YUXIN GE

Inégalité de Wente et ses applications aux H-surfaces

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 16 (1997-1998), p. 211-216
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1997-1998__16__211_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **16** (1998) (211–216)

INÉGALITÉ DE WENTE ET SES APPLICATIONS AUX H-SURFACES

Yuxin GE

Dans cet exposé, je vais présenter quelques résultats concernant l'inégalité de Wente. D'abord, on étudie la meilleure constante pour la norme L^2 . Ainsi, on obtient une nouvelle fonctionnelle qui est liée de façon surprenante aux surfaces à courbure moyenne constante. Mais la minimisation de cette fonctionnelle est rendue problématique à cause d'un phénomène de concentration dû à l'action du groupe conforme non compact qui la laisse invariante. On cherche alors des points critiques non minimisants. On le fait à l'aide d'une méthode dite "topologique" introduite par J.-M. Coron [C]. Cette méthode permet en particulier de prouver l'existence de points critiques non minimisants pour des domaines qui sont des disques privés de trous suffisant petits. On applique d'autre part la méthode de minimisation sur l'espace des fonctions symétriques sous l'action d'un groupe discret pour chercher des points critiques quand le domaine est un anneau quelconque.

1. Surfaces à courbure moyenne constante et inégalité de Wente

Les surfaces à courbure moyenne constante sont celles dont la courbure moyenne est partout égale à une constante $H \in \mathbb{R}$. Les sphères ainsi que les bulles de savons sous une pression constante sont des exemples concrets. Dans les coordonnés conformes, une telle surface $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfait le système suivant

$$-\Delta u = 2H u_x \wedge u_y, \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$
$$|u_x|^2 - |u_y|^2 - 2i\langle u_x, u_y\rangle = 0, \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

Si $H \neq 0$, on se ramène au cas où $H = 1$, par une dilatation et un changement d'orientation. De plus, il est de type variationnel. Des solutions de ce système sur le disque unité $B(0,1)$ peuvent être obtenues comme des points critiques de la fonctionnelle d'énergie

Classification math. : 35J60, 35B45, 53C42

classique

$$E_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy - \frac{2H}{3}\int_\Omega u \cdot u_x \wedge u_y dxdy. \tag{3}$$

L'existence des solutions minimisantes pour le problème de Plateau a été obtenue par S. Hildebrandt [Hi] sous l'hypothèse que $|H|diam(\Gamma) \leqslant 2$, où Γ est une courbe de Jordan. Dans [BC], H. Brezis and J.M. Coron ont trouvé une seconde solution non minimisante. En général, l'équation (1) est à comprendre au sens des distributions car à priori, on n'a seulement que $u \in H^1$. Pour obtenir la régularité des solutions faibles de (1), on a besoin d'un résultat dû à H. Wente [W1] (voir aussi [BC]).

Lemme 1. *Soit Ω un domaine borné régulier dans $\mathbb{R}^2$. Etant données deux fonctions $a, b \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$, on note φ la solution unique dans $W^{1,1}(\Omega)$ du problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi &= \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a, \quad dans\,\Omega \\ \varphi &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad sur\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Alors φ est continue sur $\bar\Omega$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C_0(\Omega)$ ne dépendant que de Ω tel que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_0(\Omega)\|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla b\|_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

■

Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est qu'il ne peut pas être obtenu par une application directe de la théorie de Calderon-Zygmund, à savoir en utilisant le fait que le second membre de (4) est dans $L^1(\Omega)$. En fait, ce résultat provient de la structure algébrique de $\partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a$, ce phénomène est à la base de la théorie de la compacité par compensation. En 1992, F. Bethuel et J. M. Ghidaglia [BG] ont prouvé que l'on peut trouver une majoration de $C_0(\Omega)$ pour tous les domaines. On s'intéresse ici aux constantes optimales. Plus précisement, on va étudier les constantes suivantes

$$C_\infty(\Omega) = \sup_{a,b\in H^1\setminus\{0\}} \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\nabla a\|_2\|\nabla b\|_2}, \tag{6}$$

$$C_2(\Omega) = \sup_{a,b\in H^1\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla\varphi\|_2}{\|\nabla a\|_2\|\nabla b\|_2}. \tag{7}$$

Remarque. On note que ces constantes sont invariantes par transformations conformes et donc ne dépendent que de la structure conforme de Ω. Donc on peut étudier ces constantes sur une surface de Riemann en général.

