Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Olivier Biquard
Paul Gauduchon

# Géométrie hyperkählérienne des espaces hermitiens symétriques complexifiés

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 16 (1997-1998), p. 127-173
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1997-1998__16__127_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1997-1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **16** (1998) (127–173)

# GÉOMÉTRIE HYPERKÄHLÉRIENNE DES ESPACES HERMITIENS SYMÉTRIQUES COMPLEXIFIÉS

*Olivier BIQUARD et Paul GAUDUCHON*

L'intérêt porté aux *structures hyperkählériennes* a considérablement progressé à partir des années 80 avec la découverte de procédés généraux de construction, tels que constructions twistorielles ou constructions par réduction (tri)symplectique à partir de modèles simples (plats) soit de dimension finie, soit de dimension infinie dans le cadre des théories de jauge (nous renvoyons le lecteur à [17] pour un exposé de la situation en 1991) ; le théorème de Calabi-Yau, démontré à la fin des années 70, a aussi comme corollaire direct un théorème d'existence très général de métriques hyperkählériennes dans le cas compact (voir paragraphe 1.4).

Toutefois, les exemples *explicites* de métriques hyperkählérienne sont peu nombreux, ce qui d'ailleurs ne doit pas trop surprendre puisque ces métriques sont à tenseur de Ricci nul ; il est bien connu que les métriques kählériennes (ici, hyperkählériennes) dont l'existence est démontrée via le théorème de Calabi-Yau, par exemple sur les *surfaces K3*, sont non-explicites (en fait, aucune métrique hyperkählérienne sur une variété compacte n'est connue explicitement à ce jour, en dehors de certains tores plats) ; de même, les techniques twistorielles ou de réduction symplectique aboutissent à des systèmes d'équations algébriques dont la résolution explicite n'est pas envisageable en général.

Les premiers exemples explicites (non plats) de métriques hyperkählériennes comprennent la *métrique de Eguchi-Hanson* et les métriques construites par E. Calabi [9] (à qui est dû le terme *hyperkählérien* ) sur l'espace total du fibré cotangent holomorphe des espaces projectifs complexes (voir paragraphe 1.5) ; la formule de potentiel donnée en [9] a été étendue (vingt ans après ...) en [6] aux espaces cotangents des espaces hermitiens symétriques de type compact (voir paragraphe 1.6), puis, une formule explicite — étonnamment simple — pour le potentiel d'une métrique hyperkählérienne sur les orbites coadjointes *de type symétrique* des groupes de Lie complexes semi-simples a été donnée en [7] (voir paragraphe 1.10).

L'objet principal de cet article est d'identifier dans un sens qui sera précisé plus loin

*Classification math.* : 53C25, 53C55.

(cf. Théorème 3) les structures hyperkählériennes construites en [6] et [7] et de développer certains aspects de ces métriques qui n'ont été que peu ou pas abordés en [6], [7].

L'article est divisé en cinq parties; dans la première, nous rappelons certaines propriétés générales des structures hyperkählériennes ainsi que les constructions explicites figurant en [6], [7] ; dans la deuxième partie nous montrons que ces deux constructions peuvent être explicitement identifiées l'une à l'autre ( Théorème 3 ) ; dans la troisième partie, nous donnons des informations supplémentaires concernant certains aspects de la géométrie hyperkählérienne des orbites adjointes complexes de type symétrique : détermination du potentiel, calcul des moments de l'action du groupe compact, description de l'action du groupe $S^1$ déduite de l'action naturelle de $S^1$ sur le fibré cotangent, etc.; dans la quatrième partie, nous développons l'exemple des *grassmanniennes complexifiées*, qui sont les orbites adjointes de type symétrique du groupe spécial linéaire $Sl(n, \mathbb{C})$ ; dans la dernière partie, nous montrons comment la *formule de Kobak-Swann*, donnant le potentiel d'une métrique hyperkählérienne sur l'orbite adjointe *nilpotente* régulière de $Sl(3, \mathbb{C})$ peut être retrouvée simplement à partir des constructions précédentes.

## Table des matières

**1 Définitions et rappel de résultats** **129**

1.1 Généralités sur les structures hyperkählériennes . . . . . 129

1.2 La dimension 4 . . . . . 130

1.3 Forme symplectique holomorphe associée à une structure hyperkählérienne . . . . . 131

1.4 Métriques hyperkählériennes dans le cas non-compact . . . . . 132

1.5 Exemples explicites de métriques hyperkählériennes . . . . . 133

1.6 Métriques hyperkählériennes sur l'espace cotangent d'un espace hermitien symétrique de type compact . . . . . 134

1.7 Géométrie des orbites adjointes d'une groupe de Lie compact semi-simple 134

1.8 Note sur certaines identifications . . . . . 137

1.9 Géométrie des orbites symétriques . . . . . 138

1.10 Métriques hyperkählériennes sur les orbites adjointes complexes de type symétrique . . . . . 140

1.11 Notations . . . . . 141

**2 Identification des structures hyperkählériennes** **141**

2.1 Potentiel de la métrique hyperkählérienne relatif à $J_2$ . . . . . 142

2.2 Action holomorphe de $G^c$ sur $(T^*\mathcal{O}, J_2)$ . . . . . 144

2.3 Construction de $\Phi$ . . . . . 146
2.4 La structure complexe $I_2$ de $\mathscr{O}^c$ . . . . . 147
2.5 Fin de la démonstration du Théorème 3 . . . . . 148

**3 Potentiel, moments et action de $S^1$ 149**
3.1 Calcul effectif du potentiel . . . . . 149
3.2 Action de $S^1$ sur l'orbite complexe . . . . . 150
3.3 Applications-moment . . . . . 153
3.4 Équations de Nahm . . . . . 154

**4 Un exemple : métriques hyperkählériennes sur les grassmanniennes complexifiées 156**
4.1 Les grassmanniennes complexifiées . . . . . 156
4.2 Action de $S^1$ sur les grassmanniennes complexifiées . . . . . 159
4.3 Le cas où $G = SU(2)$ : la métrique de Eguchi-Hanson . . . . . 160

**5 Les orbites adjointes régulières de $Sl(3, \mathbb{C})$ 162**
5.1 Orbites de $Sl(3, \mathbb{C})$ et orbites de type symétrique de $Sl(4, \mathbb{C})$ . . . . . 162
5.2 Le cas nilpotent : la formule de Kobak-Swann . . . . . 166
5.3 Le cas semi-simple . . . . . 169
5.4 Formulation alternative . . . . . 170

## 1. Définitions et rappel de résultats

Dans toute la suite, $M$ désigne une variété différentiable orientée, connexe, de dimension (réelle) $n$ ; tous les objets introduits sont $C^\infty$.

### 1.1. Généralités sur les structures hyperkählériennes

Une *structure kählérienne* $(g, I)$ sur $M$ est la donnée d'une métrique riemannienne $g$ et d'une structure presque-complexe $g$-orthogonale $I$, parallèle relativement à la connexion de Levi-Civita de $g$ ; en particulier, $I$ est intégrable et la *forme de Kähler* $\omega$, définie par $\omega = g(I\cdot, \cdot)$, est fermée ; inversement, si $I$ est une structure presque-complexe $g$-orthogonale intégrable et si la forme de Kähler $\omega$ est fermée, la paire $(g, I)$ est une structure kählérienne [23]. Un *potentiel kählérien* est une fonction réelle $\rho$ telle que $\omega = dd^c\rho$ ; une telle fonction existe toujours localement [29].

Une *structure hyperkählérienne* $(g, I_1, I_2)$ sur $M$ est la donnée de *deux* structures kählériennes $(g, I_1)$, $(g, I_2)$ relatives à une même métrique riemannienne $g$, telles que

$$I_1 I_2 = -I_2 I_1. \tag{1.1}$$

Nous obtenons une troisième structure kählérienne $(g, I_3)$ en posant $I_3 = I_1 I_2$, puis une sphère de structures kählériennes $(g, I_a)$ en posant $I_a := \sum_{i=1}^{3} a_i I_i$ pour tout élément $a = (a_1, a_2, a_3)$ de la sphère unité $S^2$ de $\mathbb{R}^3$.

L'action de $I_1, I_2, I_3$, identifiée à celle des quaternions $i, j, k$ (notation usuelle), fait du fibré tangent $TM$ un $\mathbb{H}$-fibré vectoriel ; en particulier, $n = 4k$ est un multiple de 4.

La métrique $g$ admet localement un potentiel kählérien relativement à chacune des structures complexes $I_a$ ; ces potentiels sont en général distincts (nous en verrons une illustration plus bas); le terme *potentiel hyperkählérien* est réservé au cas où on peut choisir un même potentiel (local) pour tous les $I_a$.

Une métrique riemannienne $g$ sur $M$ est dite *hyperkählérienne* s'il existe des structures complexes $I_1, I_2$ telles que $(g, I_1, I_2)$ soit une structure hyperkählérienne ; de façon équivalente, $g$ est hyperkählérienne si son groupe d'holonomie est conjugué au sous-groupe $Sp(k)$ de $SO(4k)$ ; comme $SO(4k)$ est contenu dans $SU(2k)$, *le tenseur de Ricci d'une métrique hyperkählérienne est identiquement nul.* En outre, $g$ est analytique (au sens réel) relativement à la structure analytique déterminée par chaque structure complexe $I_a$.

### 1.2. La dimension 4

Le cas de la dimension 4, dimension minimale pour une variété pouvant admettre une métrique hyperkählérienne, mérite une mention particulière à cause du résultat bien-connu suivant :

PROPOSITION 1. — *Si $n = 4$, une métrique riemannienne $g$ dont le tenseur de Ricci $Ric^g$ est identiquement nul est localement la métrique d'une structure hyperkählérienne $(g, I_1, I_2)$ si et seulement elle est anti-autoduale, i.e. le demi-tenseur de Weyl positif $W^+$ est identiquement nul (en choisissant a posteriori l'orientation induite par $I_1, I_2$)*

*Démonstration.* — En dimension 4, les structures presque-complexes compatibles avec la métrique $g$ et l'orientation de $M$ sont identifiées aux sections de norme $\sqrt{2}$ du fibré $\Lambda^+ M$ (de rang 3) des 2-formes autoduales ; la structure presque-hermitienne correspondante est kählérienne si et seulement si cette section est parallèle pour la connexion induite sur $\Lambda^+ M$ par la connexion de Levi-Civita ; celle-ci est plate si et seulement si $Ric^g$ et $W^+$ sont nuls. □

En dimension 4, une structure hyperkählérienne est déterminée par la métrique (et l'orientation) au sens faible suivant : la sphère $\{I_a\}$ de structures complexes coïncide

avec la sphère des sections de norme $\sqrt{2}$ de $\Lambda^+ M$ (pour obtenir une structure hyperkählérienne stricto sensu, il faut spécifier en outre deux éléments orthogonaux de cette sphère).

Les variétés riemannienne de dimension 4 dont la courbure satisfait les propriétés de la proposition 1 sont connues dans la littérature relativiste sous le nom d'*instantons* ou *multi-instantons gravitationnels* : ce sont (en version riemannienne toutefois) des solutions de l'équation d'Einstein dans le vide, dont la courbure, réduite au demi-tenseur de Weyl anti-autodual $W^-$, peut être interprétée comme une « particule de spin 2 » (en langage spinoriel, $W^-$ est une section de $S^4(\Sigma^- M)$, puissance tensorielle complexe quatrième du fibré $\Sigma^- M$ des spineurs négatifs de $M$, cf. par exemple [1]).

Les instantons gravitationnels admettant un champ de Killing $T$ sans zéro et préservant chaque section parallèle de $\Lambda^+ M$ sont codés par les fonctions harmoniques réelles positives définies sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^3$ ; de façon explicite, si $V$ est une telle fonction, la métrique riemannienne $g$ associée est définie par

$$g = V \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 + V^{-1} (dt - \alpha)^2, \tag{1.2}$$

où les $x_i$ sont les coordonnées naturelles de $\mathbb{R}^3$, $t$ une coordonnée supplémentaire et $\alpha$ une 1-forme réelle telle que $V = * d\alpha$, où $*$ est l'opérateur de Hodge canonique de $\mathbb{R}^3$ (comme $V$ est harmonique, une telle forme existe localement) ; on a alors $T = \frac{\partial}{\partial t}$ ; cette construction est connue sous le nom de *Ansatz de Gibbons-Hawking* [13], cf. aussi [16] ; ces exemples sont résolument non-compacts dès que $V$ est non-constant (sur une variété riemannienne *compacte* dont le tenseur de Ricci est nul, tout champ de Killing est parallèle, en particulier de norme constante) ; les seules variétés hyperkählériennes *compactes* de dimension 4, en dehors du cas trivial des tores plats, sont les *surfaces K3* munies d'une métrique de Calabi-Yau, cf. paragraphe 1.4.

### 1.3. Forme symplectique holomorphe associée à une structure hyperkählérienne

Si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ désignent les formes de Kähler de $(g, I_1)$, $(g, I_2)$, $(g, I_3)$, la 2-forme *complexe* $\Omega := \omega_2 + i\,\omega_3$ est de type $(2,0)$ relativement à $I_1$ et constitue de ce fait une *forme symplectique holomorphe* sur la variété complexe $(M, I_1)$.

Dans le cas où $M$ est munie au départ, comme les exemples du paragraphe suivant, d'une *structure symplectique complexe*, i.e. d'une structure complexe et d'une forme symplectique holomorphe $\Omega$, nous réserverons la qualité de métrique hyperkählérienne aux métriques riemannienne $g$ vérifiant la condition suivante : $(g, I_1, I_2)$ est une structure hyperkählérienne, où $I_1 = I$ et $I_2$ est le champ d'automorphismes de $TM$ déterminé par :

$$\mathfrak{Re}\,\Omega = g(I_2 \cdot, \cdot); \tag{1.3}$$

la condition que $(g, I_1, I_2)$ soit hyperkählérienne inclut en particulier que le champ d'au-

tomorphismes $I_2$ défini par (1.3) est de carré $-1$ ; cette dernière condition est en fait suffisante :

LEMME 1. — *Une métrique riemannienne g kählérienne relativement à I est hyperkählérienne (relativement à $(I, \Omega)$) si et seulement si le champ d'automorphismes $I_2$ défini par (1.3) est de carré $-1$.*

*Démonstration.* — Conséquence directe d'un lemme général dû à N. Hitchin qu'on peut énoncer ainsi (la preuve — facile — figure en [16])

LEMME 2. — *Soient deux formes symplectiques $\omega, \omega'$ et une structure presque-complexes I liées par*

$$\omega' = \omega(I\cdot, \cdot);$$

*alors, I est intégrable.*

Nous appliquons ce lemme au cas où $\omega = \omega_1$, la forme de Kähler de $(g, I)$, et $\omega' = \Im m\, \Omega$ ; nous montrons ainsi que $I_2$ est intégrable, donc que $(g, I_2)$ est une paire kählérienne puisque la forme de Kähler $\Re e\, \Omega$ est fermée; le fait que $I_1 = I$ et $I_2$ anticommutent résulte de ce que $\Omega$ est de type $(2, 0)$ relativement à $I$. □

On notera que $\Omega^{\wedge 2k}$ est une section parallèle non-triviale du fibré canonique $K_I$ de $(M, I)$ ; ceci implique que le tenseur de Ricci de $g$, qui est essentiellement la courbure de la connexion de Levi-Civita induite sur $K_I$, est identiquement nul comme il a déjà été observé.

### 1.4. Métriques hyperkählériennes dans le cas non-compact

Nous rappelons le résultat bien-connu suivant, conséquence facile du Théorème de Calabi-Yau (voir [2]) :

PROPOSITION 2. — *Toute variété symplectique complexe $(M, I, \Omega)$ compacte kählérienne possède une métrique hyperkählérienne.*

*Démonstration.* — Le fibré canonique $K$ de $(M, I)$ est trivialisé par $\Omega^{\wedge 2k}$ ; la première classe de Chern de $(M, I)$ est donc nulle ; par le théorème de Calabi-Yau [30] , il existe une métrique kählérienne $g_0$ sur $M$ dont le tenseur de Ricci est nul ; pour une telle métrique, tous les champs de tenseurs holomorphes *covariants* sont parallèles pour la connexion de Levi-Civita [24]; c'est le cas en particulier de $\Omega$, donc aussi de $\omega_2 = \Re e\, \Omega$ et $\omega_3 = \Im m\, \Omega$ ; ainsi, l'opérateur $I_2$ défini par (1.3) est parallèle et induit une décomposition de $g_0$ ; on peut alors modifier les poids des composants de $g_0$ de façon que $I_2$ soit de carré $-1$. □

Le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas au cas où $M$ est non-compacte.

Parmi les variétés complexes naturellement pourvues d'une forme symplectique holomorphe figurent l'espace total $T^*\Sigma$ du fibré cotangent (holomorphe) $T^*\Sigma$ d'une

variété complexe $\Sigma$ et les orbites coadjointes d'un groupe de Lie complexe, munies de leurs structures complexes naturelles ; dans le premier cas, la forme $\Omega$ est la forme de Liouville; dans le second cas, $\Omega$ est la forme de Kirillov-Kostant-Souriau.

L'existence une métrique hyperkählérienne (complète, invariante sous l'action induite du groupe d'isométries) sur $T^*\Sigma$, quand $\Sigma$ est une variété kählérienne homogène compacte simplement-connexe a été établie en [9] par E. Calabi dans le cas où $\Sigma$ est l'espace projectif complexe, par D. Burns en [8] dans le cas où $\Sigma$ est hermitien-symétrique (au moins quand le groupe d'isométries est un groupe classique) et par O. Biquard en [4] en général.

De façon générale, toute métrique hyperkählérienne $g$ sur $T^*\Sigma$ se restreint en une métrique kählérienne analytique de $\Sigma$ ; dans le cas où $\Sigma$ est compacte, il a été montré par D. Kaledin [20] (résultat également annoncé par B. Feix-N. Hitchin) que toute métrique kählérienne analytique sur $\Sigma$ s'étend en une métrique hyperkählérienne, invariante sous l'action naturelle de $S^1$, sur un *voisinage tubulaire* de $\Sigma$.

L'existence de métriques hyperkählériennes sur les orbites coadjointes a été établie par P. Kronheimer [26], [27], A. Kovalev [25], O. Biquard [4] dans le cas où le groupe est un groupe de Lie complexe *semi-simple*, i.e. le complexifié $G^c$ d'un groupe de Lie compact semi-simple $G$.

