphi)$ est défini sans ambiguïté.

PROPOSITION 2.5. — *Les géodésiques normales paramétrisées par longueur d'arc partant de l'origine et correspondant à $\lambda > 0$, $k'' < 0$ sont données par*

$$\begin{aligned} x(t) &= t \sin \varphi \left(1 - \frac{3\varepsilon^2 \sin \varphi}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi}{2\lambda^2}\right) + \frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda}\right) (E(u) - E(\psi)) \\ &\quad + \mu \frac{2\varepsilon}{\lambda} (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) \\ y(t) &= \mu \frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{dn}(u) - \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\lambda} \\ z(t) &= t \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \sin^2 \varphi + \frac{5\varepsilon^2 \sin^3 \varphi}{2\lambda} - \frac{\varepsilon^4 \sin^4 \varphi}{\lambda^2}\right) \\ &\quad + \frac{2 \sin \varphi k}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1\right) (E(u) - E(\psi)) - \mu \frac{2\varepsilon \sin \varphi}{\lambda^2} (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) \\ &\quad + \frac{4k}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi) \end{aligned}$$

où $u = \psi + tk\sqrt{\lambda}$, et ψ est défini par $\psi = T_1$ si $\mu\sigma < 0$, $\psi = -T_1$ si $\mu\sigma > 0$ et $T_1 = \int_{|\eta(0)|}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}$.

Démonstration. — Tous les détails se trouvent dans [3]. La seule difficulté technique réside dans le fait que contrairement au cas A où les seules racines de l'équation caractéristique mise sous forme normale sont données par $\eta = \pm 1$, dans le cas B les valeurs $\eta = \pm \hat{k}'$ sont aussi des racines de (11). Ceci se traduit par la propriété de doublement de périodicité de la fonction $\operatorname{dn} u$ par rapport à $\operatorname{cn} u$:

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u + 2K), \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u + 4K), \quad \operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u.$$

2.2.5. Intersection des géodésiques avec $\{y = 0\}$.

Si $\sin \varphi = 0$, on a $k'' = \frac{1}{2} > 0$. Soit donc $\varphi \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

PROPOSITION 2.6. — *Soit (φ, λ) tel que $k'' < 0$ et q la géodésique normale correspondante. La n -ième intersection de q avec le plan de Martinet $\{y = 0\}$ est donnée par :*

• n impair, $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} t_{2p+1}(\varphi, \lambda) &= \frac{2PK - 2\psi}{k\sqrt{\lambda}} \\ X_{2p+1} &= \frac{2PK - 2\psi}{k\sqrt{\lambda}} \sin \varphi \left(1 - \frac{3\varepsilon^2 \sin \varphi}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi}{2\lambda^2}\right) \\ &\quad + \frac{4k}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda}\right) (PE - E(\psi)) - \mu \frac{4\varepsilon}{\lambda} \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi \\ Z_{2p+1} &= \frac{2PK - 2\psi}{k\sqrt{\lambda}} \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \sin^2 \varphi + \frac{5\varepsilon^2 \sin^3 \varphi}{2\lambda} - \frac{\varepsilon^4 \sin^4 \varphi}{\lambda^2}\right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{2 \sin \varphi k}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) (PE - E(\psi)) + \mu \frac{4\varepsilon \sin \varphi}{\lambda^2} \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi - \frac{8k}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi$$

où $P = p + 1$ si $\mu\sigma < 0$ et $P = p$ si $\mu\sigma > 0$.

• n pair, $n = 2p$:

$$t_{2p}(\varphi, \lambda) = \frac{2pK}{k\sqrt{\lambda}}$$

$$X_{2p} = \frac{2pK - 2\psi}{k\sqrt{\lambda}} \sin \varphi \left(1 - \frac{3\varepsilon^2 \sin \varphi}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi}{2\lambda^2} \right) + \frac{4pk}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} \right) E$$

$$Z_{2p} = \frac{2pK}{k\sqrt{\lambda}} \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \sin^2 \varphi + \frac{5\varepsilon^2 \sin^3 \varphi}{2\lambda} - \frac{\varepsilon^4 \sin^4 \varphi}{\lambda^2} \right) + \frac{4p \sin \varphi k}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) E$$