S. Baraket [B] a obtenu que $C_\infty(\Omega) = \dfrac{1}{2\pi}$ pour tout domaine simplement connexe. Et puis, P. Topping [T] a généralisé ce résultat dans le cas général. Dans cet exposé, on va étudier $C_2(\Omega)$, ou de la façon équivalente

$$\bar{C}_2(\Omega) = \inf_{a,b\in H^1\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla a\|_2^2 + \|\nabla b\|_2^2}{2\|\nabla\varphi\|_2}.$$

Pour cela, on considère la fonctionnelle d'énergie

$$E(a,b,\Omega) = \frac{1}{2}(\|\nabla a\|_2^2 + \|\nabla b\|_2^2), \text{ pour tout } (a,b) \in \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ est une variété hilbertienne de dimension infinie $\mathcal{N} = \{(a,b) \in H^1\times H^1, \|\nabla\varphi\|_{L^2} = 1\}$. Pour déterminer $C_2(\Omega)$, on fait l'appel à l'inégalité isopérimétrique. On peut établir le résultat suivant

Théorème 1. *On a*

$$C_2(\Omega) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}.$$

De plus, la meilleure constante est atteinte si et seulement si Ω est simplement connexe. Si Ω est le disque uinté dans $\mathbb{R}^2$, $\Omega = B(0,1) = \{(x,y)/r = \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$, alors l'application $(\frac{x}{1+r^2}, \frac{y}{1+r^2})$ réalise la meilleure constante. ■

2. Applications aux H-surfaces

On établit tout d'abord l'équation d'Euler-Lagrange pour des points critiques de la fonctionnelle $E(a,b,\Omega)$.

Théorème 2.[H] *Soit $(a,b) \in \mathcal{N}$ un point criticque de E. Alors*

1. *il existe $\lambda = \|\nabla a\|_2 = \|\nabla b\|_2$ tel que $\Psi = (a_1, b_1, \varphi_1) = (\lambda a, \lambda b, \lambda^2\varphi)$ satisfait:*

$$\begin{cases} -\triangle\varphi_1 = \{a_1, b_1\} & \textit{dans}\,\Omega, \\ -\triangle a_1 = \{b_1, \varphi_1\} & \textit{dans}\,\Omega, \\ -\triangle b_1 = \{\varphi_1, a_1\} & \textit{dans}\,\Omega, \\ \frac{\partial a_1}{\partial n} = \frac{\partial b_1}{\partial n} = \varphi_1 = 0 & \textit{sur}\,\partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

   où $\{\xi,\eta\} = \partial_x\xi\partial_y\eta - \partial_y\xi\partial_x\eta$ et $n = (n^1, n^2)$ est vecteur normal unité sur $\partial\Omega$;

2. *Ψ est de C^∞ sur $\overline{\Omega}$;*
3. *la différentielle de Hopf $\omega = \langle\partial_z\Psi, \partial_z\Psi\rangle$ est holomorphe. De plus, si on note $t = -n^2 + in^1$ le vecteur unité tangent le long de $\partial\Omega$, on a $Im(\omega t^2) = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent, si Ω est simplement connexe, alors Ψ est conforme; si Ω est un anneau, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\langle\partial_z\Psi, \partial_z\Psi\rangle = \frac{c}{z^2}$.*

■

En 1984, H. Wente [W2] a construit une immersion à courbure moyenne constante d'un tore vers $\mathbb{R}^3$. Vu l'équation d'Euler, le tore de Wente provient d'un point critique de la fonctionnelle E sur un anneau. En effet, supposant que $\Psi = (a_1, b_1, \varphi_1) = (\lambda a, \lambda b, \lambda^2\varphi)$ est un point critique de E sur un anneau, on construit $P = \Omega \bigcup_{\partial\Omega} \tilde{\Omega}$ la surface de Riemann obtenue en recollant Ω le long du bord avec $\tilde{\Omega}$, une copie de Ω munie d'une orientation opposée. Le prolongement de Ψ est construit en prenant $\tilde{\Psi} = \Psi$ sur Ω et $\tilde{\Psi} = (\lambda a, \lambda b, -\lambda^2\varphi)$ sur $\tilde{\Omega}$. Dans le cas où cette application est conforme, son image est un tore à courbure moyenne constante. C'est le cas du tore de Wente qui correspond à un point critique de E sur un anneau qui vérifie en plus la condition de conformité. A la lumière de cet!!!! te observation, on peut se proposer de construire des surfaces à courbure moyenne constante comme le tore de Wente en resolvant (1) et (2) variationnellement. La première étape consiste à étudier l'équation (1) à l'aide de E. D'après le théorème 1, si Ω n'est pas simplement connexe, il n'y a pas de solutions minimisantes. Donc il faut chercher des points critiques non minimisants. Pour cela, on étudie d'abord les propriétés d'une suite minimisante de E. Le théorème suivant donne la description complète d'une telle suite.