### 1.5. Exemples explicites de métriques hyperkählériennes

Comme il a été rappelé dans le paragraphe introductif, les cas où une métrique hyperkählérienne peut être *explicitement* décrite constituent encore une rareté.

Les premiers exemples non-triviaux de métriques hyperkählériennes n'apparaissent dans la littérature qu'à la fin des années 70 ; le premier est la *métrique de Eguchi-Hanson* [12] définie sur le fibré cotangent $T^*\mathbb{C}P^1$ de la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$ ; la construction de Eguchi-Hanson a été très rapidement généralisée par E. Calabi au cas de $T^*\mathbb{C}P^m$, où $\mathbb{C}P^m$ est l'espace projectif complexe de dimension complexe $m$ quelconque, muni d'une métrique de Fubini-Study, de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à $c$ [9] (un autre type de généralisation, à peu près à la même époque, est la construction de Gibbons-Hawking rappelée au paragraphe 1.2) ; E. Calabi montre que la métrique hyperkählérienne $g$ sur $T^*\mathbb{C}P^m$ admet un potentiel $\rho$ relativement à sa structure complexe naturelle, donnée par la formule suivante :

$$\rho(\xi) = \rho_{FS}(x) + f_1(|\xi|^2), \tag{1.4}$$

où : $\xi$ est un élément de $T^*\mathbb{C}P^m$ au-dessus de $x$ ; $\rho_{FS}$ est un potentiel kählérien local de la métrique de Fubini-Study ; $|\xi|$ est la norme de $\xi$ relativement à la métrique de Fubini-Study ; $f_1$ est la fonction réelle définie sur la demi-droite $(-\frac{1}{c}, +\infty)$ par

$$f_1(t) = \frac{1}{c}\left(\sqrt{1+ct} - 1 - \log\left(\frac{1+\sqrt{1+ct}}{2}\right)\right). \tag{1.5}$$

### 1.6. Métriques hyperkählériennes sur l'espace cotangent d'un espace hermitien symétrique de type compact

La formule de Calabi (1.4), (1.5) a été généralisée au cas de $M = T^*\Sigma$ où $\Sigma$ est un espace hermitien symétrique de type compact quelconque [6]. De façon précise, si $(g_\Sigma, J)$ désigne la structure kählérienne de $\Sigma$ et si $G$ désigne la composante connexe du groupe d'isométries de $(\Sigma, g_\Sigma)$, on a le résultat suivant [6, Theorem 1.1]

THÉORÈME 1. — *Il existe une unique métrique hyperkählérienne $G$-invariante $g$ sur $M = T^*\Sigma$ se restreignant à $g_\Sigma$ sur $\Sigma$ ; la métrique $g$ est complète et admet un potentiel kählérien local $\rho$ relativement à la structure complexe naturelle de $T^*\Sigma$, donné par*

$$\rho(\xi) = \rho_\Sigma(x) + (f(-J R_{\xi,J\xi})\,\xi, \xi), \tag{1.6}$$

*où : $\rho_\Sigma$ est un potentiel local de $g_\Sigma$ relativement à $J$ ; $R$ est la courbure de $g_\Sigma$ ;; $f$ est la fonction réelle définie sur la demi-droite ouverte $(-1, +\infty)$ par*

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(\sqrt{1+t} - 1 - \log\left(\frac{1+\sqrt{1+t}}{2}\right)\right). \tag{1.7}$$

Le second terme de (1.6) doit être entendu de la façon suivante : pour tout covecteur $\xi$ en $x$, identifié à un vecteur via la métrique $g_\Sigma$ (voir paragraphe 1.8), $R_{\xi,J\xi}$ est un endomorphisme anti-hermitien de $T_x\Sigma$ et $-J R_{\xi,J\xi}$ un endomorphisme hermitien semi-positif, auquel nous appliquons la fonction réelle $f$ ; ceci est possible car le domaine de définition de $f$ contient $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$, donc aussi le spectre de $-J R_{\xi,J\xi}$ pour tout $\xi$ ; $f(-J R_{\xi,J\xi})$ est ainsi un endomorphisme hermitien, défini-positif, de $T_x\Sigma$ et $(f(-J R_{\xi,J\xi})\,\xi, \xi)$ est le produit scalaire dans $T_x\Sigma$ des vecteurs $f(-J R_{\xi,J\xi})\,\xi$ et $\xi$.

C'est un exercice facile de vérifier que les formules (1.6)-(1.7) se réduisent aux formules (1.4)-(1.5) dans le cas où $(\Sigma, g_\Sigma) = (\mathbb{C}P^m, g_{FS})$ ; à noter que la courbure n'apparaît dans (1.4)-(1.5) que de façon vestigiale, via le paramètre $c$.

La forme explicite de la métrique hyperkählérienne et de la structure complexe $J_2$, donnée en [6], est rappelée au paragraphe 2.1.

### 1.7. Géométrie des orbites adjointes d'une groupe de Lie compact semi-simple

Comme tout espace hermitien symétrique de type compact, $\Sigma$ peut être réalisé comme une orbite de $G$ opérant sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ via l'action adjointe ; comme tel, $\Sigma$ sera noté $\mathcal{O}$.

De façon générale, toute orbite adjointe $\mathcal{O}$ d'un groupe de Lie compact semi-simple $G$ (que nous pouvons supposer de centre réduit à l'identité, sans que cela soit vraiment nécessaire) dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède une structure kählérienne canonique, $G$-invariante qui est décrite comme suit, voir par exemple [3, Chapter 8].

Soit $x$ un élément de $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$ ; soit $\mathfrak{h}_x$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ formée des éléments qui commutent à $x$ (c'est aussi l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie $H_x$ de $x$ dans $G$) ; soit $\mathfrak{m}_x$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}_x$ dans $\mathfrak{g}$ relativement à la forme de Killing $K$ de $\mathfrak{g}$ ; on a donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_x \oplus \mathfrak{m}_x; \tag{1.8}$$

les projections correspondantes sur $\mathfrak{h}_x$ et $\mathfrak{m}_x$ seront notées $\Pi_{\mathfrak{h}_x}$ et $\Pi_{\mathfrak{m}_x}$.

Le sous-espace $\mathfrak{m}_x$ est canoniquement identifié à l'espace tangent $T_x\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}$ en $x$ de la façon suivante :

$$u \in \mathfrak{m}_x \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tu) \cdot x, \tag{1.9}$$

où le point $\cdot$ désigne l'action (adjointe) de $G$ sur l'orbite $\mathcal{O}$ et exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans $G$.

De façon générale, pour tout élément $a$ de $\mathfrak{g}$, nous notons $\xi^a$ le champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$ défini par

$$\xi^a_x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\,a) \cdot x; \tag{1.10}$$

via l'identification (1.9), on a donc

$$\xi^a_x = \Pi_{\mathfrak{m}_x} a. \tag{1.11}$$

Comme $G$ est compact semi-simple, la forme de Killing $K$ est définie-négative et induit un isomorphisme $G$-équivariant de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur son dual $\mathfrak{g}^*$ identifiant orbites adjointes et orbites co-adjointes ; en particulier, la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau, qui est définie de façon générale sur toute orbite co-adjointe de *tout* groupe de Lie, détermine une forme symplectique $\omega$ sur l'orbite $\mathcal{O}$, explicitée par

$$\omega_x(\xi^a_x, \xi^b_x) = -K(x, [a, b]), \tag{1.12}$$

pour tous $a$, $b$ dans $\mathfrak{g}$, ou encore, via l'identification (1.9),

$$\omega_x(u, v) = -K(x, [u, v]), \tag{1.13}$$

pour tous $u$, $v$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$ (le choix du signe est pure affaire de convention, motivée par celle qui a été adoptée pour la forme de Kähler au paragraphe 1.1).

Pour tout $x$ dans $\mathcal{O}$, l'action adjointe $\mathrm{ad}_x : a \mapsto [x, a]$ de $x$ sur $\mathfrak{g}$ a pour noyau $\mathfrak{h}_x$ et se restreint en un *automorphisme* anti-symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_x$ ; on a donc, de façon unique, une décomposition en somme directe orthogonale (relativement à la forme de Killing)

$$\mathfrak{m}_x = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathfrak{m}_x^{(j)} \tag{1.14}$$

et $r$ nombres réels (strictement) positifs $0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_r$, tels que

$$\mathrm{ad}^2_{x|\mathfrak{m}_x^{(j)}} = -\kappa_j^2 \, 1_{|\mathfrak{m}_x^{(j)}}; \tag{1.15}$$

on pose alors

$$J_x = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\kappa_j} \mathrm{ad}_{x|\mathfrak{m}_x^{(j)}}; \tag{1.16}$$

nous obtenons ainsi une structure presque-complexe sur $\mathcal{O}$, notée $J$.

PROPOSITION 3. — (i) *$J$ est compatible avec la forme symplectique $\omega$, i.e. $g_{\mathcal{O}} := \omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne (définie-positive) ;*

(ii) *$J$ est intégrable.*

*Démonstration.* — (i) On vérifie aisément que, pour tous $u$, $v$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$, on a

$$g_{\mathcal{O}}(u, v) = -\sum_{i=1}^{r} \kappa_j K(u_j, v_j), \tag{1.17}$$

en notant $u_j$ la composante de $u$ dans $\mathfrak{m}_x^{(j)}$ et de même pour $v$ ; comme $K$ est défini-négatif, ceci montre (i).

(ii) De façon générale, une structure presque-complexe $J$ est intégrable si et seulement si son tenseur de Nijenhuis $N^J$ de $J$ est nul, où $N^J$ est défini par :

$$N^J_{X,Y} = \frac{1}{4}([JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]); \tag{1.18}$$

il est facile de vérifier que pour *toute* connexion linéaire $\nabla$ préservant $J$, $N^J$ se déduit de la torsion $T^\nabla$ de $\nabla$ par

$$N^J_{X,Y} = \frac{1}{4}(T^\nabla_{X,Y} + JT^\nabla_{JX,Y} + JT^\nabla_{X,JY} - T^\nabla_{JX,JY}); \tag{1.19}$$

dans le cas présent, l'orbite $\mathcal{O}$ est munie d'une connexion linéaire naturelle notée $\nabla$, appelée *connexion homogène*, définie par

$$\nabla_u \xi^a = \Pi_{\mathfrak{m}_x}([a, u]), \tag{1.20}$$

pour tout $a$ dans $\mathfrak{g}$ et tout $u$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$ ; en langage de fibré principal, la connexion $\nabla$ peut être décrite comme suit : pour tout choix d'un point $x$ de référence sur $\mathcal{O}$, l'application $g \mapsto g \cdot x$ réalise le groupe $G$ comme l'espace total d'une fibration principale sur $\mathcal{O}$, de groupe $H_x$ ; la forme $\Pi_{\mathfrak{h}_x} \circ \theta$, où $\theta$ est la forme de Maurer-Cartan (à gauche) de $G$, est une 1-forme de connexion sur $G$ dont la connexion linéaire associée sur $T\mathcal{O}$ est la connexion $\nabla$ définie par (1.20) ; celle-ci ne dépend pas du choix du point-base $x$ et est $G$-invariante ; $\nabla$ préserve ainsi tout champ de tenseurs $G$-invariant sur $\mathcal{O}$, en particulier

la métrique $g_{\mathcal{O}}$ et la structure presque-complexe $J$ ; la torsion $T^{\nabla}$ et la courbure $R^{\nabla}$ de $\nabla$ sont décrites par

$$T^{\nabla}_{u,v} = -\Pi_{\mathfrak{m}_x}([u,v]), \qquad R^{\nabla}_{u,v}w = [\Pi_{\mathfrak{h}_x}([u,v]), w], \tag{1.21}$$

pour tous $u, v, w$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$ ; le tenseur de Nijenhuis $N^J$ de $J$ s'écrit donc :

$$N^J_{u,v} = \frac{1}{4}\Pi_{\mathfrak{m}_x}([J_xu, J_xv] - J_x[u, J_xv] - J_x[J_xu, v] - [u,v]), \tag{1.22}$$

pour tous $u, v$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$.

LEMME 3. — *Pour tous $u, v$ dans $\mathfrak{m}_x$, $[J_xu, J_xv] - [u,v]$ et $[u, J_xv] + [J_xu, v]$ appartiennent à $\mathfrak{m}_x$ et on a*

$$[J_xu, J_xv] - [u,v] = J_x([u, J_xv] + [J_xu, v]). \tag{1.23}$$

*Démonstration.* — Nous pouvons supposer que $u$ et $v$ appartiennent respectivement à $\mathfrak{m}_x^{(j_1)}$ et à $\mathfrak{m}_x^{(j_2)}$ ; on a alors :

$$\mathrm{ad}_x([J_xu, J_xv] - [u,v]) = -(\kappa_{j_1} + \kappa_{j_2})([u, J_xv] + [J_xu, v])$$

et

$$\mathrm{ad}_x([u, J_xv] + [J_xu, v]) = (\kappa_{j_1} + \kappa_{j_2})([J_xu, J_xv] - [u,v]);$$

deux cas se présentent suivant que $-(\kappa_{j_1} + \kappa_{j_2})^2$ est ou n'est pas une valeur propre de ${\mathrm{ad}_x}^2$ ; dans le dernier cas, $[J_xu, J_xv] - [u,v]$ et $[u, J_xv] + [J_xu, v]$ sont tous les deux nuls ; dans le premier cas, $[J_xu, J_xv] - [u,v]$ et $[u, J_xv] + [J_xu, v]$ appartiennent à l'espace propre correspondant, disons $\mathfrak{m}_x^{(j_3)}$ (qui est inclus dans $\mathfrak{m}_x$ puisque $\kappa_{j_1} + \kappa_{j_2}$ est positif), et $[u, J_xv] + [J_xu, v] = \frac{1}{\kappa_{j_1}+\kappa_{j_2}}\,\mathrm{ad}_x([J_xu, J_xv] - [u,v]) = J_x([J_xu, J_xv] - [u,v])$. □

(ii) est une conséquence immédiate du lemme. □

La paire $G$-invariante $(g_{\mathcal{O}}, J)$, dont la forme de Kähler est par construction la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau et qui est kählérienne en vertu du lemme précédent, est la *structure kählérienne canonique* de l'orbite $\mathcal{O}$.

### 1.8. Note sur certaines identifications

L'identification $T_x\mathcal{O} = \mathfrak{m}_x$ définie par (1.9) doit être distinguée de l'*identification tautologique* induite par le plongement de $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}$ : via ce plongement, $T_x\mathcal{O}$ est canoniquement identifié à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, qui n'est autre que $\mathfrak{m}_x$ ; les deux identifications diffèrent par l'action de $\mathrm{ad}_x$ sur $\mathfrak{m}_x$ ; de façon précise, si un vecteur de $T_x\mathcal{O}$ est identifié à $u$ via l' identification (1.9), il est identifié à $\mathrm{ad}_x u$ via l'identification tautologique ; dans la suite, nous éviterons cette seconde identification et nous utiliserons systématiquement, sans autre commentaire, l'identification (1.9) tant que nous considérons l'orbite compacte $\mathcal{O}$ ; en revanche, lorsque nous considérerons la géométrie des

orbites *complexes* $\mathcal{O}^c$, nous utiliserons de préférence l'identification tautologique de l'espace tangent $T_y\mathcal{O}^c$ avec une sous-espace (complexe) de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}^c$ ; c'est le cas, en particulier, dans les paragraphes 3.2 et 3.4.

Le fibré cotangent $T^*\mathcal{O}$ sera systématiquement identifié, comme espace fibré sur $\mathcal{O}$, au fibré tangent $T\mathcal{O}$ par la dualité riemannienne induite par $g_{\mathcal{O}}$ ; en particulier, $T_x^*\mathcal{O}$ sera identifié, comme espace vectoriel euclidien, à $T_x\mathcal{O}$ (donc aussi à $\mathfrak{m}_x$) et $J_x$ notera la structure complexe de $T_x\mathcal{O}$ ; la structure complexe naturelle $J_1$ de $T^*\mathcal{O}$, transportée sur $T\mathcal{O}$, est alors décrite ainsi au point $\xi$ :

$$J_1(Y^H) = (JY)^H,\ J_1(Y^V) = -(JY)^V, \tag{1.24}$$

avec les notations générales suivantes : pour tout $Y$ dans $T_x\mathcal{O}$, $Y^H$ désigne le relevé horizontal de $Y$ en $\xi$ (relativement à la connexion de Levi-Civita de $g_{\mathcal{O}}$) et $Y^V$ le vecteur vertical (tangent à la fibre) en $\xi$ identifié à $Y$ (cf. aussi, plus bas, paragraphe 2.1).

Avec ce formalisme, la 2-forme de Liouville *réelle* sur $T^*\mathcal{O}$, notée $\psi_2$ (cf. paragraphe 1.11), est déterminée par

$$\psi_2(Y_1^H, Y_2^H) = \psi_2(Y_1^V, Y_2^V) = 0, \quad \psi_2(Y_1^H, Y_2^V) = -g_{\mathcal{O}}(Y_1, Y_2). \tag{1.25}$$

### 1.9. Géométrie des orbites symétriques

Les orbites adjointes d'un groupe compact semi-simple $G$ sont simplement connexes (puisque le groupe d'isotropie $H_x$ est connexe) ; inversement, toute variété kählérienne compacte homogène simplement-connexe peut être réalisée comme une orbite adjointe d'un groupe de Lie compact semi-simple, muni de sa structure kählérienne canonique, voir par exemple [3, Chapitre 8]. Parmi celles-ci, les *espaces hermitiens symétriques de type compact* sont caractérisés par la condition :

$$[\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_x] \subset \mathfrak{h}_x, \tag{1.26}$$

pour tout $x$ dans l'orbite $\mathcal{O}$ ; nous dirons simplement dans ce cas que $\mathcal{O}$ est une *orbite symétrique.*

Comme tout espace hermitien symétrique de type compact est produit d'irréductibles, nous pouvons nous restreindre sans perte de généralité au cas où $\Sigma = \mathcal{O}$ est *irréductible,* i.e. au cas où le groupe compact $G$ est *simple* ; dans ce cas, l'action de $H_x$ sur $\mathfrak{m}_x$ est irréductible et la structure complexe canonique en tout point $x$ de $\mathcal{O}$ est donnée par

$$J_x = \frac{1}{\kappa}\,\mathrm{ad}_{x|\mathfrak{m}_x}, \tag{1.27}$$

où $\kappa$ est un réel positif ; la métrique $g_{\mathcal{O}}$ est alors liée à la forme de Killing $K$ par

$$g_{\mathcal{O}}(u, v) = -\kappa\, K(u, v), \tag{1.28}$$

pour tous $u$, $v$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$.