Démonstration. — Pour $\mu\sigma > 0$, on a $\psi \in [-K, 0[$ et $\psi \in]0, K]$ si $\mu\sigma < 0$. La démonstration est alors un corollaire de la proposition 2.5 et de la périodicité du dn :

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(-u), \quad \operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u + 2K).$$

2.2.6. Classification des géodésiques en fonction des paramètres φ, λ .

Dans ce cas, la coordonnée y suit un mouvement périodique de période $2K(\hat{k})$ et d'amplitude $\frac{k(1-\hat{k})}{\sqrt{\lambda}}$. Il y a essentiellement deux types de trajectoires qui sont représentées en figures 10 et 11. La transition entre ces deux types est illustrée par les dessins de la figure 12. Remarquons que la trajectoire numéro 5 de la figure 12 possède un cusp sur le sommet de la boucle. Cela correspond au cas où les dérivées de x et de y s'annulent simultanément ce qui n'est possible que sur les points frontières de U .

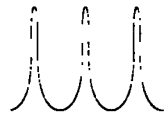


figure 10



figure 11

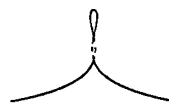




figure 12

REMARQUE 2.5. — Comme pour les géodésiques du cas A, la dérivée de x s'annule en même temps que le potentiel.

2.2.7. Étude du cas C.

Différentes techniques peuvent être utilisées afin de calculer la paramétrisation des géodésiques correspondant à $k'' = 0$. On peut choisir d'intégrer comme précédemment l'équation caractéristique en utilisant la relation

$$\left(\frac{d}{du} \operatorname{sech} u\right)^2 = (1 - \operatorname{sech}^2 u) \operatorname{sech}^2 u, \quad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u}.$$

Il est cependant plus simple de faire tendre le paramètre k'' vers 0 dans la paramétrisation du cas B et d'utiliser les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{sn}(u, k) &= \tanh u, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{cn}(u, k) = \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{dn}(u, k) = \operatorname{sech} u, \\ \lim_{k \rightarrow 1} E(u, k) &= \tanh u. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.7. — *Les géodésiques normales paramétrisées par longueur d'arc partant de l'origine et correspondant à $\lambda > 0$, $k'' = 0$ sont données par*

$$\begin{aligned} x(t) &= t \left(1 + \frac{2}{\sin \varphi}\right) + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda}\right) (\tanh u - \tanh \theta) \\ &\quad + \mu \frac{2\varepsilon}{\lambda} (\tanh u \operatorname{sech} u - \tanh \theta \operatorname{sech} \theta) \\ y(t) &= \mu \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}(u) - \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\lambda} \\ z(t) &= -t \frac{(1 + \sin \varphi)}{\lambda} + \frac{2 \sin \varphi}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1\right) (\tanh u - \tanh \theta) \\ &\quad - \mu \frac{2\varepsilon \sin \varphi}{\lambda^2} (\tanh u \operatorname{sech} u - \tanh \theta \operatorname{sech} \theta) + \frac{4}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} (\tanh u \operatorname{sech}^2 u - \tanh \theta \operatorname{sech}^2 \theta) \end{aligned}$$

où $u = \theta + t\sqrt{\lambda}$, $\lambda = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2(1 + \sin \varphi)}$, et θ est défini par $\theta = T_1$ si $\mu\sigma < 0$, $\theta = -T_1$ si $\mu\sigma > 0$ et $T_1 = \int_{|\eta(0)|}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)t^2}}$.

Démonstration. — La relation $\lambda = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2(1+\sin \varphi)}$ caractérise l'ensemble $k'' = 0$. La paramétrisation en découle ainsi que des remarques ci-dessus, de la proposition 2.5 et des propriétés suivantes :

$$1 + \frac{2}{\sin \varphi} = \sin \varphi \left(1 - \frac{3\varepsilon^2 \sin \varphi}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi}{2\lambda^2} \right),$$

$$\frac{(1 + \sin \varphi)}{\lambda} = \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \sin^2 \varphi + \frac{5\varepsilon^2 \sin^3 \varphi}{2\lambda} - \frac{\varepsilon^4 \sin^4 \varphi}{\lambda^2} \right).$$

De plus, lorsque $k'' = 0$ nous avons $\eta(0) = \mu \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{2}}$.