Théorème 3. (Concentration) *Si Ω est simplement connexe, il existe un certain (a, b, φ) qui est une solution de (8) tel que*

$$E(a, b, \Omega) = \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}} E(\alpha, \beta, \Omega).$$

De plus, si (a_n, b_n, φ_n) une suite minimisante de E avec $(a_n, b_n) \in \mathcal{N}$ et $\int_\Omega a_n = \int_\Omega b_n = 0$, alors (a_n, b_n, φ_n) aux transformations conformes près est relativement compacte dans $(H^1)^3$. Si Ω n'est pas simplement connexe, alors il existe $z_0 \in \partial\Omega$ tel que

$$(|\nabla a_n|^2, |\nabla b_n|^2, |\nabla\varphi_n|^2) \longrightarrow (\tilde{C}_2(\Omega), \tilde{C}_2(\Omega), 1)\delta_{z_0} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

où δ_{z_0} est la mesure de Dirac concentrée dans z_0. ∎

Ce théorème signifie que si Ω n'est pas simplement connexe, un phénomène de concentration apparaît et le minimum n'est pas atteint. Le même fait a été observé par P.L. Lions [L] pour l'injection de Sobolev dans le cas limite. On se rappelle que l'énergie E est invariante sous l'action du groupe conforme. C'est le groupe conforme non compact du disque qui entraîne de la perte de la compacité. D'autre part, une application directe de ce théorème permet de déduire immédiatement que l'ensemble de niveau proche du minimum a une topologie non triviale. Plus précisement, on a

Corollaire 1. *Soit $E_{\mathcal{N}}^{\gamma} = \{(a, b) \in \mathcal{N}, E(a, b, \Omega) \leqslant \gamma\}$ et supposons Ω non simplement connexe. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que si $\gamma < \tilde{C}_2(\Omega) + \epsilon$, alors $E_{\mathcal{N}}^{\gamma}$ a la même topologie que $\partial\Omega$.* ∎

Par ailleurs, on étudie les propriétés asymptotiques d'une suite de Palais-Smale.

Théorème 4. *E satisfait la condition de Palais-Smale pour tout $\beta \in (\tilde{C}_2(\Omega), \sqrt{2}\tilde{C}_2(\Omega))$. Précisement, si $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ est une suite de Palais-Smale, c'est-à-dire si $\{(a_n, b_n)\}$ vérifie*

$$E_1(a_n, b_n) \to \beta \in (\tilde{C}_2(\Omega), \sqrt{2}\tilde{C}_2(\Omega)), \tag{9}$$

$$DE_1(a_n, b_n) \to 0, \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \qquad \text{quand } n \to \infty. \tag{10}$$

alors il existe $a, b \in H^1(\Omega)$ tel que, quitte à extraire une sous suite,

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b, \text{ dans } H^1(\Omega).$$

■

En combinant le corollaire 1, le théorème 4 et quelques arguments supplémentaires, on peut conclure

Théorème 5. *Soit $\{z_i\}_{i=1}^n$ une famille des points disjoints dans $B(0,1)$. Alors il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si $r_i < \epsilon_1$ $\forall i = 1, ..., n$, pour tout $\Omega_r = B(0,1) \setminus \bigcup_{i=1}^n B(z_i, r_i)$, E admet au moins un point critique non trivial.* ■

La démonstration repose sur une étude détaillée de la topologie des ensembles de niveau de E mentionnée ci dessus. On applique la stratégie de J.M. Coron [C]: on construit un lacet dans $\mathcal{N}$ qui n'est pas trivial dans $E_{\mathcal{N}}^{\gamma}$ pour γ proche de $\tilde{C}_2(\Omega)$. Mais il l'est dans $E_{\mathcal{N}}^{\sqrt{2}\tilde{C}_2(\Omega)}$. En raisonnant par l'absurde, si E n'admettait pas de points critiques dans $E_{\mathcal{N}}^{\sqrt{2}\tilde{C}_2(\Omega)}$, on obtiendrait une contradiction sous certaines conditions (voir [G] pour les détails).