Dans le cas symétrique, la connexion homogène $\nabla$ est de torsion nulle (cf. (1.21) et coïncide donc avec la connexion de Levi-Civita de $g_{\mathcal{O}}$ ; la courbure riemannienne $R$ de $\mathcal{O}$ est alors donnée, cf. (1.21), par

$$R_{u,v}w = [[u, v], w], \tag{1.29}$$

pour tous éléments $u, v, w$ de $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$.

En tout point $x$ d'une orbite adjointe $\mathcal{O}$, l'espace $\mathfrak{m}_x$ est un espace de représentation sous l'action du groupe d'isotropie (compact, connexe) $H_x$ de $x$ dans $G$ ; dans le cas symétrique, chaque sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{m}_x$ rencontre orthogonalement toutes les orbites de $H_x$ ; en particulier $\mathfrak{m}_x = H_x \cdot \mathfrak{a}$ ; deux algèbres abéliennes maximales dans $\mathfrak{m}_x$ sont conjuguées par un élément de $H_x$ ; leur dimension commune est égale, par définition, au *rang* de l'espace symétrique $\mathcal{O}$ (égale aussi à la codimension des orbites de dimension maximale de $H_x$ ) ; tout élément $u$ de $\mathfrak{m}_x$ appartient à une sous-algèbre abélienne maximale, unique si $u$ est *régulier*; nous utiliserons souvent dans la suite le résultat suivant :

LEMME 4. — (i) *Pour chaque sous-algèbre abélienne maximale* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathfrak{g}$ *contenue dans* $\mathfrak{m}_x$, *nous pouvons choisir une base orthogonale (mais non orthonormée en général)* $\{e_1, \cdots, e_r\}$ *de* $\mathfrak{a}$ *satisfaisant les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} &R_{e_i,J_xe_i}e_i = J_xe_i, \\ &R_{e_i,J_xe_i}e_j = R_{e_i,e_j} = R_{e_i,J_xe_j} = 0, \end{aligned} \tag{1.30}$$

*pour tous* $i, j = 1, \cdots, r, i \neq j$ ; *pour chaque* $i = 1, \cdots, r$, *la norme au carré* $|e_i|^2$ *de* $e_i$ *(relativement à* $g_{\mathcal{O}}$*) est égale à la courbure sectionnelle holomorphe de la droite complexe engendrée par* $e_i$ ;

(ii) *L'ensemble des sous-algèbres abéliennes maximales de* $\mathfrak{g}$ *contenues dans* $\mathfrak{m}_x$ *est invariant par rotation, i.e. pour chaque* $\tau$, $(\cos\tau + \sin\tau J_x)\mathfrak{a} = \{\cos\tau\, u + \sin\tau J_x\, u | u \in \mathfrak{a}\}$ *est encore une sous-algèbre abélienne maximale de* $\mathfrak{g}$ *contenue dans* $\mathfrak{m}_x$ *et la base* $\{e_{\tau,i} = \cos\tau\, e_i + \sin\tau J_x\, e_i\}_{i=1,\cdots,r}$ *satisfait (1.30).*

*Démonstration.* — (i) L'existence d'une base $\{e_i\}$ satisfaisant (1.30) est déduite de la théorie des *racines fortement orthogonales* associées à un espace hermitien symétrique ; nous renvoyons à [6] pour plus de détails sur ce point, en signalant que les $e_i$ de [6] sont le double des $e_i$ utilisés ici ; (ii) se déduit de l'identité suivante, vérifiée dans le cas symétrique

$$[Ju, Jv] = [u, v], \tag{1.31}$$

pour tous $u, v$ dans $\mathfrak{m}_x$, qui résulte immédiatement de (1.27) via l'identité de Jacobi (cette identité n'est pas vraie pour une orbite générale, cf. plus haut le lemme 3 ). □

### 1.10. Métriques hyperkählériennes sur les orbites adjointes complexes de type symétrique

L'algèbre de Lie (réelle) $\mathfrak{g}$ se plonge naturellement dans l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}^c := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ ; ce plongement est induit par un unique plongement du groupe compact $G$ dans son *complexifié* $G^c$, qui est un groupe de Lie *complexe* semi-simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^c$, caractérisé par cette propriété. L'orbite adjointe $\mathcal{O}$ est alors canoniquement plongée dans l'orbite adjointe $\mathcal{O}^c$ d'un quelconque de ses points sous l'action adjointe de $G^c$ sur $\mathfrak{g}^c$. Dans le cas où $\mathcal{O}^c$ est obtenue de cette manière à partir d'une orbite symétrique $\mathcal{O}$, nous dirons que $\mathcal{O}^c$ est *une orbite complexe de type symétrique.*

La dimension complexe de l'orbite complexe $\mathcal{O}^c$ est égale à la dimension réelle de l'orbite compacte $\mathcal{O}$, et $\mathcal{O}^c$ peut être considérée de façon informelle comme une complexification de $\mathcal{O}$. De façon précise, il existe une fibration $G$-équivariante $\pi$ de $\mathcal{O}^c$ sur $\mathcal{O}$ telle que, en tout point $x$ de $\mathcal{O}$, la fibre $\pi^{-1}(x)$ soit égale à $\exp(i\,\mathfrak{m}_x) \cdot x$, voir [7] ; en d'autres termes, on a :

$$\mathcal{O}^c = \coprod_{x \in \mathcal{O}} \exp(i\,\mathfrak{m}_x) \cdot x. \tag{1.32}$$

Cette fibration existe pour toute orbite adjointe $\mathcal{O}$ et est une conséquence directe du théorème de décomposition

$$G^c = G \times \exp(i\,\mathfrak{m}_x) \times \exp(i\,\mathfrak{h}_x) \tag{1.33}$$

pour tout $x$ dans $\mathfrak{g}$, voir [22].

Dans le cas où $\mathcal{O}$ est symétrique, i.e. où (1.26) est vérifié, la somme directe $\mathfrak{h}_x \oplus i\,\mathfrak{m}_x$ est une *sous-algèbre de Lie* réelle de $\mathfrak{g}^c$ ; le sous-groupe de Lie réel correspondant de $G^c$, $G_x^{nc}$, est une forme réelle non-compacte de $G^c$ et la fibre $\pi^{-1}(x)$ est l'orbite de $x$ sous l'action adjointe de $G_x^{nc}$, i.e. $\pi^{-1}(x) = G_x^{-1} \cdot x = G_x^{nc}/H_x$ ; en particulier, la fibre $\pi^{-1}(x)$ est incluse dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_x \oplus i\mathfrak{m}_x$ ; c'est un *espace hermitien symétrique de type non-compact*, isomorphe au *dual non-compact* de $\mathcal{O}$, et l'application $a \in \mathfrak{m}_x \mapsto \exp(i\,a) \cdot x$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{m}_x$ sur $\pi^{-1}(x)$ (qui coïncide avec l'application exponentielle riemannienne lorsque $\mathfrak{m}_x \simeq i\,\mathfrak{m}_x$ est identifié à l'espace tangent en $x$ à $\pi^{-1}(x)$).

Comme il a été rappelé plus haut, pour toute orbite $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^c$ est une variété symplectique complexe et admet une métrique hyperkählérienne ; dans le cas où $\mathcal{O}$ est symétrique, une description simple de cette métrique et de son potentiel kählérien relativement à la structure complexe naturelle de $\mathcal{O}^c$, qui dans ce cas est *globalement défini*, a été donnée en [7] ; de façon précise, on a [7, Théorème 3]

THÉORÈME 2. — *L'orbite complexe $\mathcal{O}^c$ admet une unique métrique hyperkählérienne $G$-invariante $g$ dont la restriction à $\mathcal{O}$ coïncide avec la métrique kählérienne canonique ; la métrique $g$ est complète et admet un potentiel kählérien $G$-invariant $\rho$* globalement

défini *relativement à la structure complexe naturelle de $\mathcal{O}^c$, donné par*

$$\rho(y) = -K\left(y, \frac{\pi(y)}{\kappa}\right), \tag{1.34}$$

*où $\kappa$ est le réel positif figurant en (1.27).*

La description explicite de la métrique hyperkählérienne $g$ de $\mathcal{O}^c$ est donnée en [7] et rappelée au paragraphe 2.4 ci-dessous.

*Remarque 1.* — Si l'orbite complexe $\mathcal{O}^c$ est aussi la complexifiée d'une orbite $\mathcal{O}^R$ d'une autre forme réelle de $G^c$, la même formule (1.34) définit une métrique *hyper-pseudokählérienne* au voisinage de $\mathcal{O}^R$, cf. [5].

### 1.11. Notations

Dans toute la suite, nous supposerons, sauf mention contraire explicite, que $\mathcal{O}$ est une orbite symétrique et chaque espace hermitien symétrique de type compact $\Sigma$ sera identifié à une telle orbite, munie de sa structure kählérienne canonique $(g_{\mathcal{O}}, J)$.

Puisque nous considérons à la fois les structures hyperkählériennes de $T^*\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^c$, nous modifions les notations génériques précédentes de la façon suivante :

- la structure hyperkählérienne de $T^*\Sigma = T^*\mathcal{O}$ donnée par le théorème 1 sera notée $(g, J_1, J_2, J_3)$, où $J_1$ désigne la structure complexe naturelle (induite par $J$) ; les formes de Kähler correspondantes sont notées $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ ; en particulier, $\Psi := \psi_2 + i\,\psi_3$ est la forme de Liouville holomorphe de $T^*\mathcal{O}$ ;
- la structure hyperkählérienne de l'orbite $\mathcal{O}^c$ donnée par le théorème 2 sera notée $(g, I_1, I_2, I_3)$, où $I_1$ désigne la structure complexe naturelle de $\mathcal{O}^c$ comme sous-variété complexe de $\mathfrak{g}^c$ ; les formes de Kähler correspondantes sont notées $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ; en particulier, $\Omega = \omega_2 + i\,\omega_3$ est la forme de Kirillov-Kostant-Souriau holomorphe de $\mathcal{O}^c$.

Un point générique de $\mathcal{O}$ sera noté $x$ et un point générique de $T^*\mathcal{O}$ au-dessus de $x$ sera noté $\xi$, identifié à un élément de $T_x\mathcal{O}$ suivant les modalités précisées au paragraphe 1.8 ; un point de $\mathcal{O}^c$ au-dessus de $x$ (relativement à la projection $\pi$) sera noté génériquement $y$ ; on a alors $y = \exp(iu)\cdot x$, où $u$ est un élément uniquement déterminé de $\mathfrak{m}_x$ ; on écrira $u = \sum_{i=1}^r u_i\, e_i$, où $\{e_i\}_{i=1,\dots,r}$ est une base satisfaisant (1.30) d'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{m}_x$ et contenant $u$ ; il est entendu tacitement que les expressions faisant intervenir cette représentation de $u$ ne dépendent pas du choix de $\mathfrak{a}$, dans le cas où $u$ n'est pas régulier, ni de la base $\{e_i\}$.

## 2. Identification des structures hyperkählériennes

Le but principal de cette seconde partie est de démontrer le résultat suivant

THÉORÈME 3. — *Pour toute orbite adjointe symétrique $\mathcal{O}$ d'un groupe compact semi-simple $G$, il existe un difféomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{O}^c$ sur $T^*\mathcal{O}$ ayant les propriété suivantes :*

(i) *$\Phi$ est $G$-équivariant et commute aux projections naturelles $\pi$ et $p$ de $\mathcal{O}^c$ et $T^*\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}$ ;*

(ii) *$\Phi$ échange : la structure complexe naturelle $I_1$ de $\mathcal{O}^c$ et la structure complexe $J_2$ de $T^*\mathcal{O}$ ; la structure complexe naturelle $J_1$ de $T^*\mathcal{O}$ et la structure complexe $-I_2$ de $\mathcal{O}^c$ ; la structure complexe $I_3$ de $\mathcal{O}^c$ et la structure complexe $J_3$ de $T^*\mathcal{O}$ ;*

(iii) *$\Phi$ échange les métriques hyperkählériemnes de $T^*\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^c$ décrites par les théorèmes 1 et 2 ; de façon précise, l'image par $\Phi$ du potentiel kählérien $\rho_2$ de $T^*\mathcal{O}$ relatif à $J_2$ (décrit par (2.7)) est égal, à une constante additive près, au potentiel kählérien $\rho$ de $\mathcal{O}^c$ relatif à $I_1$ (donné par (1.34)) ;*

(iv) *$\Phi$ est explicité par:*

$$\Phi(y) = \mathrm{ad}_x^{-1}(\mathfrak{Im}\, y), \tag{2.1}$$

*pour tout $y$ de $\mathcal{O}^c$ appartenant à la fibre $\pi^{-1}(x)$.*

Dans (2.1), nous utilisons la notation suivante : pour tout $a$ dans $\mathfrak{g}^c$, $\mathfrak{Re}\, a$ et $\mathfrak{Im}\, a$, désigne la projection de $a$ sur le premier et le second, facteur $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ (dans le cas où $G$ est le groupe spécial unitaire $SU(n)$, $a$ est une matrice complexe $n \times n$ à trace nulle, $\mathfrak{Re}\, a$ est sa partie *anti-hermitienne*, $i\,\mathfrak{Im}\, a$ sa partie *hermitienne*); on observe que les applications $y \mapsto \mathfrak{Re}\, y$ et $y \mapsto \mathfrak{Im}\, y$, de $\mathcal{O}^c$ dans $\mathfrak{g}$ coïncident respectivement avec les applications-moment $\mu_2$ et $\mu_3$ de l'action adjointe du groupe compact $G$ sur $\mathcal{O}^c$ relativement aux la structure symplectique (réelle) $\omega_2 = \mathfrak{Re}\,\Omega$, resp. $\omega_3 = \mathfrak{Im}\,\Omega$ (l'application-moment $\mu_1$ relative à $\omega_1$ sera considérée et calculée dans la troisième partie).

Comme il a été observé au paragraphe 1.10, le second membre de (2.1) appartient à $\mathfrak{m}_x$ et est identifié comme tel à un élément de $T_x^*\mathcal{O}$ via (1.9) et la dualité riemannienne induite par $g_{\mathcal{O}}$ ; si, au lieu de l'identification (1.9), nous utilisons l'identification tautologique de $\mathfrak{m}_x$ avec $T_x\mathcal{O} = T_x^*\mathcal{O}$, cf. paragraphe 1.8, le difféomorphisme $\Phi$ se réduit, fibre à fibre, à l'application moment $\mu_3$ (voir aussi le paragraphe 3.4).

La suite de cette deuxième partie est consacrée à la preuve du théorème 3.

### 2.1. Potentiel de la métrique hyperkählérienne relatif à $J_2$

Dans ce paragraphe, nous donnons une description explicite de la structure complexe $J_2$ de $T^*\mathcal{O}$ et nous montrons que la métrique hyperkählérienne $g$ admet un potentiel kählérien *global*, $G$-invariant, relativement à $J_2$.

La connexion de Levi-Civita $\nabla$ de $g_{\mathcal{O}}$ détermine une décomposition en somme directe

$$T(T^*\mathcal{O}) = T^H \oplus T^V \tag{2.2}$$

de fibré tangent de $T^*\mathcal{O}$, où $T^H$ est la distribution horizontale associée à $\nabla$ et $T^V$ est la distribution verticale, constituée des espaces tangents aux fibres de $p$; pour tout $\xi$

dans $T_x^*\mathcal{O}$, $T_\xi^V$ est naturellement identifié à $T_x^*\mathcal{O}$, puis à $T_x\mathcal{O}$ via la métrique $g_{\mathcal{O}}$ (voir paragraphe 1.8) tandis que $T_\xi^H$ est également identifié à $T_x\mathcal{O}$ par la différentielle de $p$ en $\xi$ ; pour tout vecteur $Y$ de $T_x\mathcal{O}$, nous notons $Y^H$, resp. $Y^V$, l'élément de $T_\xi^H$, resp. de $T_\xi^V$, identifié à $Y$ (notations déjà utilisées au paragraphe 1.8).

Nous notons $g_0$ la métrique riemannienne sur $T^*\mathcal{O}$ obtenue en transportant la métrique $g_{\mathcal{O}}$ sur $T^H$ et $T^V$ et en demandant que $T^H$ et $T^V$ soient orthogonaux relativement à $g_0$.

Comme il a été montré en [6] ( une description proche de celle-ci figure en [8] dans le cas où $G$ est un groupe classique), la métrique hyperkählérienne $g$ sur $M$ peut être décrite de la façon suivante :

1. les distributions $T^H$ et $T^V$ sont orthogonales relativement à $g$ ;

2. en chaque point $\xi$ de $M = T^*\mathcal{O}$, $g$ se déduit de $g_0$ au moyen de l'endomorphisme

$$\begin{pmatrix} A_\xi & 0 \\ 0 & D_\xi = A_\xi^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

avec

$$A_\xi = 1 - J\,R_{\phi(-J\,R_{\xi,J\xi})\xi,J\,\phi(-J\,R_{\xi,J\xi})\xi} \tag{2.4}$$

où $\phi$ est la fonction réelle définie sur la demi-droite ouverte $(-1,+\infty)$ par

$$\phi(t) = \left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Les notations sont celles du Théorème 1 ; avec ces notations, la structure complexe $J_2$ s'écrit de la façon suivante, cf [6] :

$$J_2(Y^H) = -(A_\xi Y)^V, \qquad J_2(Y^V) = (D_\xi Y)^H, \tag{2.6}$$

pour tout point $\xi$ de $T^*\mathcal{O}$ au-dessus de $x$ et tout $Y$ dans $T_x\mathcal{O}$ ; en particulier, $J_2$ échange les distributions horizontale et verticale.