REMARQUE 2.6. — Il est également possible d'obtenir cette paramétrisation en faisant tendre k'' vers 0 dans la paramétrisation du cas A à condition de réécrire cette dernière. En effet, dans le but d'avoir une paramétrisation unique décrivant toutes les géodésiques associées à $k'' > 0$, nous avons utilisé la propriété de périodicité du cn suivante : $\text{cn } u = -\text{cn}(2K + u)$, propriété qui ne reste pas valable pour la sécante hyperbolique. Il est facile de vérifier que la paramétrisation de la variable y pour $k'' > 0$ peut s'écrire, dans le cas où $\sin \varphi \neq 0$, comme

$$y(t) = \mu \frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \text{cn}(u) - \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\lambda} \text{ avec } u = \phi + t\sqrt{\lambda},$$

où $\phi = T_1$ si $\mu\sigma < 0$ et $\phi = -T_1$ si $\mu\sigma > 0$ pour $T_1 = \int_{|\eta(0)|}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k''+k^2t^2)}}$, $\eta(0) = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{2k\sqrt{\lambda}}$. La paramétrisation correspondant à $k'' = 0$ en découle.

2.2.8. Intersection des géodésiques avec $\{y = 0\}$.

Il est important de remarquer que contrairement aux fonctions de Jacobi de première espèce, la sécante hyperbolique n'est pas une fonction périodique. Lorsque $k'' = 0$, la variable y intersecte au plus une fois la surface de Martinet. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.8. — Soient $\varphi \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et q la géodésique normale correspondant à φ et $k'' = 0$. Si $\mu\sigma < 0$, la géodésique q n'intersecte pas le plan $\{y = 0\}$ pour $t > 0$. Si $\mu\sigma > 0$, il y a exactement une intersection de q avec la surface de Martinet et on a

$$t_1(\varphi) = -\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda}}$$

$$X_1 = -\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{2}{\sin \varphi} \right) - \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} \right) \tanh \theta - \mu \frac{4\varepsilon}{\lambda} \tanh \theta \text{sech} \theta$$

$$Z_1 = \frac{2\theta}{\sqrt{\lambda}} \frac{(1 + \sin \varphi)}{\lambda} - \frac{4 \sin \varphi}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) \tanh \theta + \mu \frac{4\varepsilon \sin \varphi}{\lambda^2} \tanh \theta \text{sech} \theta$$

$$- \frac{8}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \tanh \theta \text{sech}^2 \theta$$

Démonstration. — Lorsque $\mu\sigma < 0$, on a $\theta > 0$ et il n'existe pas $t > 0$ tel que $\operatorname{sech}(\theta + t\sqrt{\lambda}) = \operatorname{sech}\theta$. Si $\mu\sigma > 0$, on a $\theta < 0$. La sécante hyperbolique satisfaisant $\operatorname{sech}u = \operatorname{sech}(-u)$, la proposition 2.7 permet de conclure.

REMARQUE 2.7. — L'application retour de Martinet n'est donc pas définie pour les valeurs $(\varphi, \lambda_\varphi)$ où $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ et $\lambda_\varphi = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2(1+\sin \varphi)}$. Elle est définie uniquement pour $n = 1$ si $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Soit K_0'' l'image par l'application R_1 de l'ensemble $(\varphi, \lambda_\varphi)$ où

$$\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\text{ et } \lambda_\varphi = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{2(1+\sin \varphi)}.$$

Cet ensemble nous sera utile lors de la construction de l'intersection du front d'onde $W(0, r)$ avec la surface de Martinet, il est représenté en figure 13 et est paramétrisé par

$$x(\varphi) = -\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda_\varphi}} \left(1 + \frac{2}{\sin \varphi}\right) - \frac{4}{\sqrt{\lambda_\varphi}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda_\varphi}\right) \tanh \theta - \frac{\mu 4\varepsilon}{\lambda_\varphi} \tanh \theta \operatorname{sech} \theta,$$

$$z(\varphi) = -\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda_\varphi}} \frac{\varepsilon^2 \sin^3 \varphi}{4\lambda_\varphi^2} \left(2 - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda_\varphi}\right) - \frac{4 \sin \varphi}{3\lambda_\varphi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi}{\lambda_\varphi} - 1\right) \tanh \theta \\ + \frac{\mu 4\varepsilon \sin \varphi}{\lambda_\varphi^2} \tanh \theta \operatorname{sech} \theta - \frac{8}{3\lambda_\varphi^{\frac{3}{2}}} \tanh \theta \operatorname{sech}^2 \theta.$$