On note que des points critiques de ce problème variationnel ne conduisent pas nécessairement à des solutions conformes (solutions du système (1) et (2)). En fait, ωdz^2 est une forme quadratique holomorphe sur P. La dimension du sous-espace vectoriel des formes quadratiques holomorphes est égale à celle de l'espace des modules des structures complexes sur P. En conséquence, pour chercher une solution conforme, il faut varier aussi la structure conforme en même temps.

Récemment, avec F. Hélein [GH], Nous avons démontré le résultat suivant

Théorème 6. *Soit $\Omega_r = B(0,1) \setminus B(0,r)$ avec $0 < r < 1$ un anneau quelconque. Alors le système (8) admet au moins une solution non triviale.* ■

Une première remarque est que le système (8) est équivariant sous l'action d'un groupe discret. Ainsi, on peut appliquer une procédure de minimisation sur un espace des fonctions symétriques. Pour cela, on considère un sous ensemble de $H^1 \times H^1$

$$F_m = \{\Theta = (a,b) \in H^1 \times H^1, \Theta \circ A = A \circ \Theta\},$$

où A est la rotation d'un angle $2\pi/m$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons montré que l'on peut minimiser la fonctionnelle d'énergie E sur F_m pour tout m assez grand quand r est fixé et que ces minima sont juste des solutions non triviales de (8).

Bibliographie

[1] S. Baraket, *Estimations of the best constant involving the L^∞ norm in Wente's inequality*, à paraître dans Annales de l'Université Paul Satatier.

[2] H. Brezis et J. M. Coron, *Multiple solutions of H-systemes and Rellich's conjecture*, Comm. Pure. Appl. Math, **37** (1984), 149–187.

[3] F. Bethuel et J. M. Ghidaglia, *Improved regularity of elliptic equations involving jacobians and applications*, J. Math. Pure. Appl **72** (1993), 441–475.

[4] J. M. Coron, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C. R. Acad. Sc. Paris, **299**, Ser. I (1984), 209–212.

[5] Y. Ge, *Estimations of the best constant involving the L^2 norm in Wente's inequality and compact H-surfaces into Euclidean space*, COCV, Vol. **3** (1998), 263–300.

[6] Y. Ge et F. Hélein, *A remark on compact H-surfaces into $\mathbb{R}^3$*, en préparation.

[7] F. Hélein, *Applications harmoniques, lois de conservation et repère mobile*, Diderot éditeur, Paris-New York-Amsterdam, (1996), ou *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Diderot éditeur, Paris-New York-Amsterdam, (1997).

[8] S. Hildebrandt, *On the Plateau problem for the surfaces of constant mean curvature*, Comm. Pure. Appl. Math, **23** (1970), 97–114.

[9] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case. Part I and Part II*, Rev. Mat. Ibero. **1**(1) (1985), 145–201 and **1**(2) (1985), 45–121.

[10] P. Topping, *The Optimal Constant in Wente's L^∞ Estimate*, Comment. Math. Helv., **72** (1997), 316–328.

[11] H. Wente, *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl, **26** (1969), 318–344; *Large solutions to the volume constraint Plateau problem*, Arch. rat. Mech. Anal, **75** (1980), 59–77.

[12] H. Wente, *Counter-example to a conjecture of H. Hopf*, Pacific. J. Math, **121** (1986), 193–243.

Yuxin GE
C.M.L.A., E.N.S de Cachan
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN Cedex (France)
et
Département de Mathématiques
Faculté de Sciences et Technologie
Université Paris XII-Val de Marne
61, avenue du Général de Gaulle
94010 CRÉTEIL Cedex (France)

e-mail : ge@cmla.ens-cachan.fr