PROPOSITION 4. — *Relativement à la structure complexe $J_2$, la métrique hyperkählérienne $g$ admet un potentiel kählérien $G$-invariant $\rho_2$ globalement défini sur $T^*\mathcal{O}$, égal à :*

$$\rho_2(\xi) = (\phi^2(-J\,R_{\xi,J\,\xi})\xi,\xi) \tag{2.7}$$

*où $\phi^2$ est le carré de la fonction $\phi$ définie par (2.5). i.e.*

$$\phi^2(t) = \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}. \tag{2.8}$$

*Démonstration.* — La forme symplectique réelle $\psi_2$ est la partie réelle de la 2-forme de Liouville holomorphe $\Psi$ ; elle est aussi la 2-forme de Liouville *réelle* de $T^*\mathcal{O}$, vu comme le fibré tangent réel de $\mathcal{O}$ ; une fonction $F$ définie sur $T^*\mathcal{O}$ est donc un potentiel kählérien de $g$ relativement à $J_2$ dès lors que $-dF \circ J_2$ est égal à la 1-forme de Liouville réelle de $T^*\mathcal{O}$, i.e. si, dans chaque fibre $T_x^*\mathcal{O} = T_x\mathcal{O}$, on a

$$dF(A_\xi Y) = (\xi, Y), \tag{2.9}$$

pour tout $Y$ dans $T_x\mathcal{O}$ (où $\xi$ est ici encore identifié à un élément de $T_x\mathcal{O}$) ; cette condition équivaut clairement à

$$D_\xi \xi = \mathrm{grad}_\xi F, \tag{2.10}$$

où $\mathrm{grad}_\xi F$ désigne et désignera dans la suite la valeur en $\xi$ du gradient vertical de $F$, i.e. du gradient de la restriction de $F$ à l'espace euclidien $T_x^*\mathcal{O} \simeq T_x\mathcal{O}$, et $D_\xi = A_\xi^{-1}$ ; il reste donc à montrer que sur chaque fibre $T_x^*\mathcal{O} \simeq T_x\mathcal{O}$, le champ de vecteurs $\xi \mapsto D_\xi\xi$ est le gradient de la fonction $\rho_2$ définie par (2.7) ; or, l'endomorphisme $D_\xi$ s'écrit encore, cf. [6, Lemma 4.3] :

$$D_\xi = d_\xi \mathrm{grad}\, \rho_1 - J \circ d_\xi \mathrm{grad} \rho_1 \circ J, \tag{2.11}$$

où $\rho_1$ est le terme additionnel dans l'expression du potentiel $\rho$ donné en (1.6), i.e. $\rho_1(\xi) = (f(-J R_{\xi,J\xi})\xi, \xi)$ et $d_\xi \mathrm{grad}\, \rho_1$ est la dérivée (verticale) ordinaire de $\mathrm{grad}\, \rho_1$ ($f$ est la fonction définie par (1.7)) ; par [6, lemma 4.4], on a

$$\mathrm{grad}_\xi \rho_1 = 2(t f)'(-J R_{\xi,J\xi})\xi = \phi^2(-J R_{\xi,J\xi})\xi$$

et par [6, Lemma 4.5 (ii) ], on a

$$D_\xi \xi = 2(t\phi^2)'(-J R_{\xi,J\xi})\xi;$$

par [6, lemma 4.4] à nouveau, $D_\xi\xi$ est le gradient (vertical) de la fonction $\rho_2$ définie par (2.7). Le fait que $\rho_2$ soit $G$-invariante (ainsi d'ailleurs que $\rho_1$) résulte immédiatement de la $G$-invariance de la métrique $g_{\mathcal{O}}$. □

### 2.2. Action holomorphe de $G^c$ sur $(T^*\mathcal{O}, J_2)$

L'action de $G$ sur $\mathcal{O}$ détermine une action $J$-holomorphe de $G^c$ sur $\mathcal{O}$, donc, par différentiation, une action $J_1$-holomorphe sur $T^*\mathcal{O}$ qui étend l'action de $G$ ; cette action préserve encore $\mathcal{O}$ (vue comme sous-variété $J_1$-holomorphe de $T^*\mathcal{O}$) ; en particulier, elle n'est pas transitive. La situation est très différente lorsque $T^*\mathcal{O}$ est munie de la structure complexe $J_2$ ; on a alors

PROPOSITION 5. — *L'action naturelle de $G$ sur $T^*\mathcal{O}$ s'étend en une action transitive, $J_2$-holomorphe, de $G^c$.*

*Démonstration.* — Nous montrons d'abord que l'action de $G$ s'étend en une action $J_2$-holomorphe de $G^c$ ; de façon équivalente, nous montrons que pour tout élément $a + ib$ de $\mathfrak{g}^c$, le champ de vecteurs $\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b$ est complet ; pour ce faire, nous utilisons le potentiel $\rho_2$ introduit précédemment, qui est une fonction propre et vérifie $\rho_2(\xi) \leqslant C \cdot |\xi|$ pour une certaine constante positive $C$ ; puisque $-d\rho_2 \circ J_2$ est la 1-forme Liouville réelle de $T^*\mathcal{O}$ (cf. la démonstration de la proposition précédente), on a : $(\frac{d}{dt}\rho_2)(\xi(t)) = (d\rho_2)_{\xi(t)}(\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b) = -(\xi(t), \xi^b_{x(t)})$, en posant $\xi(t) = \Phi_t^{\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b}(\xi)$ où $\Phi_t^{\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b}$ est le flot de $\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b$, et $x(t) = \pi(\xi(t))$ ; comme $\xi^b$ est un champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$ compact, on a donc : $(\frac{d}{dt}\rho_2)(\xi) \leqslant C_1 \cdot \rho_2(\xi)$, où $C_1$ est une constante positive, donc aussi $\rho_2(\xi(t)) \leqslant C_2 e^{C_1 t}$, pour tout $t$ ; ainsi, l'image de $\xi$ par le flot de $\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b$ reste bornée lorsque $t$ est borné, i.e. $\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b$ est complet ; nous définissons alors l'action de $G^c$ sur $T^*\mathcal{O}$ par

$$\exp(a + ib) \cdot \xi = \Phi_1^{\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b}(\xi); \tag{2.12}$$

comme $\tilde{\xi}^a + J_2\tilde{\xi}^b$ sont $J_2$-holomorphes, l'action ainsi définie est elle-même $J_2$-holomorphe.

Il reste à montrer que cette action est transitive ; de façon précise, nous montrons que, pour tout point $x$ de $\mathcal{O}$, la fibre $T_x^*\mathcal{O}$ *coïncide* avec $\exp(i\mathfrak{m}_x) \cdot 0_x$, où $0_x$ désigne l'origine de $T_x^*\mathcal{O}$ (identifié à $x$ si $\mathcal{O}$ est vue comme une sous-variété de $T_x^*\mathcal{O}$ ).

Tout élément $u$ de $\mathfrak{m}_x$ peut s'écrire sous la forme $u = \sum_{i=1}^r u_i\, e_i$, où $\{e_i\}$ est une base satisfaisant (1.30) d'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{m}_x$ contenant $u$ (unique dans le cas générique où $u$ est régulier). Nous avons alors

LEMME 5. — *Pour tout $u$ dans $\mathfrak{m}_x$,*

$$\Phi_1^{J_2\tilde{\xi}^u}(x) = -\sum_{i=1}^r \operatorname{sh}(u_i)\, e_i, \tag{2.13}$$

*où le membre de droite est considéré comme un élément de $T_x^*\mathcal{O}$ via (1.9) et la dualité riemannienne). De façon équivalente, en notant $\xi$ l'élément de $T_x^*\mathcal{O}$ identifié à $u$, on a*

$$\Phi_1^{J_2\tilde{\xi}^u}(x) = -\psi(-J\, R_{\xi,J\xi})\xi, \tag{2.14}$$

*où $\psi$ est la fonction réelle définie par $\psi(t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.*

*En particulier, pour tout $x$ dans $\mathcal{O}$, l'application $u \mapsto \Phi_1^{J_2\tilde{\xi}^u}(x)$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{m}_x$ sur $T_x^*\mathcal{O}$.*

*Démonstration.* — Pour tout $a$ dans $\mathfrak{g}$, la composante verticale en $\xi$ du champ de vecteurs $\tilde{\xi}^a$ suivant (2.2) est égale à $\nabla_\xi \xi^a$ (comme il a été rappelé plus haut, dans la cas symétrique la connexion de Levi-Civita coïncide avec la connexion homogène) ; en particulier, si $a = u$ appartient à $\mathfrak{m}_x$, $\tilde{\xi}^u$ est horizontal le long de $T_x^*\mathcal{O}$ et $J_2\tilde{\xi}^u$ est donc *tangent* à $T_x^*\mathcal{O}$ en tout point de $T_x^*\mathcal{O}$ ; il en résulte que $\xi(t) = \Phi_t^{J_2\tilde{\xi}^u}(x)$ appartient à $T_x^*\mathcal{O}$ pour

tout $t$ ; par (2.6), $\xi(t)$ est solution du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -A_{\xi(t)}u \\ \xi(0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

pour $u$ fixé dans $\mathfrak{m}_x$ ; si $\xi$ appartient à $\mathfrak{a}$, $A_\xi u$ appartient encore à $\mathfrak{a}$ ; de façon précise, si $\xi = \sum_{i=1}^r \xi_i e_i$, un calcul simple montre que $A_\xi u = \sum_{i=1}^r u_i (1 + \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} e_i$ ; comme $\xi(0) = 0$, nous en déduisons que $\xi(t)$ appartient à $\mathfrak{a}$ pour tout $t$ et que le système (2.15) se décompose entièrement en la juxtaposition des systèmes scalaires

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= -u_i (1 + \xi_i^2(t))^{\frac{1}{2}} \\ \xi_i(0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

pour $i = 1, \cdots, r$, qui s'intègrent aisément en $\xi(t) = \mathrm{sh}(t u_i)$ ; ceci démontre (2.13) ; (2.14) s'en déduit aisément et montre a posteriori que (2.13) est indépendant du choix de $\mathfrak{a}$ dans le cas où $u$ n'est pas régulier ; la dernière assertion se déduit immédiatement de (2.13). □

Il résulte du lemme précédent que l'action de $\exp(i\mathfrak{m}_x)$ est (simplement) transitive sur la fibre $T_x^* \mathcal{O}$ ; comme $G$ agit transitivement sur $\mathcal{O}$, nous en déduisons que l'action de $G^c$ est transitive sur $T^* \mathcal{O}$. □

### 2.3. Construction de $\Phi$

Le groupe d'isotropie d'un point $x$ de $\mathcal{O}$ (vue comme la section nulle de $T_x^* \mathcal{O}$) pour l'action de $G^c$ sur $T^* \mathcal{O}$ qui vient d'être décrite est clairement le sous-groupe $H_x^c$ de $G^c$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}_x^c = \mathfrak{h}_x \oplus i\mathfrak{h}_x$, qui est aussi le groupe d'isotropie de $x$ pour l'action adjointe de $G^c$ sur $\mathcal{O}^c$ ; $x$ étant choisi comme point de référence, nous obtenons ainsi un isomorphisme $\Phi$ de $G^c$-variétés complexes de l'orbite complexe $\mathcal{O}^c$, munie de sa structure complexe naturelle, sur $T^* \mathcal{O}$, muni de la structure complexe $J_2$, en posant :

$$\Phi(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot 0_x, \tag{2.17}$$

pour tout $\gamma$ dans $G^c$.

Par construction même, $\Phi$ échange l'action adjointe de $G^c$ sur $\mathcal{O}^c$ avec l'action de $G^c$ sur $T^* \mathcal{O}$ construite au paragraphe précédent ; a fortiori, $\Phi$ échange les actions naturelles du groupe compact $G$ sur $\mathcal{O}^c$ et $T^* \mathcal{O}$.

Il résulte du lemme 5 que $\Phi$ est explicité par

$$\Phi(\exp(iu) \cdot x) = -\sum_{i=1}^r \mathrm{sh} u_i \, e_i, \tag{2.18}$$

pour tout $x$ de $\mathcal{O}$ et tout $u = \sum_{i=1}^r u_i e_i$ de $\mathfrak{m}_x$ (notations du paragraphe précédent).

En particulier, $\Phi$ est indépendant du choix du point-base $x$ et échange les fibrations $\pi$ et $p$.

Par construction même de $\Phi$, pour tout $a$ dans $\mathfrak{g}^c$, le champ de vecteurs $\xi^a$ sur $\mathcal{O}^c$ déterminé par l'action infinitésimale de $a$ est transporté par $\Phi$ sur le champ de vecteurs $\tilde{\xi}^a$ ; puisque $\xi^{ia} = I_1\xi^a$, tandis que (par définition) $\tilde{\xi}^{ia} = J_2\tilde{\xi}^a$, nous voyons que $\Phi$ échange $I_1$ et $J_2$, i.e. $\Phi_* \circ I_1 = -J_2$ ; nous avons ainsi montré (i) et une partie de (ii).

### 2.4. La structure complexe $I_2$ de $\mathcal{O}^c$

La structure complexe $I_2$ de $\mathcal{O}^c$ est décrite de la façon suivante ; en tout point $y$ de $\mathcal{O}^c$ tel que $\pi(y) = x$, l'espace tangent $T_y\mathcal{O}^c$ s'écrit

$$T_y\mathcal{O}^c = H_y \oplus V_y, \tag{2.19}$$

où $H_y$ est le sous-espace engendré par les $\xi^u$ et $V_y$ le sous-espace engendré par les $\xi^{iu}$, quand $u$ décrit $\mathfrak{m}_x$, [7, Lemme 4]); on a alors (cf. [7]) :

$$I_2\,\xi^u_y = \xi^{J_x u}_y, \qquad I_2\,\xi^{iu}_y = -\xi^{iJ_x u}_y; \tag{2.20}$$

avec ces notations, la métrique hyperkählérienne $g$ au point $y$ est décrite comme suit [7] :

1. les espaces $H_y$ et $V_y$ sont orthogonaux relativement à $g$ ;

2. pour tous $u$, $v$ dans $\mathfrak{m}_x$, on a

$$g(\xi^u, \xi^v) = g(\xi^{iu}, \xi^{iv}) = -\frac{1}{\kappa}\mathfrak{Re}\,K([v, y], [u, \pi(y)]); \tag{2.21}$$

le membre de droite de (2.21) est la valeur en $x = \pi(y)$ du hessien Hess $F^y$ de la fonction $F^y = -\frac{1}{\kappa}K(\mathfrak{Re}\,y, \cdot)$ définie sur l'orbite compacte $\mathcal{O}$ ; nous montrons plus bas, au paragraphe 3.1, que Hess $F^y_x$ est défini-positif.

Comme la connexion de Levi-Civita d'une orbite symétrique coïncide avec la connexion homogène $\nabla$, les distributions horizontale et verticale, $T^H$ et $T^V$, de $T^*\mathcal{O}$ associées à la connexion de Levi-Civita sont elles-mêmes engendrées respectivement par les $\xi^u$ et les $\xi^{iu}$, quand $u$ décrit $\mathfrak{m}_x$ ; il en résulte que les distributions $H$ et $V$ figurant en (2.19) sont transportées sur les distributions horizontale et verticale $T^H$ et $T^V$ de $T^*\mathcal{O}$; on a donc (cf. paragraphe 1.8) :

$$\Phi_*(\xi^{J_x u}_y) = \tilde{\xi}^{J_x u}_{\Phi(y)} = -J_1\tilde{\xi}^u_{\Phi(y)} = -J_1\Phi_*(\xi^u_y),$$

et de même,

$$\Phi_*(\xi^{iJ_x u}_y) = -\tilde{\xi}^{iJ_x u}_{\Phi(y)} = -J_1\tilde{\xi}^{iu}_{\Phi(y)} = -J_1\Phi_*(\xi^{iu}_y);$$

ceci montre que $\Phi_* \circ I_2 = -J_1$.

Finalement, $\Phi_* \circ (I_3) = \Phi_* \circ (I_1 \circ I_2) = -J_2 \circ J_1 = J_3$ ; ceci achève la démonstration de (ii).

### 2.5. Fin de la démonstration du Théorème 3

L'expression (2.1) de $\Phi$ se démontre ainsi ; soit $x$ un point quelconque de $\mathcal{O}$ et $y = \exp(iu) \cdot x$ un élément de $\pi^{-1}(x)$, où $u$ est un élément quelconque de $\mathfrak{m}_x$, que l'on écrit $u = \sum_{i=1}^{r} u_i\, e_i$ avec les conventions du paragraphe précédent ; comme nous l'avons observé dans le paragraphe 1.10, il résulte de (1.26) que $\mathfrak{Re}\, y$ et $\mathfrak{Im}\, y$ appartiennent respectivement à $\mathfrak{h}_x$ et à $\mathfrak{m}_x$ ; de façon précise, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}\, y &= \mathrm{ch}(\mathrm{ad}_{iu})(x) \\ &= x + \kappa \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{ch}\, u_i - 1)\, [e_i, J_x e_i], \end{aligned} \tag{2.22}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}\, y &= -i\, \mathrm{sh}(\mathrm{ad}_{iu})(x) \\ &= -\kappa \sum_{i=1}^{r} \mathrm{sh}\, u_i\, J_x e_i; \end{aligned} \tag{2.23}$$

(2.1) se déduit immédiatement de (2.23) puisque $\mathrm{ad}_x^{-1} = -\frac{1}{\kappa} J$ ; ceci montre (iv).

Il résulte clairement de (2.7), de (2.18) et des propriétés (1.30) de la base $\{e_i\}$ que

$$\rho_2(\Phi(y)) = \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{ch}(a_i) - 1)\, |e_i|^2; \tag{2.24}$$

à cause de (2.22) et puisque $\mathfrak{Re}\, y$ appartient à $\mathfrak{h}_x$ (voir aussi (1.28)), on a

$$\begin{aligned} \rho(y) &= -K(y, \frac{x}{\kappa}) \\ &= -K(\mathfrak{Re}\, y, \frac{x}{\kappa}) \\ &= -\frac{1}{\kappa} K(x, x) - \kappa \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{ch}\, u_i - 1)\, K(e_i, e_i) \\ &= -\frac{1}{\kappa} K(x, x) + \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{ch}\, u_i - 1)\, |e_i|^2 \\ &= -\frac{1}{\kappa} K(x, x) + \rho_2(\Phi(y)); \end{aligned} \tag{2.25}$$

ainsi, $\rho(y)$ et $\rho_2(\Phi(y))$ diffèrent de $-\frac{1}{\kappa} K(x, x)$ qui est constant ; ceci achève la démonstration de (iii), donc du théorème 3.

*Remarque 2.* — Le théorème 3 permet de considérer les structures hyperkählériennes sur $T^*\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^c$ comme une seule et même structure hyperkählérienne sur la variété abstraite $M$ sous-jacente à $T^*\mathcal{O}$ et à $\mathcal{O}^c$ ; on peut comprendre l'existence d'une

structure hyperkählérienne sur $M$ comme résultant du fait que cette variété admet *deux* réalisations naturelles « orthogonales » de variété symplectique holomorphe (voir aussi la remarque 3.4).