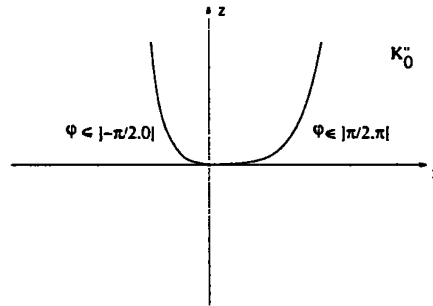


figure 13

2.2.9. Classification des géodésiques en fonction du paramètre φ .

Nous avons vu que la variable y des géodésiques associées à $k'' = 0$ ne suit pas un mouvement périodique. Dans la représentation du pendule plan, ces trajectoires correspondent à la situation critique où le pendule s'approche infiniment près du point E ,

le temps pour l'atteindre étant infini, voir figure 14. En terme de tige élastique ces trajectoires, aussi appelées séparatrices, réalisent le passage entre l'élastique inflexionnel et l'élastique non-inflexionnel.

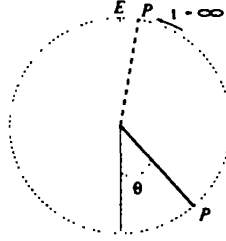


figure 14

Il y a deux types de courbes décrites par la projection sur le plan (x, y) des géodésiques du cas C. Le premier correspond à $\mu\sigma < 0$, i.e $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, le second à $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et intersecte en $-\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda}}$ le plan $\{y = 0\}$. Ils sont représentés en figure 15.

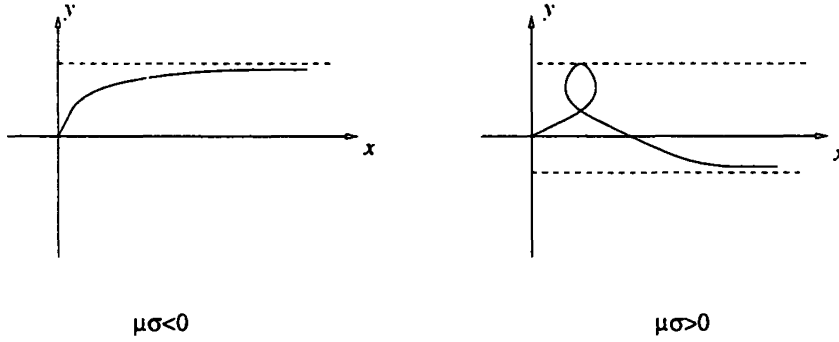


figure 15

3. Intersection du front d'onde $W(0, r)$ avec $\{y = 0\}$

Nous avons précédemment défini l'application R_n , $n \geq 1$, associant à (φ, λ) le couple (X_n, Z_n) donné par

$$q(t_n(\varphi, \lambda), \varphi, \lambda) = (X_n, 0, Z_n),$$

$t_n(\varphi, \lambda)$ étant le n -ième temps d'intersection strictement positif de q avec le plan $\{y = 0\}$.

D'après notre étude du paragraphe 2, le lemme suivant est immédiat.

LEMME 3.1. — Soit $\mathcal{D}_n \in S^1 \times \mathbb{R}^+$ le domaine de définition de l'application R_n . On a :

• $n = 1$:

$$\mathcal{L}_1 = (\lambda = 0, \varphi \neq n\pi) \cup (\lambda > 0, k'' \neq 0) \cup (\lambda > 0, k'' = 0, \varphi \in -]\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[).$$

• $n > 1$:

$$\mathcal{L}_n = (\lambda = 0, \varphi \neq n\pi) \cup (\lambda > 0, k'' \neq 0).$$

Soient $r > 0$ fixé et $C_n(r)$ l'image de \mathcal{L}_n par R_n en utilisant les géodésiques de longueur r . L'équation $t_n(\varphi, \lambda) = r$ induit une relation entre φ et λ , l'ensemble $C_n(r)$ est donc l'image d'une courbe $\Gamma_n(r)$ dans l'espace des paramètres (φ, λ) . D'après notre étude sur l'intersection des géodésiques avec la surface de Martinet nous devons distinguer les géodésiques ascendantes ($\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) des géodésiques descendantes lors de la construction de $\Gamma_n(r)$ pour n impair. Soit $\Gamma_n^+(r)$ (respectivement $\Gamma_n^-(r)$) la courbe correspondant aux valeurs $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (resp. $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$). Soit B_n et B_{-n} les images respectives de l'application R_n pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. On note b_n et b_{-n} les valeurs correspondant à $t_n(\pm\frac{\pi}{2}, \lambda) = r$. Pour n pair, on a $\Gamma_n^+(r) = \Gamma_n^-(r) \cup \{(b_n, b_{-n})\}$.

3.1. Étude des ensembles B_n et B_{-n}

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nous avons $2k'' = 2 - \frac{\varepsilon^2}{2\lambda}$ et $\eta(0) = -1$. Si $0 < \lambda < \frac{\varepsilon^2}{4}$, on se trouve dans la situation $k'' < 0$ avec $\psi = 0$ et on obtient

$$t_n\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \frac{2nK(\hat{k})}{k\sqrt{\lambda}} > \frac{2\pi}{|\varepsilon|}, \quad n \geq 1.$$

Pour r suffisamment petit ces valeurs ne vont pas intervenir dans notre étude. Soit $\lambda > 0$ tel que $k'' > 0$. D'après la proposition 2.3, nous avons $\phi = 0$ et

$$t_n\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \frac{4nK(k)}{\sqrt{\lambda}}.$$

C'est une fonction décroissante sur $] \lambda_\varphi, \infty[$ satisfaisant $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_n\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = 0$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\varphi} t_n\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \infty$. Soit B_n l'image par l'application R_n de l'ensemble $\left\{\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) ; \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } k'' > 0\right\}$. On montre aisément que B_n est paramétrisé par

$$X_n = \left(-\frac{4nK}{\sqrt{\lambda}} + \frac{8n}{\sqrt{\lambda}}E(K)\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\lambda}\right) = nX_1,$$

$$Z_n = \frac{4nK}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{2}{3\lambda} - \frac{2\varepsilon^2}{3\lambda^2}\right) + \frac{8n}{3\lambda^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2\varepsilon^2}{\lambda} - 1\right)E(K) = nZ_1.$$

De même, on peut étudier la courbe B_{-n} , image par R_n de $\left\{\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) ; \lambda \in \mathbb{R}^+\right\}$ (associée à $k'' < 0$ uniquement) où

$$t_n\left(-\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \frac{2nK(\hat{k})}{\sqrt{\lambda + \frac{\varepsilon^2}{4}}}$$

et

$$X_n = -\frac{2nK}{k\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^4}{2\lambda^2}\right) + \frac{4nk}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda}\right)E(K) = nX_1,$$

$$Z_n = \frac{1}{3\lambda^{\frac{3}{2}}}\left(\left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{\lambda}\right)4nkE(K) - \frac{2n\varepsilon^2K}{k\lambda}\left(\frac{5}{2} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda}\right)\right) = nZ_1.$$

Les courbes B_n, B_{-n} sont illustrées en figure 16.

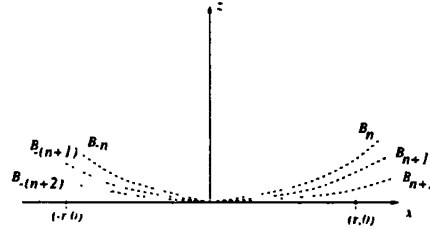


figure 16

3.2. Étude de l'application R_n pour n impair

Lorsque n est impair nous devons distinguer dans notre étude les géodésiques ascendantes et descendantes. Par ailleurs, en raison du rôle des séparatrices dans notre problème, voir remarque 2.7, nous allons séparer les cas $n = 1$ et n impair, $n \geq 3$.

3.2.1. n impair, $n = 1$.

L'analyse de la première intersection du front d'onde avec la surface de Martinet est détaillée dans [3]. Rappelons brièvement les résultats obtenus.

- $\Gamma_1^+(r)$

La courbe $\Gamma_1^+(r)$ correspond aux valeurs $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (géodésiques ascendantes). C'est une courbe dans l'espace des paramètres (φ, λ) intersectant exactement une fois l'ensemble $k'' = 0$ pour $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0[$. Suivant la remarque 2.1, cette courbe n'intersecte pas la droite $\lambda = 0$. L'ensemble $\Gamma_1^+(r)$ est dessiné en figure 17. Rappelons que $p_x = \sin \varphi \in$

$[-1, 1]$.