*Remarque 3.* — L'application $\Phi$ de $\mathcal{O}^c$ sur $T^*\mathcal{O}$ construite ci-dessus peut être a posteriori considérée comme une interprétation géométrique du difféomorphisme $\Phi$ de $T^*(G/H)$ construit en [10] dans le cas où $G$ est un « groupe classique ».

## 3. Potentiel, moments et action de $S^1$

### 3.1. Calcul effectif du potentiel

La formule (1.34) donnant le potentiel $\rho$ de la métrique hyperkählérienne de l'orbite complexe $\mathcal{O}^c$ relativement à sa structure complexe naturelle est remarquablement simple mais le calcul effectif de $\rho(y)$ au moyen de (1.34) semble toutefois dépendre de celui de $\pi(y)$ ; or, si la définition de la projection $\pi$ est conceptuellement simple, le calcul effectif de $\pi(y)$ est rien moins qu'aisé en général ; cette difficulté est surmontée au moyen de la proposition suivante qui fournit une définition alternative de la fibration $\pi$ *dans le cas où $\mathcal{O}$ est symétrique* :

PROPOSITION 6. — *Pour tout $y$ dans $\mathcal{O}^c$, il existe un unique point de $\mathcal{O}$ à distance minimale de $\mathfrak{Re}\, y$ ; ce point coïncide avec $\pi(y)$.*

*Démonstration.* — (Ce résultat a été énoncé et démontré en [7, proposition 1] ; nous en donnons ici une démonstration légèrement modifiée). Comme nous l'avons déjà observé, on a : $\rho(y) = -\frac{1}{\kappa}K(\mathfrak{Re}\, y, \pi(x))$, i.e. $\rho(y)$ ne dépend que de la partie réelle $\mathfrak{Re}\, y$ de $y$ ; de façon générale, pour tout élément fixé $a$ de $\mathfrak{g}$ et toute orbite adjointe $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}$, la restriction à $\mathcal{O}$ de la fonction $-K(a, \cdot)$ est une fonction de Morse au sens de Bott et la sous-variété critique d'indice nul est connexe (cf. [15, p. 501-502]) ; soit $F^y$ la fonction ainsi définie sur $\mathcal{O}$ quand $a = \mathfrak{Re}\, y$ ; il reste à monter que $x = \pi(y)$ est un point critique de $F^y$ et que le hessien $\operatorname{Hess} F^y$ de $F^y$ en $x$ est défini-positif ; pour tous $u$ dans $\mathfrak{m}_x = T_x\mathcal{O}$, on a $(dF)_x(u) = -K(\mathfrak{Re}\, y, [u, x]) = 0$ puisque $\mathfrak{Re}\, y$ appartient à $\mathfrak{h}_x$ ; au point critique $x$, le hessien de $F$ est bien défini et est donné par :

$$(\operatorname{Hess} F^y)_x(u, u) = -K(\mathfrak{Re}\, y, [u, [u, x]]); \tag{3.1}$$

on déduit aisément de (2.22) que ceci est encore égal à (notations du paragraphe 1.9) :

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess} F^y)_x(u, u) &= -\kappa^2 K(J_x u, J_x u) - \kappa^2 \sum_{i=1}^{r} (\operatorname{ch} u_i - 1)\, K([[e_i, J_x e_i], u], J_x u) \\ &= \kappa\, (|u|^2 + \sum_{i=1}^{r} (\operatorname{ch} u_i - 1)\, (R_{e_i, J_x e_i} u, J_x u));\end{aligned}$$

cette dernière expression est (strictement) positive pour tout $u$ non-nul de $\mathfrak{m}_x$ puisque la courbure bisectionnelle holomorphe (en fait, la courbure sectionnelle) de $\mathcal{O}$ est semi-positive (fait bien connu pour les espaces riemanniens symétriques de type compact, qui se vérifie facilement à partir de (1.29)). □

Une conséquence de la proposition précédente est que *la valeur en $y$ du potentiel $\rho$ est complètement déterminé par la seule orbite $\mathcal{O}_{\mathfrak{Re}\, y}$ de $\mathfrak{Re}\, y$* ; de façon précise, on a

COROLLAIRE 1. — *Soit $\mathcal{C}$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{g}$ contenant $x$ (relative à un choix quelconque d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $x$) ; $\mathcal{C}$ rencontre l'orbite $\mathcal{O}_{\mathfrak{Re}\, y}$ de $\mathfrak{Re}\, y$ en un point unique $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_{\mathfrak{Re}\, y}$ et on a*

$$\rho(y) = -\frac{1}{\kappa} K(x, \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_{\mathfrak{Re}\, y}). \tag{3.2}$$

*Démonstration.* — Il résulte de la proposition que $\rho(y)$ est essentiellement (à des constantes multiplicatives et additives près) égal à la distance dans $\mathfrak{g}$, munie de la métrique euclidienne $-K$, des deux orbites $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{Re}\, y}$ ; cette distance peut être évaluée dans $\mathcal{C}$ qui rencontre *orthogonalement* chacune de ces orbites en un point unique, respectivement $x$ et $\mathfrak{Re}\, y$. □

Une application directe est donnée plus bas dans le cas où $G = SU(n)$, voir paragraphe 4.

### 3.2. Action de $S^1$ sur l'orbite complexe

Le groupe $S^1$ des complexes de norme 1 agit naturellement sur $T^*\mathcal{O}$ par multiplication scalaire dans chaque fibre ; nous notons $Z$ le champ de vecteurs déterminé par cette action : $Z_\xi = \frac{d}{d\tau}_{|\tau=0} e^{i\tau}\xi = -J\xi$ (voir paragraphe 1.8) et $\mathcal{L}_Z$ la dérivée de Lie dans la direction de $Z$ ; l'effet de l'action de $S^1$ sur la structure hyperkählérienne $(g, J_1, J_2, J_3)$ est décrit par le lemme suivant

LEMME 6. — *L'action de $S^1$ préserve la structure complexe naturelle $J_1$ de $T^*\mathcal{O}$ et la métrique $g$ et, pour chaque $e^{i\tau}$ dans $S^1$, on a*

$$e^{i\tau} \cdot J_2 = \cos\tau\, J_2 + \sin\tau\, J_3; \tag{3.3}$$

*de façon équivalente :*

$$\mathcal{L}_Z g = 0, \quad \mathcal{L}_Z J_1 = 0, \quad \mathcal{L}_Z J_2 = -J_3, \quad \mathcal{L}_Z J_3 = J_2. \tag{3.4}$$

*Démonstration.* — L'action de $S^1$ préserve évidemment $J_1$ ; comme elle se réduit à l'identité sur la section nulle $\mathcal{O}$, elle préserve clairement le potentiel kählérien de $g$ relatif à $J_1$, décrit par le Théorème 1.6, donc $g$ elle-même ; pour décrire l'action de $S^1$ sur $J_2$, nous nous référons au paragraphe 2.1, où figure la description explicite de $J_2$, et aux notations du paragraphe 1.8 ; notons $\phi$ le difféomorphisme *multiplication par $e^{i\tau}$* ; on a

alors $(e^{i\tau} \cdot J_2)_\xi(U) := \phi_*(J_2(\phi_*^{-1}U))$, pour tout $\xi$ dans $T^*\mathcal{O}$ et tout $U$ dans $T_\xi(T^*\mathcal{O})$ ; si $U$ est horizontal, égal à $Y^H$, on a

$$\begin{aligned}\phi_*(J_2(\phi_*^{-1}Y^H)) &= -\phi_*((A_\xi Y)^V)\\ &= -\cos\tau\,(A_\xi Y)^V + \sin\tau\,(JA_\xi Y)^V\\ &= \cos\tau\, J_2 Y^H + \sin\tau\, J_1 J_2 Y^H;\end{aligned}$$

si $U = Y^V$ est vertical, on a de même

$$\begin{aligned}\phi_*(J_2(\phi_*^{-1}Y^V)) &= \phi_* J_2(\cos\tau\, Y^V + \sin\tau\,(JY)^V)\\ &= \phi_*(\cos\tau(D_\xi Y)^H + \sin\tau\,(JD_\xi Y)^H)\\ &= \cos\tau\,(D_\xi Y)^H + \sin\tau\,(JD_\xi Y)^H\\ &= \cos\tau\, J_2 Y^V + \sin\tau\, J_1 J_2 Y^V;\end{aligned}$$

ceci montre (3.3) ; (3.4) s'en déduit aisément. □

Via le difféomorphisme $\Phi$, l'action naturelle de $S^1$ sur $T^*\mathcal{O}$ est transportée en une action de $S^1$ sur l'orbite complexe $\mathcal{O}^c$ ; il résulte du théorème 3 et du lemme précédent que cette action préserve la fibration $\pi$, la métrique hyperkählérienne $g$ de $\mathcal{O}^c$ ainsi que la structure complexe $I_2$, mais échange la structure complexe naturelle $I_1$ de $\mathcal{O}^c$ avec $I_3$ ; de façon précise, si $Z$ désigne encore le champ de vecteurs sur $\mathcal{O}^c$ déterminé par l'action de $S^1$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Z g &= 0, & \mathcal{L}_Z I_2 &= 0,\\ \mathcal{L}_Z I_1 &= I_3, & \mathcal{L}_Z I_3 &= -I_1.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Il résulte clairement de l'expression (2.18) de $\Phi$ et du lemme 4 que, dans chaque fibre $\pi^{-1}(x)$, l'action de $S^1$ est décrite comme suit : si $y = \exp(iu) \cdot x$, où $u$ est un élément (bien-déterminé) de $\mathfrak{m}_x$, on a

$$e^{i\tau} \cdot y = \exp(i(\cos\tau\, u - \sin\tau\, J_x u)) \cdot x, \tag{3.6}$$

i.e., via le difféomorphisme naturel $u \mapsto \exp(iu) \cdot x$ de $\mathfrak{m}_x$ sur $\pi^{-1}(x)$, l'action de $S^1$ coïncide avec la rotation dans $\mathfrak{m}_x$ déterminée par $-J_x$.

PROPOSITION 7. — (i) *L'action de $S^1$ sur $\mathcal{O}^c$ est explicitée comme suit*

$$e^{i\tau} \cdot y = \mathfrak{Re}\, y + i\cos\tau\, \mathfrak{Im}\, y - i\sin\tau\, J_x \mathfrak{Im}\, y; \tag{3.7}$$

(ii) *Le champ de vecteurs $Z$ est donné par*

$$\begin{aligned}Z_y &= -i\, J_x \mathfrak{Im}\, y\\ &= -[\frac{\pi(y)}{\kappa}, y];\end{aligned} \tag{3.8}$$

*Démonstration.* — (i) se déduit facilement de (3.6), via le lemme 4 et les expressions (2.22), (2.23) de $\mathfrak{Re}\, y$ et $\mathfrak{Im}\, y$ ; (ii) se déduit directement de (3.7) et du fait que $y$ appartient à $\mathfrak{h}_x + i\,\mathfrak{m}_x$ ; à noter qu'on peut également déduire directement (3.8) de (3.6) en utilisant la formule générale exprimant la différentielle de l'application exponentielle d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur le groupe de Lie $G$ (voir, par exemple, [14]) : si $a_t$ est une courbe de $\mathfrak{g}$, avec $a_0 = a$ et $\dot{a}_0 = b$, on a

$$(\exp a)_*^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \exp(a_t) = \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_a}}{\mathrm{ad}_a}(b); \tag{3.9}$$

on a alors

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0} \exp(i(\cos\tau\, u - \sin\tau\, J_x u)) \cdot x \\ &\quad = \exp(iu) \cdot [\frac{1 - e^{-i\mathrm{ad}_u}}{i\mathrm{ad}_u}(-iJ_x u), x] \\ &\quad = [\frac{e^{i\mathrm{ad}_u} - 1}{i\mathrm{ad}_u}(-iJ_x u), y] \\ &\quad = \frac{1}{\kappa}[\frac{e^{i\mathrm{ad}_u} - 1}{i\mathrm{ad}_u}(i\mathrm{ad}_u x), y] \\ &\quad = \frac{1}{\kappa}[(e^{i\mathrm{ad}_u} - 1)\, x), y] \\ &\quad = \frac{1}{\kappa}[y - x, y] = -[\frac{x}{\kappa}, y]; \end{aligned} \tag{3.10}$$

on observe que, contrairement à la convention adoptée pour l'orbite compacte $\mathcal{O}$, nous utilisons en (3.8) l'identification *tautologique* de $T_y\mathcal{O}^c$ avec un sous-espace de $\mathfrak{g}^c$ (l'image de $\mathrm{ad}_y$ dans $\mathfrak{g}^c$) induite par le plongement naturel de $\mathcal{O}^c$ dans $\mathfrak{g}^c$ (voir paragraphe 1.8) ; on observe aussi que le second membre de (3.8) appartient à $i\mathfrak{g}$ pour tout $y$ dans $\mathcal{O}^c$. □

La connaissance de l'action de $S^1$ sur $\mathcal{O}^c$ *détermine* le potentiel $\rho$, donc la métrique hyperkählérienne ; de façon précise, on a

PROPOSITION 8. — *Le moment de $Z$ relativement à $\omega_2 = \mathfrak{Re}\,\Omega$ est égal, à une constante additive près, au potentiel $\rho$ de $g$ relativement à la structure complexe naturelle $I_1$ de $\mathcal{O}^c$, i.e.*

$$\iota_Z \omega_2 = -\mathrm{d}\rho. \tag{3.11}$$

*Démonstration.* — Conséquence facile de (3.8) et de (1.34). □

La proposition précédente peut aussi se déduire de la partie (ii), via le résultat général suivant, dû à N. Hitchin, qui s'énonce ainsi

LEMME 7. — *Soit $(M, g, I_1, I_2, I_3 = I_1 I_2)$ une variété hyperkählérienne ; soient $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ les formes de Kähler correspondant à $I_1, I_2, I_3$ ; soit $Z$ un champ de vecteurs sur $M$ préservant $g$ et $I_2$, donc aussi $\omega_2$, et tel que*

$$\mathcal{L}_Z \omega_1 = \omega_3, \qquad \mathcal{L}_Z \omega_3 = -\omega_1; \tag{3.12}$$

*si $\rho$ est un moment (local ou global) de $Z$ relativement à $\omega_2$, i.e. si $\iota_Z\omega_2 = -\mathrm{d}\rho$ (localement ou globalement), $\rho$ est un potentiel (local ou global) de la métrique $g$ relativement à $I_1$.*

*Démonstration* (pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ici la preuve — très simple — figurant en [18, Proposition 4]). — Par hypothèse, on a $\omega_1 = -\mathscr{L}_Z\omega_3 = -\mathrm{d}(\iota_Z\omega_3)$ ; il suffit donc de montrer que $\iota_Z\omega_3 = -\mathrm{d}^c\rho$, où $\mathrm{d}^c$ est relatif à $I_1$ ; or, pour tout vecteur $X$, on a $\iota_Z\omega_3(X) = \omega_3(Z,X) = g(I_3Z,X) = -\omega_2(Z,I_1X) = -\iota_Z\omega_2(I_1X) = \mathrm{d}\rho(I_1X) = -d^c\rho(X)$. □

On notera la dissymétrie de la situation entre $T^*\mathscr{O}$ et $\mathscr{O}^c$ ; dans le premier cas, l'action de $S^1$ est connue (c'est l'action naturelle des scalaires sur le fibré cotangent) mais ne détermine pas directement la métrique hyperkählérienne de $T^*\mathscr{O}$ puisque la forme symplectique préservée par cette action est la forme $\psi_1$ qui est inconnue en général; dans le second cas, la forme symplectique préservée par l'action de $S^1$ est connue (c'est la partie réelle de la forme de Kirillov-Kostant-Souriau) mais l'action de $S^1$ vérifiant (3.5) sur une orbite générale, dont l'existence pour certaines métriques hyperkählériennes peut être déduite de l'approche du problème via les équations de Nahm (voir [4]), n'est pas connue explicitement en général.