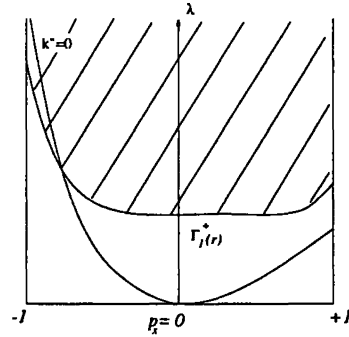


figure 17

L'image $C_1^+(r)$ de la courbe $\Gamma_1^+(r)$ par l'application R_1 est représentée en figure 18. C'est une courbe qui ne se ramifie pas en $(\pm r, 0)$, elle est délimitée par les courbes B_1, B_{-1} étudiées au paragraphe 3.1.

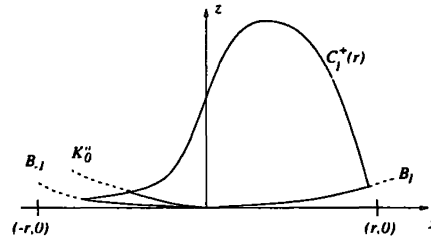


figure 18

• $\Gamma_1^-(r)$

Pour $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ la situation est sensiblement différente. En effet, d'après les remarques 2.1 et 2.7 l'ensemble $\Gamma_1^-(r)$ intersecte une fois $k'' = 0$ pour $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ et possède deux intersections symétriques avec $\lambda = 0$. Cet ensemble est donc formé de deux composantes connexes admettant la branche $k'' = 0$ comme direction asymptotique. Il est représenté en figure 19, la figure 20 décrivant $C_1^-(r)$ qui possède deux composantes se ramifiant en $(-r, 0)$, celle associée à $k'' < 0$ se trouvant dans le demi-plan $z < 0$ et

étant dénotée c_1 image de y_1 (c'_1 étant l'image de y'_1).

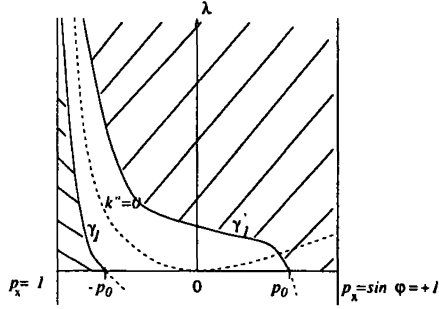


figure 19

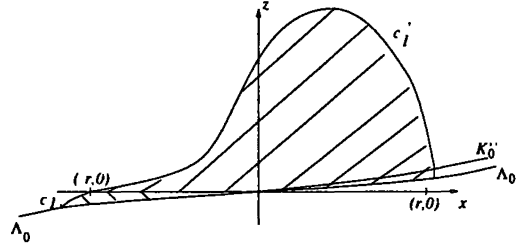


figure 20

3.2.2. n impair, $n \geq 3$.

Pour $n > 1$ et r suffisamment petit, les ensembles $\Gamma_n^+(r)$ et $\Gamma_n^-(r)$ n'intersectent ni la courbe $k'' = 0$, ni la droite $\lambda = 0$. La courbe $\Gamma_n^+(r)$ (resp. $\Gamma_n^-(r)$) est donc constituée de deux composantes connexes, une appartenant au domaine $k'' < 0$, dénotée y_n (resp. δ_n), et une au domaine $k'' > 0$: y'_n (resp. δ'_n).

• $\Gamma_n^+(r)$

Pour les géodésiques ascendantes la courbe y_n est caractérisée par la relation

$$r = t_n(\varphi, \lambda) = \frac{(n-1)K(\hat{k}) - 2\psi}{k\sqrt{\lambda}}.$$

Pour φ fixé, la fonction $t_n(\varphi, \cdot)$ a la propriété de posséder un unique minimum sur $]0, \lambda_\varphi[$ que nous dénoterons λ_m . Pour r fixé il existe donc φ_m tel que pour tout $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \varphi_m[$, il y a deux valeurs $\lambda_{1,\varphi}, \lambda_{2,\varphi}$ pour lesquelles $(\sin \varphi, \lambda_{1,\varphi})$ et $(\sin \varphi, \lambda_{2,\varphi})$ appartiennent à y_n . Cette branche de $\Gamma_n^+(r)$ possède donc une tangente verticale en φ_m et admet $k'' = 0$ comme direction asymptotique.