### 3.3. Applications-moment

Comme nous l'avons déjà observé, les moments $\mu_2$ et $\mu_3$ de l'action adjointe de $G$ sur l'orbite complexe $\mathscr{O}^c$ relativement aux formes symplectiques réelles $\omega_2 = \Re e\,\Omega$ et $\omega_3 = \Im m\,\Omega$, vues l'un et l'autre comme des applications de $\mathscr{O}^c$ dans $\mathfrak{g}$ via l'isomorphisme $G$-équivariant de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$ induit par la forme de Killing $K$, sont donnés simplement par

$$\mu_2(y) = \Re e\, y, \qquad \mu_3(y) = \Im m\, y; \tag{3.13}$$

il reste à déterminer la troisième application-moment $\mu_1$, relative à la forme symplectique $\omega_1$, forme de Kähler de $g$ relativement à $I_1$ ; on a

PROPOSITION 9. — *Le moment $\mu_1$ de l'action de $G$ sur $\mathscr{O}^c$ relatif à la forme symplectique $\omega_1$ est donné par*

$$\mu_1(y) = -i[\frac{\pi(y)}{\kappa}, y]. \tag{3.14}$$

*Démonstration.* — Observons tout d'abord, que le second membre de (3.14) appartient effectivement à $\mathfrak{g}$ (en fait, à $\mathfrak{m}_x$), puisque $y$ appartient à $\mathfrak{h}_x + i\mathfrak{m}_x$ (voir paragraphe 1.10). La forme symplectique $\omega_1$ est donnée (voir [7] par

$$\omega_1(\xi_y^a, \xi_y^b) = \frac{1}{\kappa}\Im m(K(\xi_y^a, \pi_*(\xi_y^b)) - K(\xi_y^b, \pi_*(\xi_y^a))), \tag{3.15}$$

pour tous $a$, $b$ dans $\mathfrak{g}^c$ (ici, comme dans le paragraphe précédent, nous utilisons l'identification tautologique de $T_y\mathscr{O}^c$ avec un sous-espace de $\mathfrak{g}^c$) ; il nous faut vérifier que, pour

tout $a$ dans $\mathfrak{g}$ et tout $b$ dans $\mathfrak{g}^c$, on a

$$\omega_1(\xi^a_y, \xi^b_y) = -K(\mathrm{d}\mu_1(\xi^b), a),$$

où $\mu_1$ est l'application de $\mathscr{O}^c$ dans $\mathfrak{g}$ définie par (3.14) ; il suffit de tester cette identité pour $b$ appartenant à $\mathfrak{m}_x$ ou à $i\mathfrak{m}_x$ (voir paragraphe 2.4); si $b = u$ appartient à $\mathfrak{m}_x$, comme $\pi$ est $G$-équivariant, on a

$$\begin{aligned}
\omega_1(\xi^a_y, \xi^u_y) &= \frac{1}{\kappa}\mathfrak{Im}(K([a,y],[u,\pi(y)]) - K([u,y],[a,\pi(y)])) \\
&= -\frac{1}{\kappa}\mathfrak{Im}(K([[u,\pi(y)],y],a) + K([\pi(y),[u,y],a)) \\
&= \frac{1}{\kappa}\mathfrak{Re}(K(i[[u,\pi(y)],y],a) + K(i[\pi(y),[u,y],a)) \\
&= -K(\mathrm{d}\mu_1(\xi^u_y), a);
\end{aligned}$$

si $b = iu$ appartient à $i\mathfrak{m}_x$, $\xi^{iu}$ est vertical et on a

$$\begin{aligned}
\omega_1(\xi^a_y, \xi^{iu}_y) &= -\frac{1}{\kappa}\mathfrak{Im}\, K(\xi^{iu}_y, [a,\pi(y)]) \\
&= -\frac{1}{\kappa}\mathfrak{Im}\, K([iu,y],[a,\pi(y)]) \\
&= -\frac{1}{\kappa}\mathfrak{Im}\, K([\pi(y),[iu,y]],a) \\
&= \frac{1}{\kappa}\mathfrak{Re}\, K(i[\pi(y),[iu,y],a) \\
&= -K(\mathrm{d}\mu_1(\xi^{iu}_y), a).
\end{aligned}$$

□

*Remarque 4.* — En termes des trois applications moment $\mu_1, \mu_2, \mu_3$, l'action de $S^1$ décrite par (3.7) s'écrit encore

$$e^{i\tau} \cdot y = \mu_2(y) + i\cos\tau\, \mu_3(y) - i\sin\tau\, \mu_1(y). \tag{3.16}$$

Dans cette expression, $\mu_2(y) = \mathfrak{Re}\, y$ et $\mu_3(y) = \mathfrak{Im}\, y$ se déduisent directement de $y$, tandis que $\mu_1(y)$ est *déterminé*, à une faible ambiguïté près, par le fait que le second membre de (3.16) appartient à une même orbite adjointe $\mathscr{O}^c$ pour tout $\tau$ ; en particulier, dans le cas où $G^c = Sl(n,\mathbb{C})$, le second membre de (3.16) est isospectral pour tout $\tau$ ; les équations algébriques qui traduisent ce fait, qui sont aussi les équations que l'on obtient par voie « twistorielle » (voir [5]), ne sont toutefois résolubles explicitement que dans les cas que nous avons déjà pu résoudre, essentiellement le cas symétrique (il est également possible de retrouver la formule de Kobak-Swann considérée au paragraphe 5.2 par cette méthode).

### 3.4. Équations de Nahm

Posons $T_1 = \mu_1(y)$, $T_2 = \mu_2(y)$ , $T_3 = \mu_3(y)$ ; lorsque $y = \exp(iu) \cdot x$, avec $u = \sum_{i=1}^r u_i\, e_i$, où $\{e_i\}$ est une base satisfaisant (1.30) d'une sous-algèbre abélienne

maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans dans $\mathfrak{m}_x$ et contenant $u$ (voir paragraphe 1.9), les $T_i$ sont donnés par (voir paragraphe 2.5)

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \kappa \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sh} u_i \, e_i, \\
T_2 &= x + \kappa \sum_{i=1}^{r} (\operatorname{ch} u_i - 1) \, [e_i, J_x e_i] \\
T_3 &= -\kappa \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sh} u_i \, J_x e_i;
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

introduisons un paramètre réel $s$, variant de $-\infty$ à 0, et posons, pour $i = 1, \cdots, r$,

$$
u_i(s) = 2\operatorname{Argth}(e^{\kappa s} \operatorname{th} \frac{u_i}{2}); \tag{3.18}
$$

les $T_i$ deviennent alors les fonctions de $s$ suivantes :

$$
\begin{aligned}
T_1(s) &= \kappa \sum_{i=1}^{r} \frac{2\, e^{s\kappa} \operatorname{th} \frac{u_i}{2}}{1 + e^{2s\kappa} (\operatorname{th} \frac{u_i}{2})^2} \, e_i, \\
T_2(s) &= x + \kappa \sum_{i=1}^{r} \frac{2\, e^{2s\kappa} (\operatorname{th} \frac{u_i}{2})^2}{1 + e^{2s\kappa} (\operatorname{th} \frac{u_i}{2})^2} \, [e_i, J_x e_i], \\
T_3(s) &= -\kappa \sum_{i=1}^{r} \frac{2\, e^{s\kappa} \operatorname{th} \frac{u_i}{2}}{1 + e^{2s\kappa} (\operatorname{th} \frac{u_i}{2})^2} \, J_x e_i,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

et vérifient (le paramètre $s$ a été choisi à cet effet) le *système de Nahm*

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T_1(s)}{\mathrm{d}s} &= [T_2(s), T_3(s)], \\
\frac{\mathrm{d}T_2(s)}{\mathrm{d}s} &= [T_3(s), T_1(s)], \\
\frac{\mathrm{d}T_3(s)}{\mathrm{d}s} &= [T_1(s), T_2(s)],
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

avec

$$
T_1(0) = T_1, \quad T_2(0) = T_2, \quad T_3(0) = T_3, \tag{3.21}
$$

et. quand $s$ tend vers $-\infty$,

$$
T_1(s) \to 0, \; T_2(s) \to x, \; T_3(s) \to 0, \tag{3.22}
$$

avec les valeurs asymptotiques suivantes :

$$
\begin{aligned}
e^{-s\kappa}\, T_1(s) &\to 2\kappa \sum_{i=1}^{r} \operatorname{th} u_i\, e_i, \\
e^{-2s\kappa}\,(T_2(s) - x) &\to 2\kappa \sum_{i=1}^{r} (\operatorname{th} u_i)^2\, [e_i, J_x e_i], \qquad (3.23)\\
e^{-s\kappa}\, T_3(s) &\to -2\kappa \sum_{i=1}^{r} \operatorname{th} u_i\, J_x e_i.
\end{aligned}
$$

De façon générale, les systèmes de Nahm sont au départ des travaux de P. K. Kronheimer, A. Kovalev et O. Biquard (cités paragraphe 1.4) montrant l'existence de métriques hyperkählériennes sur les orbites adjointes des groupes de Lie complexes semi-simples ainsi que, en [4] sur les espaces cotangents des orbites compactes ; le cas présent est le seul, à notre connaissance, où ces équations peuvent être résolues explicitement.

*Remarque 5.* — On observe que l'élément $y$ de $\mathcal{O}^c$ est égal (par définition des $T_i$) à $y = T_2 + i\, T_3$, tandis que $\Phi(y)$, vu comme un élément de $(T^*\mathcal{O})^{(1,0)}$, est égal à $-(T_1 + i\, T_3)$ ; cette observation est la manifestation dans le cas présent d'un fait plus général : pour *toute* orbite adjointe $\mathcal{O}$ de $G$, les structures hyperkählériennes de $T^*\mathcal{O}$ peuvent être identifiées, au sens où nous l'avons fait dans le cas symétrique, à des structures hyperkählériennes de $\mathcal{O}^c$ et le difféomorphisme $\Phi$ qui exprime cette identification se traduit au niveau des équations de Nahm essentiellement par l'échange de $T_1$ et $T_2$, cf. [4].

## 4. Un exemple : métriques hyperkählériennes sur les grassmanniennes complexifiées

### 4.1. Les grassmanniennes complexifiées

Les considérations précédentes s'appliquent aisément au cas où le groupe compact $G$ est le groupe spécial unitaire $SU(n)$ dont le groupe complexifié est le groupe linéaire spécial $Sl(n, \mathbb{C})$.

Les orbites adjointes symétriques de $su(n)$ sont celles des éléments de la forme $x = i\lambda \begin{pmatrix} q\,1_p & 0 \\ 0 & -p\,1_q \end{pmatrix}$, où $\lambda$ est un réel non-nul, que nous pouvons choisir positif, et $p$ et $q$ sont deux entiers positifs tels que $p + q = n$, $p \leqslant q$; les éléments de l'orbite $\mathcal{O}_x$ de $x$ ont deux valeurs propres, $i\lambda$, de multiplicité $p$ et $-i\lambda$, de multiplicité $q$, et sont ainsi complètement déterminés par les espaces propres correspondants constitués d'un $p$-plan complexe de $\mathbb{C}^n$ et du $q$-plan orthogonal relativement à la structure hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$ ; $\mathcal{O}_x$ est ainsi identifiée à la *grassmannienne* $\mathrm{Gr}(p, n)$ des $p$-plans (vectoriels) complexes de $\mathbb{C}^n$.

Les éléments de $\mathcal{O}^c$ sont eux-mêmes déterminés par leurs espaces propres ; l'orbite complexe $\mathcal{O}^c$ est ainsi identifiée, comme variété complexe, à l'ouvert $(\mathrm{Gr}(p, n) \times$

$\mathrm{Gr}(q,n))_0$ de $\mathrm{Gr}(p,n) \times \mathrm{Gr}(q,n)$ formé des paires $(P,Q)$ d'un $p$-plan $P$ et d'un $q$-plan $Q$ tels que $P \cap Q = \{0\}$ ; cette variété est une *complexification naturelle* de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(p,n)$ (aussi de $\mathrm{Gr}(q,n)$) ; sa partie « réelle » $\mathscr{O}$ est la sous-variété (totalement réelle) des paires $(P,Q)$ telles que $Q = P^{\perp}$; elle possède une structure symplectique holomorphe naturelle $\Omega'$ définie comme suit ; en tout point $(P,Q)$ de $\mathrm{Gr}(p,n) \times \mathrm{Gr}(q,n)$, l'espace tangent $T_{(P,Q)}(\mathrm{Gr}(p,n) \times \mathrm{Gr}(q,n))_0$ est naturellement identifié à l'espace $\mathrm{Hom}(P, \mathbb{C}^n/P) \times \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{C}^n/Q)$, soit encore à $\mathrm{Hom}(P,Q) \times \mathrm{Hom}(Q,P)$ à cause de l'hypothèse de transversalité ; on pose alors

$$\Omega'((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \mathrm{tr}(Y_2 \circ X_1 - Y_1 \circ X_2), \tag{4.1}$$

où $X_1, X_2$ appartiennent à $\mathrm{Hom}(P,Q)$ et $(Y_1,Y_2)$ à $\mathrm{Hom}(Q,P)$ ; $\Omega'$ coïncide à un facteur constant près avec la forme de Kirillov-Kostant-Souriau $\Omega$.

Soit $y$ un point de l'orbite complexe $\mathscr{O}^c$ ; via l'action de $G = SU(n)$, qui ne modifie pas $\rho(y)$, $y$ peut s'écrire sous la forme triangulaire suivante

$$y = i\lambda \begin{pmatrix} q1_p & n\,\mathrm{diag}\,(a_1,\cdots,a_p) & 0 \\ 0 & -p1_p & 0 \\ 0 & 0 & -p1_{q-p} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

où les $a_i$, $i = 1,\cdots,p$, sont des nombres réels positifs ou nuls et $\mathrm{diag}\,(a_1,\cdots,a_p)$ désigne la matrice diagonale formées sur les $a_i$; en vertu du corollaire 1, $\rho(y)$ est donné par l'algorithme suivant :

1. diagonaliser $\mathfrak{Re}\, y = \frac{y-y^*}{2}$ ;

2. ranger les valeurs propres de $\frac{y-y^*}{2}$ dans l'ordre décroissant (après multiplication par $-i$), soit $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$, de façon que
$i\,\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ soit dans la même chambre de Weyl que $x = i\lambda \begin{pmatrix} q1_p & 0 \\ 0 & -p1_q \end{pmatrix}$ ; on obtient ainsi, par un calcul simple :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{1}{2}\lambda((q-p) + n\sqrt{1+a_i^2}), \qquad 1 \leqslant \cdots \leqslant p, \\ \mu_i &= -\lambda\, p, \qquad p+1 \leqslant \cdots \leqslant q, \\ \mu_i &= \frac{1}{2}\lambda((q-p) - n\sqrt{1+a_i^2}), \qquad q+1 \leqslant \cdots \leqslant n; \end{aligned} \tag{4.3}$$

3. en se souvenant que la forme de Killing $K$ de $\mathfrak{su}(n)$ est définie par $K(a,b) = 2n\,\mathrm{tr}(a\,b)$ et après avoir vérifié ( aisément ) que $\kappa = \lambda\, n$, on obtient

$$\rho(y) = 2n\frac{1}{n\lambda}\lambda^2(q\sum_{i=1}^{p}\mu_i + (q-p)p^2 - p\sum_{i=q+1}^{n}\mu_i),$$

soit donc, à une constante additive près, la formule suivante, figurant en [7] (avec des notations différentes) :

$$\rho(y) = n^2\lambda\sum_{i=1}^{p}\sqrt{1+a_i^2}. \tag{4.4}$$

*Remarque 6.* — Posons $\lambda_i = \lambda\, a_i$ dans (4.2) et faisons tendre $\lambda$ vers 0 ; la matrice $y = y_\lambda$ tend alors vers la matrice $y_0$ définie par

$$y_0 = i \begin{pmatrix} 0 & n\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.5}$$

$y_0$ appartient à l'orbite *nilpotente* $\mathcal{N}_p$ de $Sl(n, \mathbb{C})$ constituée des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant

1. $y_0^2 = 0$,
2. $\dim(\mathrm{Im}\, y_0) = p$,

où $\mathrm{Im}\, y_0$ désigne l'image de $y_0$ dans $\mathbb{C}^n$ ; par [26], $\mathcal{N}_p$ admet une métrique hyperkählérienne $g$ et un argument de continuité (voir [4]) montre que le potentiel $\rho(y_0)$ de $g$ relativement à la structure complexe naturelle de $\mathcal{N}_p$ est égal à la limite de $\rho(y_\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers 0, soit donc

$$\rho(y_0) = n^2 \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i|. \tag{4.6}$$

Nous laissons au lecteur, comme un exercice facile, le soin de démontrer à partir de (4.4) la formulation équivalente suivante du potentiel $\rho$, toujours à une constante additive près :

$$\rho(y) = n\,\mathrm{tr}\sqrt{y^* y}, \tag{4.7}$$

où $\sqrt{y^* y}$ est la racine carrée positive de la matrice hermitienne $y^* y$ (on se ramène au cas—facile—de $SU(2)$ en re-disposant les lignes et colonnes de $y$).

Cette formule vaut encore dans le cas de l'orbite nilpotente décrite dans la remarque 4.1.

Dans le cas où $n = 2$, la formule (4.7) s'écrit encore

$$\rho(y) = 2\sqrt{\mathrm{tr}(y^* y) + \sqrt{\det(y^* y)}}; \tag{4.8}$$

cette formule figure également sous cette forme dans [28], cf. aussi [18], où elle apparaît comme un cas particulier d'une tentative générale pour exprimer le potentiel des métriques hyperkählérienne sur les orbites adjointes de $Sl(n, \mathbb{C})$ en termes de fonctions theta définies sur une *courbe spectrale* associée ; il semble que le cas de $Sl(2, \mathbb{C})$ soit le seul, à ce jour, où cette méthode ait abouti à une formule explicite.

*Remarque 7.* — La formule (4.4) montre en particulier que la métrique hyperkählérienne des orbites de type symétrique de $Sl(n, \mathbb{C})$ sont *algébriques* au sens réel; ceci vaut pour toutes les orbites complexes $\mathcal{O}^c$ [5] et explique pourquoi les mêmes formules valent dans les cas hyperkählériens et pseudo-hyperkählériens comme il a été observé dans la remarque 1.

### 4.2. Action de $S^1$ sur les grassmanniennes complexifiées

Posons $a_i = \mathrm{tg}(\theta_i)$, où $\theta_i$ est un angle appartenant à l'intervalle semi-ouvert $[0, \frac{\pi}{2})$, la formule (4.4) s'écrit

$$\rho(y) = n^2\lambda \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\cos\theta_i}. \tag{4.9}$$

Les angles $\theta_i$, $i = 1, \cdots, r$, ont la signification géométrique suivante ; soit $(P, Q)$ la paire des espaces propres de $y$, où $P$ est un $p$-plan et $Q$ un $q$-plan de $\mathbb{C}^n$ (voir plus haut) ; posons $P' = Q^\perp$ ; $y$ est maintenant décrit par une paire de $p$-plans $(P, P')$ vérifiant $P' \cap P^\perp = \{0\}$ ; en particulier, $P'$ est le *graphe* d'une application $A$ de $P$ dans $P^\perp$, i.e. $P' = \{w + Aw | w \in P\}$ ; on vérifie aisément que les $a_i$ sont les racines carrées positives des valeurs propres de $A^* \circ A$, qui est un endomorphisme hermitien semi-positif de $P$ ; celui-ci se décompose en une somme orthogonale

$$P = \bigoplus_{i=1}^{r} \ell_i, \tag{4.10}$$

où la droite complexe $\ell_i$ est propre pour $A^* \circ A$ relativement à $a_i^2$ (génériquement, les $a_i$ sont distincts et les droites complexe $\ell_i$ sont bien définies ; ce n'est plus vrai s'il y a des multiplicités, en particulier si $y$ appartient à $\mathcal{O}$, i.e. si $P' = P$, cas où l'indétermination est totale ; mais ce qui suit a un sens dans tous les cas) ; soit $\ell'_i$ la droite complexe de $P'$ engendrée par

$$e'_i = \frac{e_i + A(e_i)}{|e_i + A(e_i)|} \tag{4.11}$$

où $e_i$ est un générateur de $\ell_i$ (si $e_i$ est choisi de norme 1, ce que nous supposerons dans la suite, $e'_i$ est également de norme 1) ; on obtient ainsi une décomposition orthogonale

$$P' = \bigoplus_{i=1}^{r} \ell'_i \tag{4.12}$$

de $P'$, décomposition en espaces propres pour l'endomorphisme $(A')^* \circ A'$ de $P'$, si $P$ est réalisée comme le graphe de $A'$ relativement à $P'$ et $(P')^\perp$ ; chaque paire $\{\ell_i, \ell'_i\}$, $i = 1, \cdots, r$, est appelée une *paire caractéristique* de $y$ ; on vérifie aisément que $\theta_i$ est l'*angle* formé par les deux droites complexe $\ell_i$ et $\ell'_i$, i.e. l'angle défini par

$$\cos\theta_i = |\langle e_i, e'_i\rangle|, \tag{4.13}$$

où $e_i$ et $e'_i$ sont des générateurs unitaires quelconques de $\ell_i$ et $\ell'_i$ respectivement (on choisira dans la suite $e_i$ et $e'_i$ liés par (4.11), mais ce n'est pas nécessaire ici).