La composante y'_n est décrite par

$$r = t_n(\varphi, \lambda) = \frac{2(n+1)K(k) - 2\phi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Pour $\varphi \in [0, 2\pi \setminus \{\frac{3\pi}{2}\}]$, c'est une fonction décroissante sur l'intervalle $] \lambda_\varphi, \infty[$ satisfaisant $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\varphi} t_n(\varphi, \lambda) = \infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_n(\varphi, \lambda) = 0$. L'ensemble $k'' = 0$ est une direction asymptotique pour y'_n . La figure 21 illustre les courbes y_n et y'_n .

L'ensemble $C_n^+(r)$ constitué des images c_n et c'_n des courbes y_n et y'_n par l'application R_n est représenté en figure 22. Cet ensemble se ramifie au point $(-r, 0)$. L'image c_n de la composante y_n se ramifie sur la courbe B_{-p} et la courbe c'_n sur B_p , où $p = \frac{n+1}{2}$. Afin

d'avoir la représentation complète de $C_n^+(r)$ il faut ajouter les points b_n, b_{-n} , images de $p_x^2 = +1$ et appartenant respectivement aux courbe B_n et B_{-n} .

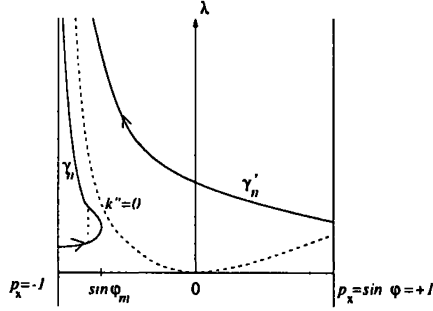


figure 21

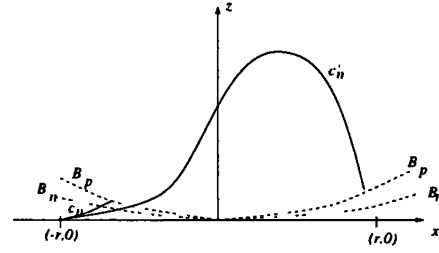


figure 22

• $\Gamma_n^-(r)$

L'ensemble $\Gamma_n^-(r)$ a exactement les mêmes propriétés que l'ensemble $\Gamma_n^+(r)$. Il est décrit par la relation $r = t_n(\varphi, \lambda) = \frac{(n+1)K(k)-2\psi}{k\sqrt{\lambda}}$ pour la courbe δ_n et par $r = t_n(\varphi, \lambda) = \frac{2(n+1)K(k)-2\phi}{\sqrt{\lambda}}$ pour δ'_n . Sa représentation est identique à celle de la figure 21 (la valeur du minimum φ_m est différente). L'ensemble $C_n^-(r)$ constitué des courbes d_n image de δ_n et d'_n image de δ'_n est ramifié en $(-r, 0)$ et délimité par les courbes B_p et B_{-p} où $p = \frac{n-1}{2}$. Il est illustré en figure 23.

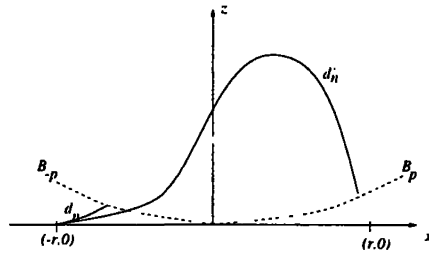


figure 23

3.3. Etude de l'application R_n pour n pair

Pour n pair, si r est suffisamment petit, nous pouvons supposer $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\lambda \neq 0$ (voir remarque 2.1). Soit donc $\lambda > 0$. D'après la remarque 2.7, la courbe $\Gamma_n(r)$ n'in-

tersecte pas l'ensemble critique $k'' = 0$ pour $n \geq 1$. On définit comme précédemment les courbes γ_n et γ'_n .