Le potentiel $\rho$, tel qu'il est exprimé par (4.4) ou par (4.9), apparaît ainsi comme le potentiel d'un *système découplé* de $p$ systèmes $\{\ell_i, \ell'_i\}$, chacun correspondant au cas où $G$ est le groupe $SU(2)$.

Ce découplage est préservé par la projection $\pi$ et par l'action de $S^1$, qui s'expriment l'une et l'autre très simplement en termes de paires caractéristiques (nous laissons au lecteur le soin de démontrer les faits qui suivent). Si $\{\ell_i, \ell'_i\}$, $i = 1, \cdots, r$, sont les paires caractéristiques d'un point $y$ de $\mathcal{O}^c$, et si $e_i$ et $e'_i$ sont des générateurs unitaires de $\ell_i$ et $\ell'_i$ liés par (4.11), on a :

$$\pi(y) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbb{C}\,(e_i + e'_i); \tag{4.14}$$

i.e. $\pi(y)$ est l'élément de $\mathcal{O}$ dont l'espace propre relatif à la valeur propre $iq\lambda$ est le $p$-plan $P_0$ complexe engendré par les $e_i + e'_i$, et l'espace propre relatif à $-ip\lambda$ est le $q$-plan $P_0^{\perp}$ ; avec les mêmes notations, les paires caractéristiques $\{\ell_{\tau,i}, \ell'_{\tau,i}\}$ de $e^{i\tau} \cdot y$ sont les droites complexes

$$\begin{aligned} \ell_{\tau,i} &= \mathbb{C}\,(\frac{1}{2}\,(e_i + e'_i) + \frac{e^{i\tau}}{2}\,(e_i - e'_i)), \\ \ell'_{\tau,i} &= \mathbb{C}\,(\frac{1}{2}\,(e_i + e'_i) - \frac{e^{i\tau}}{2}\,(e_i - e'_i)), \end{aligned} \tag{4.15}$$

où les générateurs $e_{\tau,i} = \frac{1}{2}\,(e_i + e'_i) + \frac{e^{i\tau}}{2}\,(e_i - e'_i)$ et $e'_{\tau,i} = \frac{1}{2}\,(e_i + e'_i) - \frac{e^{i\tau}}{2}\,(e_i - e'_i)$ sont unitaires et liés par (4.11) pour tout $\tau$ ; on notera que la somme $e_{\tau,i} + e'_{\tau,i}$ est constante, égale à $e_i + e'_i$, ce qui est cohérent avec (4.14) et le fait que l'action de $S^1$ préserve la fibration $\pi$.

L'expression de $\pi$ et de l'action de $S^1$ en termes matriciels est moins facile à obtenir ; si $y$ est sous la forme (4.2), on a :

(4.16)

$$x_0 = i\lambda \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\frac{qd_1^2 - pa_1^2}{a_1^2+d_1^2}, \cdots, \frac{qd_p^2 - pa_p^2}{a_p^2+d_p^2}) & n\operatorname{diag}(\frac{a_1d_1}{a_1^2+d_1^2}, \cdots, \frac{a_pd_p}{a_p^2+d_p^2}) & 0 \\ n\operatorname{diag}(\frac{a_1d_1}{a_1^2+d_1^2}, \cdots, \frac{a_pd_p}{a_p^2+d_p^2}) & \operatorname{diag}(\frac{qa_1^2 - pd_1^2}{a_1^2+d_1^2}, \cdots, \frac{qa_p^2 - pd_p^2}{a_p^2+d_p^2}) & 0 \\ 0 & 0 & -p\,1_{q-p} \end{pmatrix}$$

en posant $d_i = 1 + \sqrt{1 + a_i^2}$ ; nous déduisons aisément de (4.16) et de (3.8) l'expression suivante du champ de vecteurs $Z$ en $y$ :

$$Z_y = \frac{n\lambda}{2} \begin{pmatrix} -\operatorname{diag}(\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}, \cdots, \frac{\sin^2\theta_r}{\cos\theta_r}) & \operatorname{diag}(\sin\theta_1, \cdots, \sin\theta_r) & 0 \\ \operatorname{diag}(\sin\theta_1, \cdots, \sin\theta_r) & \operatorname{diag}(\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}, \cdots, \frac{\sin^2\theta_r}{\cos\theta_r}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.17}$$

l'expression matricielle de l'action de $S^1$ se déduit aisément de (4.17) et de la proposition 7.

### 4.3. Le cas où $G = SU(2)$ : la métrique de Eguchi-Hanson

Le cas où le groupe compact est $SU(2)$ appelle un commentaire particulier ; les orbites adjointes de $SU(2)$ dans $su(2)$ sont les sphères $S^2$ munie d'une métrique ronde

$g_c$ de courbure $c$ et de la structure complexe déterminées par $g_c$ et l'orientation ; de façon équivalente, une orbite adjointe $\mathcal{O}$ de $SU(2)$ est une droite projective complexe munie d'une métrique de Fubini-Study ; la métrique hyperkählérienne sur l'espace total de $T^*S^2$ est la métrique de Eguchi-Hanson $g_{EH}$ découverte à la fin des années 70 ; en termes de distributions horizontale et verticale, $T^H$ et $T^V$, cette métrique est décrite de la façon suivante : en tout point $\xi$ de $T^*S^2$, $H_\xi$ et $V_\xi$ sont orthogonaux, $g_{EH}$ est égale à $\sqrt{1+c|\xi|^2}\, g_c$ sur $T_\xi^H$ et à $\frac{1}{\sqrt{1+c|\xi|^2}}\, g_c$ sur $T_\xi^V$ ; en vertu du Théorème 3, la structure hyperkählérienne de Eguchi-Hanson peut également être considérée sur les orbites complexes $\mathcal{O}^c$ ; chacune d'elle est identifiée, comme variété complexe à $S^2 \times S^2 - \Delta$, où $\Delta$ désigne la diagonale ; un point $y$ d'une orbite complexe $\mathcal{O}^c$ est donc identifiée, soit à une paire $\{\ell_1, \ell_2\}$ de droites complexes distinctes de $\mathbb{C}^2$, soit à une paire $(u_1, u_2)$ de points distincts de $S^2$ ; avec les notations précédentes, la paire caractéristique de $y$ est la paire $\{\ell = \ell_1, \ell' = \ell_2^\perp\}$.

Le potentiel $\rho$ de la métrique de Eguchi-Hanson, relativement à la structure complexe naturelle de $S^2 \times S^2 - \Delta$ est alors donné (à une constante multiplicative près, dépendant de l'orbite choisie, i.e. de $c$) dans la première interprétation, par

$$\rho((\ell_1, \ell_2)) = \frac{1}{\sin \alpha}, \tag{4.18}$$

où $\alpha$ est l'angle des deux droites complexes $\ell_1, \ell_2$ tel qu'il a été défini plus haut, et, dans la deuxième interprétation, par

$$\rho((u_1, u_2)) = \frac{2}{|u_1 - u_2|}, \tag{4.19}$$

où $|u_1 - u_2|$ est la distance euclidienne de $u_1$ et $u_2$ dans $\mathbb{R}^3$ ; dans cette interprétation, la projection $\pi$ de $\mathcal{O}^c = S^2 \times S^2 - \Delta$ sur $\mathcal{O} = S^2$ est décrite par

$$\pi((u_1, u_2)) = \frac{u_1 - u_2}{|u_1 - u_2|}, \tag{4.20}$$

et le difféomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{O}^c = S^2 \times S^2 - \Delta$ sur $T^*\mathcal{O} = T^*S^2$ (identifié à $TS^2$) est décrit schématiquement par le dessin suivant : à la paire $((u_1, u_2))$ de $S^2 \times S^2 - \Delta$ est associée par $\Phi$ la paire $(u = \frac{u_2 - u_1}{|u_2 - u_1|}, X)$ de $T_u S^2$, où $X$ est l'intersection avec le plan tangent à $S^2$ en $u$ avec la demi-droite joignant l'origine à $u_1$.

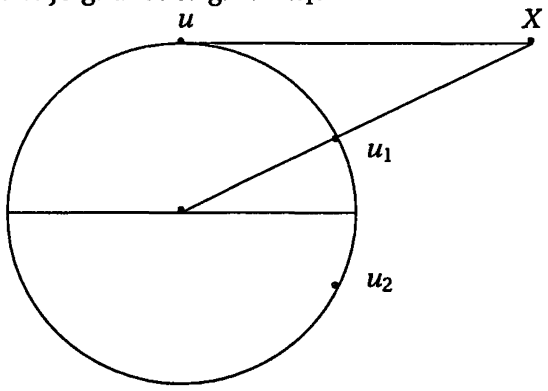


*Figure 1*

## 5. Les orbites adjointes régulières de $Sl(3, \mathbb{C})$

Les techniques que nous avons développées dans le cas où $\mathcal{O}$ est une orbite symétrique ne s'étendent pas au cas général. Dans cette dernière partie, nous considérons le cas non-symétrique a priori le plus simple, où le groupe compact $G$ est le groupe spécial unitaire $SU(3)$ et où $\mathcal{O}$ est une orbite *régulière* de l'algèbre de Lie $su(3)$, et nous tentons une approche du problème consistant à réaliser l'orbite complexe correspondante $\mathcal{O}^c$ comme un *quotient hyperkählérien* par une action de $S^1$ d'une orbite adjointe complexe *de type symétrique* du groupe $Sl(4, \mathbb{C})$, dont la géométrie hyperkählérienne a été développée dans les parties précédentes ; cette méthode donne des informations sur la géométrie hyperkählérienne de $\mathcal{O}^c$, mais, comme nous verrons, le calcul effectif ne peut être mené à son terme que pour l'orbite *nilpotente* correspondante ; nous retrouvons ainsi, assez simplement, la *formule de Kobak-Swann* démontrée en [21].

### 5.1. Orbites de $Sl(3, \mathbb{C})$ et orbites de type symétrique de $Sl(4, \mathbb{C})$

Dans la suite, le groupe $Sl(3, \mathbb{C})$ est réalisé comme un sous-groupe de $Sl(4, \mathbb{C})$ via la décomposition orthogonale

$$\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}\, u_0 \tag{5.1}$$

où $u_0$ est un générateur de norme 1 de la droite complexe additionnelle $\mathbb{C}\, u_0$.

Nous notons $S^1$ le sous-groupe du groupe unitaire $U(4)$ engendré par l'élément $\sigma = \mathrm{diag}(0, 0, 0, i)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(4)$, constitué des matrices de la forme $\exp(\tau\sigma) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, e^{i\tau})$ ; ce groupe $S^1$ agit par restriction sur les orbite adjointes de $Gl(4, \mathbb{C})$ dans $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ qui sont aussi les orbites adjointes de $Sl(4, \mathbb{C})$ dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, en préservant la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau $\Omega$ et la métrique hyperkählérienne de cette orbite ; elle s'étend en une action du groupe $\mathbb{C}^*$ formé des matrices de la forme $\mathrm{diag}(1, 1, 1, z)$, où $z$ est un complexe non-nul ; cette action est holomorphe et préserve encore $\Omega$.

L'action de $\mathbb{C}^*$ admet une application-moment (holomorphe) $\mu_c$ relativement à $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C} = Lie(\mathbb{C}^*)$, explicitée par:

$$\mu_c(y) = K(y, \sigma), \tag{5.2}$$

pour tout $y$ dans l'orbite considérée, où $K$ est la forme de Killing (complexe) de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C}) = \mathrm{End}\, \mathbb{C}^4$ convenablement normalisée.

Relativement à la décomposition (5.1), tout élément $y$ de $\mathrm{End}\, \mathbb{C}^4$ s'écrit sous la forme:

$$y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & k \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

où: $A$ appartient à End $\mathbb{C}^3$; $B$ à Hom $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3) = \mathbb{C}^3$; $C$ à Hom $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}) = (\mathbb{C}^3)^*$; $k$ à $\mathbb{C}$ ; avec ces notations, on a

$$\mu_c(y) = i\,k. \tag{5.4}$$

Nous considérons le cas où l'orbite complexe considérée est une orbite semi-simple de type symétrique de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, notée $\mathcal{O}_4^c$ ; plus précisément, $\mathcal{O}_4^c$ est l'orbite sous l'action adjointe de $Sl(4, \mathbb{C})$ du point

$$x_0 = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où $\lambda$ est un nombre réel positif; pour tout $\lambda$, l'orbite compacte correspondante $\mathcal{O}_4$ dans $\mathfrak{su}(4)$ s'identifie naturellement à la grassmannienne des 2-plans vectoriels complexes de $\mathbb{C}^4$, voir plus haut, paragraphe 4.

On a

$$(y - i\lambda)\,(y + i\lambda) = 0, \tag{5.5}$$

qui, compte-tenu de (5.3), se traduit par le système:

$$\begin{aligned} &(A - i\lambda)\,(A + i\lambda) = -BC, \\ &CA = -k\,C, \\ &AB = -k\,B, \\ &CB = -\lambda^2 - k^2; \end{aligned} \tag{5.6}$$

en particulier, on a

$$(A + k)\,(A - i\lambda)\,(A + i\lambda) = 0. \tag{5.7}$$

Nous nous restreignons désormais au cas où $k$ est égal à 0.

Le système se réduit alors au système suivant :

$$\begin{aligned} &(A - i\lambda)\,(A + i\lambda) = -BC, \\ &CA = 0, \\ &AB = 0, \\ &CB = -\lambda^2, \end{aligned} \tag{5.8}$$

et (5.7) se réduit à

$$A(A + i\lambda)(A - i\lambda) = 0; \tag{5.9}$$

nous en déduisons que $A$ a trois valeurs propres *distinctes* $-i\lambda, 0, +i\lambda$, en particulier appartient à une orbite *régulière* de $Sl(3,\mathbb{C})$ que nous notons $\mathcal{O}_3^c$ ; en effet, il résulte immédiatement du système (5.8) que $(A+i\lambda)(A-i\lambda)$ ne peut être nul (puisque $B$ et $C$ sont non-nuls à cause de $CB = -\lambda^2$) ; si $A(A+i\lambda) = 0$, la première équation de (5.8) se réduit à : $\lambda(A+i\lambda) = BC$ ; on a donc

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\lambda}BC - i\lambda\,1 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.10}$$

il est facile de vérifier que les valeurs propres de cette matrices sont $i\lambda$ avec la multiplicité 1 (l'espace propre correspondant est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} B \\ i\lambda \end{pmatrix}$) et $-i\lambda$ avec la multiplicité 3 (l'espace propre correspondant est formé des éléments de la forme $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$, où $X$ est un élément quelconque de $\mathbb{C}^3$ tel que $CX = 0$) ; ceci contredit l'hypothèse faite sur $y$ ; nous éliminons de même le cas où $A(A-i\lambda) = 0$.

En tant que variété symplectique complexe, $\mathcal{O}_3^c$ est le quotient symplectique (complexe) de $\mathcal{O}_4^c$ par l'action de $\mathbb{C}^*$, i.e. s'identifie au quotient $\mu_c^{-1}(0)/\mathbb{C}^*$ ; en effet, pour tout $z$ dans $\mathbb{C}^*$, on a

$$z \cdot y = \begin{pmatrix} A & zB \\ z^{-1}C & k \end{pmatrix}; \tag{5.11}$$

le quotient de $\mu_c^{-1}(0)$ par $\mathbb{C}^*$ est donc identifié à l'orbite $\mathcal{O}_3^c$ des éléments de valeurs propres $-i\lambda, 0, i\lambda$ ; en effet, $B$ est un générateur du noyau de $A$ tandis que $C$ est un générateur de l'orthogonal dans $(\mathbb{C}^3)^*$ de la somme directe des espaces propres de $A$ relativement à $i\lambda$ et $-i\lambda$ ; comme $CB = -\lambda^2$, la paire $(B, C)$ est bien définie par $A$, qui est laissée inchangée par l'action de $\mathbb{C}^*$, à l'action près de $\mathbb{C}^*$ ; le fait que la structure symplectique (holomorphe) induite coïncide avec la structure symplectique naturelle de $\mathcal{O}_3^c$ (à un facteur multiplicatif près que nous ne chercherons pas à préciser) est facile à vérifier.

Ce qui précède vaut encore dans le cas où le paramètre $\lambda$ est égal à zéro, i.e. dans le cas où l'orbite considérée de $Sl(4,\mathbb{C})$ est l'orbite nilpotente $\mathcal{N}_4$ formée des éléments $y$ tels que

1. $y^2 = 0$, et
2. $\dim(\operatorname{Im} y) = \dim(\operatorname{Ker} y) = 2$,

voir la remarque 4.1.

La matrice $y$ s'écrit alors sous la forme (5.3), où $A, B, C$ vérifient le système

$$\begin{aligned} A^2 &= -BC \\ CA &= 0 \\ AB &= 0 \\ CB &= 0, \end{aligned} \tag{5.12}$$

avec $A^2 \neq 0$, i.e. $B \neq 0$ et $C \neq 0$ ; le noyau de $A$ est de dimension 1, engendré par $B$ ; l'image de $A$ est de dimension 2 ; son orthogonal dans $(\mathbb{C}^3)^*$ est de dimension 1, engendré par $C$.

Nous notons $\mathcal{N}_3$ l'orbite (nilpotente) de $A$ sous l'action de $Sl(3,\mathbb{C})$ ; $\mathcal{N}_3$ est formée des matrices $A$ telles que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$ ; comme variété symplectique complexe, $\mathcal{N}_3$ est le quotient de $\mathcal{N}_4$ par l'action de $\mathbb{C}^*$.

L'orbite semi-simple $\mathcal{O}_4^c$ et l'orbite nilpotente $\mathcal{N}_4$ possèdent une métrique hyperkählérienne $g$, dont la forme de Kähler relativement à sa structure complexe naturelle est notée $\omega_1$ ; nous notons $\mu_r$ l' application-moment de l'action de $S^1$ relativement à $\omega_1$, que nous appelons *application-moment réelle*, par opposition à l'application-moment complexe $\mu_c$ déjà considérée, relative à la forme symplectique holomorphe $\Omega = \omega_2 + i\omega_3$.