La composante γ_n est caractérisée par la relation

$$t_n(\varphi, \lambda) = \frac{nK(\hat{k})}{k\sqrt{\lambda}}.$$

Elle possède aussi la propriété d'avoir un unique minimum sur $]0, \lambda_\varphi[$. La courbe γ'_n est déterminée par $t_n(\varphi, \lambda) = \frac{2nK(k)}{\sqrt{\lambda}}$. La représentation de $\Gamma_n(r)$ est identique à celle de $\Gamma_n^+(r)$ pour n impair, $n \geq 3$, voir figure 21.

L'image $C_n(r)$ de l'ensemble $\Gamma_n(r)$ par l'application R_n est représentée en figure 24. Cet ensemble se ramifie au point $(-r, 0)$. L'image c_n de la composante γ_n se ramifie sur la courbe $B_{-\frac{n}{2}}$ et la courbe c'_n sur $B_{\frac{n}{2}}$. Il faut ajouter les points b_n, b_{-n} appartenant respectivement aux courbes B_n et B_{-n} .

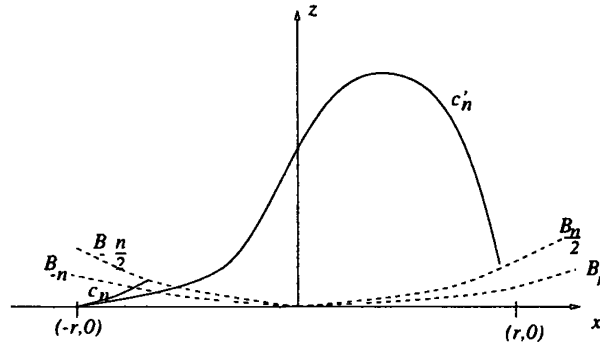


figure 24

3.4. Représentation de $W(0, r) \cap \{y = 0\}$

La figure 25 représente l'intersection du front d'onde $W(0, r)$, r petit, avec la surface de Martinet $\{y = 0\}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

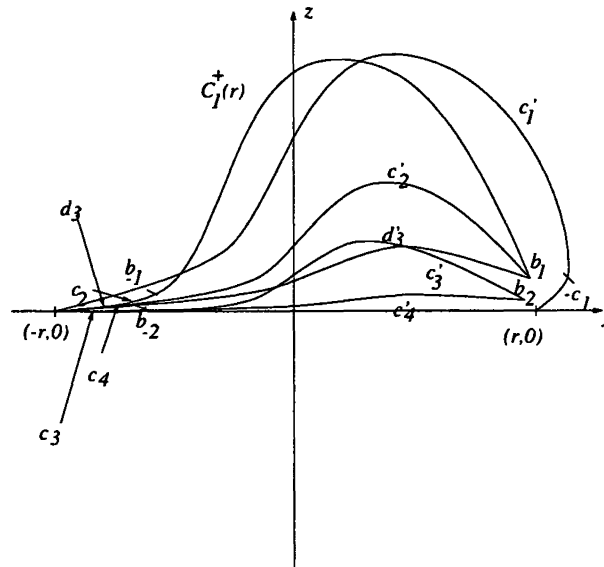


figure 25

Bibliographie

- [1] A. AGRACHEV, B. BONNARD, M. CHYBA, I. KUPKA : *Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case*, ESAIM :COCV, Vol. 2, 377-448, 1997.
- [2] A. AGRACHEV, C. EL ALAOU, J.-P. GAUTHIER : *Sub-Riemannian metrics on \mathbf{R}^3* , Geometric Control and Non-holonomic Problems in Mechanics, Conference Proceedings Series, Canad. Math. Soc., 1998.
- [3] B. BONNARD, M. CHYBA : *Méthodes géométriques et analytiques pour étudier l'application exponentielle, la sphère et le front d'onde en géométrie sous-riemannienne dans le cas Martinet*, à paraître dans ESAIM :COCV, 1999.
- [4] D. F. LAWDER : *Elliptic functions and applications*, Springer-Verlag, New-York, 1989.
- [5] L. PONTRYAGIN ET AL. : *Théorie mathématiques des processus optimaux*, Ed. Mir, Moscou, 1974.

Monique CHYBA
 Université de Paris VI
 Case 247
 4 Place Jussieu
 75252 Paris Cedex 05 (France)
 E-mail: chyba@sunny.unige.ch