LEMME 8. — *Le moment réel $\mu_r$ est donné (à une constante additive près) par*

$$\mu_r(y) = -d\rho_4(\xi_y^{i\sigma}), \tag{5.13}$$

*où $\rho_4$ est le potentiel de la métrique hyperkählérienne $g$ relativement à la structure complexe naturelle $I_1$ de $\mathcal{O}_4^c$ ou $\mathcal{N}_4$.*

*En tout point $y$ où $\mu_r(y) = 0$, on a*

$$\mathrm{Hess}\rho_4(\xi_y^{i\sigma}, \xi_y^{i\sigma}) > 0. \tag{5.14}$$

*Démonstration.* — Rappelons, tout d'abord, que $\xi^\sigma$ coïncide avec le champ de vecteurs induit par l'action infinitésimale de $S^1$ et que $\xi^{i\sigma}$ est encore égal à $I_1\xi^\sigma$. Le potentiel $\rho_4$ est définie de façon unique, à une constante additive près, par les deux conditions :

1. $\rho_4$ est $SU(4)$-invariant ;
2. $\omega_1 = \mathrm{dd}^c\rho_4$, où $\mathrm{d}^c$ est relatif à $I_1$ ;

comme l'action de $S^1$ préserve $\rho_4$, $g$ et $I_1$, on a : $\mathscr{L}_{\xi^\sigma}(\mathrm{d}^c\rho_4) = 0$, donc aussi, pour tout $a$ dans $\mathfrak{g}^c$,

$$\begin{aligned} d\mu_r(\xi^a) &= \omega_1(\xi^a, \xi^\sigma) \\ &= \xi^a \cdot \mathrm{d}^c\rho_4(\xi^\sigma) - \xi^\sigma \cdot \mathrm{d}^c\rho_4(\xi^a) - \mathrm{d}^c\rho_4([\xi^a, \xi^\sigma]) \\ &= \xi^a \cdot \mathrm{d}^c\rho_4(\xi^\sigma) - \mathscr{L}_{\xi^\sigma}\mathrm{d}^c\rho_4 \\ &= \xi^a \cdot \mathrm{d}^c\rho_4(\xi^\sigma) = -\xi^a \cdot \mathrm{d}\rho_4(\xi^\sigma); \end{aligned}$$

ceci démontre (5.13) ; en un point où $\mu_r(y) = 0$, le hessien $\mathrm{Hess}\rho_4(\xi_y^{i\sigma}, \xi_y^{i\sigma})$ est bien défini et est égal à $\xi^{i\sigma} \cdot \mathrm{d}\rho_4(\xi^{i\sigma}) = -\xi^{i\sigma} \cdot \mathrm{d}^c\rho_4(\xi^{i\sigma})$ ; comme $\xi^\sigma(\mathrm{d}^c\rho_4(\xi^{i\sigma}) = 0$, on a : $-\xi^{i\sigma} \cdot \mathrm{d}^c\rho_4(\xi^{i\sigma}) = \mathrm{dd}^c\rho_4(\xi^\sigma, \xi^{i\sigma}) = g(\xi^\sigma, \xi^\sigma) > 0$. □

L'élément $y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mu_c^{-1}(0)$ mais non à $\mu_r^{-1}(0)$ en général ; il résulte de la théorie générale du quotient hyperkälérien qu'il existe un unique réel positif

$t$ tel que $t \cdot y = \begin{pmatrix} A & tB \\ t^{-1}C & 0 \end{pmatrix}$ appartienne à $\mu_r^{-1}(0)$ ; par le lemme 8, ce nombre $t$ est déterminé par

$$\frac{d}{dt}\rho_4(t \cdot y) = 0, \tag{5.15}$$

et $\rho_4$ est un minimum local en $t \cdot y$. Toujours d'après la théorie générale du quotient hyperkählérien, le potentiel kählérien $\rho_3$ de la métrique hyperkählérienne induite sur $\mathcal{O}_3^c$ ou $\mathcal{N}_3$ relativement à sa structure complexe naturelle est alors donné par

$$\rho_3(A) = \rho_4(t \cdot y), \tag{5.16}$$

où : $A$ est une élément quelconque de $\mathcal{O}_3^c$ ou de $\mathcal{N}_3$; $x$ est un élément de $\mathcal{O}_4^c$ ou $\mathcal{N}_4$ « au-dessus » de $A$, i.e. de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, où $B$ et $C$ sont liés à $A$ par (5.8) ou (5.12); $t$ est le nombre réel positif déterminé par (5.15).

La valeur en $A$ du potentiel $\rho_3$, pour $A$ appartenant à $\mathcal{O}_3^c$ ou à $\mathcal{N}_3$, est donc déterminé de la façon suivante : nous fixons (arbitrairement) un générateur du noyau de $A$ (qui est de dimension complexe 1 dans les deux cas), que nous identifions à la matrice-colonne $B$ dans $\mathbb{C}^3$; ce choix étant fait, il existe un *unique* élément de $(\mathbb{C}^3)^*$, identifié à la matrice-ligne $C$, tel que $CB = \lambda^2$ et $(A - \lambda)(A + \lambda) = -BC$ ; nous obtenons ainsi un élément $y$ bien défini de $\mathcal{O}_4^c$ ou $\mathcal{N}_4$, suivant que $A$ est dans $\mathcal{O}_3^c$ ou dans $\mathcal{N}_3$, égal à $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ; $\rho_3(A)$ est alors égal à l'infimum de $\rho_4(y)$ pour tous les $y$ construits de cette manière, via le choix de $B$.

### 5.2. Le cas nilpotent : la formule de Kobak-Swann

Nous montrons que les considérations de la section précédente permettent de calculer le potentiel $\rho_3$ de la métrique hyperkählérienne de l'orbite nilpotente $\mathcal{N}_3$ ; l'expression trouvée coïncide avec le *potentiel de Kobak-Swann.*

Modulo l'action de $SU(3)$, tout élément $A$ de $\mathcal{N}_3$ s'écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

où $\alpha, \beta, \gamma$ sont trois nombres complexes tels que

$$\alpha \neq 0, \ \beta \neq 0;$$

de façon précise, toute $SU(3)$-orbite de $\mathcal{N}_3$ possède un unique représentant de la forme précédente, où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres *réels positifs*, mais nous ne supposerons pas dans la suite que $\alpha$ et $\beta$ sont réels.

Pour $A$ fixé, un générateur du noyau de $A$ s'écrit

$$B_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $t$ est un nombre complexe non-nul ; $C = C_t$ s'écrit alors

$$C_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha\beta}{t} \end{pmatrix}.$$

L'élément correspondant $y_t$ de $\mathcal{N}_4$ s'écrit donc

$$y_t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma & t \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha\beta}{t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Il résulte aisément de la remarque 4.1 que $\rho_4(y_t)$ est égal (à un facteur de normalisation près ) à la somme des valeurs absolues des valeurs propres de la matrice hermitienne de $\frac{y_t - y_t^*}{2i}$, soit encore la somme des deux valeurs propres positives de $-i(y_t - y_t^*)$ (les valeurs propres négatives sont les opposées des valeurs propres positives).

On a

$$-i(y_t - y_t^*) = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha & -i\gamma & -it \\ i\overline{\alpha} & 0 & -i\beta & 0 \\ i\overline{\gamma} & i\overline{\beta} & 0 & -i\frac{\overline{\alpha}\overline{\beta}}{\overline{t}} \\ i\overline{t} & 0 & i\frac{\alpha\beta}{t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Le polynôme caractéristique $p$ de la matrice hermitienne $-i(y_t - y_t^*)$ est donné par

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} x & i\alpha & i\gamma & it \\ -i\overline{\alpha} & x & i\beta & 0 \\ -i\overline{\gamma} & -i\overline{\beta} & x & i\frac{\overline{\alpha}\overline{\beta}}{\overline{t}} \\ -i\overline{t} & 0 & -i\frac{\alpha\beta}{t} & x \end{pmatrix}; \tag{5.20}$$

un calcul simple montre que

$$p(x) = x^4 - x^2\left(\frac{|\alpha|^2|\beta|^2}{|t|^2} + |t|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2\right) + \left(\frac{|\alpha|^2|\beta|}{|t|} + |\beta||t|\right)^2. \tag{5.21}$$

Comme annoncé, les valeurs propres de $-i(y_t - y_t^*)$ viennent par paires opposées $\mu_1, \mu_2, -\mu_1, \mu_2$, où $\mu_1, \mu_2$ sont positives; on a donc

$$\begin{aligned} (\rho_4(y_t))^2 &= (\mu_1 + \mu_2)^2 \\ &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2 \\ &= S + 2\sqrt{P}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

où $S$ et $P$ sont respectivement le coefficient de $-x^2$ et le terme constant dans l'équation (5.21) ; finalement

$$(\rho_4(y_t))^2 = \frac{|\alpha|^2|\beta|^2}{|t|^2} + |t|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 2\frac{|\alpha|^2|\beta|}{|t|} + 2|\beta||t|. \tag{5.23}$$

Le potentiel $\rho_4(y_t)$ ne dépend que de la norme $r = |t|$ du paramètre $t$ ; nous pouvons donc supposer que $t$ est un réel positif ; $(\rho_4(y_t))^2$ est alors une fraction rationnelle en $t$, dont la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_4(y_t))^2 &= -2\frac{|\alpha|^2|\beta|^2}{t^3} + 2r - 2\frac{|\alpha|^2|\beta|}{t^2} + 2|\beta| \\ &= \frac{2}{t^3}(t^4 + |\beta|t^3 - |\alpha|^2|\beta|t - |\alpha|^2|\beta|) \\ &= \frac{2}{t^3}(t + |\beta|)(t^3 - |\alpha|^2|\beta|); \end{aligned} \tag{5.24}$$

L'unique racine positive de l'équation $\frac{d}{dt}_{|t=0}(\rho_4(y_t))^2 = 0$ est donnée par

$$t = (|\alpha|^2|\beta|)^{\frac{1}{3}}; \tag{5.25}$$

en reportant cette valeurs dans (5.23), on trouve

$$\begin{aligned} (\rho_3(A))^2 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 3|\alpha|^{\frac{4}{3}}|\beta|^{\frac{2}{3}} + 3|\alpha|^{\frac{2}{3}}|\beta|^{\frac{4}{3}} \\ &= (|\alpha|^{\frac{2}{3}} + |\beta|^{\frac{2}{3}})^3 + |\gamma|^2; \end{aligned} \tag{5.26}$$

nous retrouvons ainsi la *formule de Kobak-Swann* [21].

*Remarque 8.* — L'orbite nilpotente $\mathcal{N}_3$ admet également une action de $S^1$ dont le champ de vecteurs associé $Z$ est égal au dual symplectique de $d\rho_3$ relativement à la forme symplectique $\omega_2 = \Re e\,\Omega$ (voir la proposition 8) ; un calcul simple montre que lorsque $A$ est de la forme (5.17), la valeur de $Z$ en $A$ s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} Z_A = \frac{1}{2\rho_3(A)} \times \\ \begin{pmatrix} |\alpha|^{\frac{2}{3}}(|\alpha|^{\frac{2}{3}} + |\beta|^{\frac{2}{3}})^2 + |\gamma|^2 & \beta\gamma & 0 \\ \beta\overline{\gamma} & (|\beta|^{\frac{2}{3}} - |\alpha|^{\frac{2}{3}})(|\alpha|^{\frac{2}{3}} + |\beta|^{\frac{2}{3}})^2 & -\alpha\gamma \\ 0 & -\alpha\overline{\gamma} & -|\beta|^{\frac{2}{3}}(|\alpha|^{\frac{2}{3}} + |\beta|^{\frac{2}{3}})^2 - |\gamma|^2 \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{5.27}$$

ceci peut s'écrire encore

$$\begin{aligned} Z_A = -\frac{i}{\rho_3(A)}[\Re e\,A, \Im m\,A] \\ + \frac{|\alpha|^{\frac{2}{3}}|\beta|^{\frac{2}{3}}}{2\rho_3(A)} \begin{pmatrix} |\beta|^{\frac{2}{3}} + 2|\alpha|^{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^{\frac{2}{3}} - |\alpha|^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -|\alpha|^{\frac{2}{3}} - 2|\beta|^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

### 5.3. Le cas semi-simple

Le cas semi-simple, i.e. le calcul effectif du potentiel de l'orbite semi-simple *régulière* $\mathcal{O}_3^c$ à partir du potentiel de l'orbite semi-simple de type symétrique $\mathcal{O}_4^c$, donné par le théorème 2 et le paragraphe 4, est beaucoup plus difficile et n'a pas été résolu à ce jour (par cette méthode, ni par aucune autre).

Le point de départ du calcul est similaire au cas nilpotent traité dans la section précédente.

On a cette fois :

$$A = i\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

où $\lambda$ est un nombre réel positif ; le noyau de $A$ est engendré par

$$B_t = i\begin{pmatrix} \alpha t \\ -\lambda t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

où $t$ est un paramètre complexe non-nul ; le covecteur correspondant $C$ est alors donné par

$$C_t = i\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda}{t} & -\frac{\beta}{t} \end{pmatrix}; \tag{5.31}$$

La matrice $y_t$ correspondant au paramètre complexe $t$ s'écrit donc :

$$y_t = i\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma & \alpha t \\ 0 & 0 & \beta & -\lambda t \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{t} & -\frac{\beta}{t} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

Comme dans le cas précédent, la valeur $\rho_4(y_t)$ potentiel de la métrique hyperkählérienne de $\mathcal{O}_4^c$ en $y_t$ est égale à la somme des deux valeurs propres positives $\mu_1$, $\mu_2$ de la matrices hermitiennes $-i(y_t - y_t^*)$ (les deux autres valeurs propres sont les opposées des valeurs propres positives) ; on a

$$-i(y_t - y_t^*) = \begin{pmatrix} 2\lambda & \alpha & \gamma & \alpha t \\ \overline{\alpha} & 0 & \beta & -\lambda(t + \frac{1}{\overline{t}}) \\ \overline{\gamma} & \overline{\beta} & -2\lambda & -\frac{\overline{\beta}}{\overline{t}} \\ \overline{\alpha}\overline{t} & -\lambda(\frac{1}{t} + \overline{t}) & -\frac{\beta}{t} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

On a donc

$$(\rho(y_t))^2 = S + 2\sqrt{P}, \tag{5.34}$$

où $S$ est égal à la demi-trace du carré $-(y_t - y_t^*)^2$ de $-i(y_t - y_t^*)$ et $P$ est égal au déterminant de $-i(y_t - y_t^*)$.

Un calcul facile montre que :

$$\begin{aligned} S &= \lambda^2 \left(4 + (|t| + \frac{1}{|t|})^2\right) \\ &\quad + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\alpha|^2|t|^2 + |\beta|^2 \frac{1}{|t|^2}, \end{aligned} \tag{5.35}$$

et

$$\begin{aligned} P &= 4\lambda^4 \left(|t| + \frac{1}{|t|}\right)^2 \\ &\quad + \lambda^2 \left(4|\alpha|^2(1 + |t|^2) + 4|\beta|^2(1 + \frac{1}{|t|^2}) + |\gamma|^2(|t| + \frac{1}{|t|})^2\right) \\ &\quad + 2\lambda\, \Re e(\alpha\beta\overline{\gamma}) \left(|t|^2 - \frac{1}{|t|^2}\right) \\ &\quad + |\alpha|^2|\beta|^2 \left(|t| + \frac{1}{|t|}\right)^2 \\ &= |t|^2 \left(4\lambda^2 (|\alpha|^2 + \lambda^2) + |\alpha\beta + \lambda\gamma|^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{|t|^2} \left(4\lambda^2 (|\beta|^2 + \lambda^2) + |\alpha\beta - \lambda\gamma|^2\right) \\ &\quad + 8\lambda^4 + 4\lambda^2 (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 2\lambda^2 |\gamma|^2 + 2|\alpha|^2|\beta|^2; \end{aligned} \tag{5.36}$$

on a donc (en posant $s = |t|^2$)

$$\begin{aligned} (\rho_3(A))^2 = \mathrm{Inf}_{s>0} \Big( &|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 6\lambda^2 \\ &+ s(|\alpha|^2 + \lambda^2) + \frac{1}{s}(|\beta|^2 + \lambda^2) \\ &+ 2\,[s\,(4\lambda^2 (|\alpha|^2 + \lambda^2) + |\alpha\beta + \lambda\gamma|^2) \\ &+ \frac{1}{s} (4\lambda^2 (|\beta|^2 + \lambda^2) + |\alpha\beta - \lambda\gamma|^2) \\ &+ 8\lambda^4 + 4\lambda^2 |\alpha|^2 + 4\lambda^2 |\beta|^2 + 2\lambda^2 |\gamma|^2 + 2|\alpha|^2|\beta|^2]^{\frac{1}{2}}\Big). \end{aligned} \tag{5.37}$$

### 5.4. Formulation alternative

Puisque les valeurs propres d'un élément $A$ de $\mathcal{O}_3^c$ sont fixées, égales à $i\lambda, 0, -i\lambda$, $A$ est complètement déterminé par ses espaces propres, i.e. par un triplet $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ de droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^3$.

Pour chaque droite complexe $\ell_i$, $i = 1, 2, 3$, nous choisissons un générateur $u_i$ de norme 1. Nous définissons une *structure réelle* $\tau$ ($SU(3)$-invariante) sur l'orbite complexe $\mathcal{O}_3^c$ en posant $\tau(A) = A'$, où $A'$ est déterminé par le *triplet conjugué* $\{\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3\}$ : $\ell'_1$ est la droite complexe orthogonale (pour la structure hermitienne canonique de $\mathbb{C}^3$)

au 2-plan complexe engendré par $\ell_2$ et $\ell_3$ ; définition similaire pour $\ell'_2$ et $\ell'_3$. Nous choisissons un générateur de norme 1, $u_i$, pour chaque droite complexe $\ell'_i$, de façon que le produit scalaire hermitien $\langle u_i, u'_i\rangle$ soit un réel positif ou nul pour chaque $i = 1,2,3$ ; nous définissons ainsi trois angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, chacun appartenant à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2})$, déterminés par $\langle u_1, u'_1\rangle = \cos\theta_1$, $\langle u_2, u'_2\rangle = \cos\theta_2$, $\langle u_3, u'_3\rangle = \cos\theta_3$ ; en particulier, $A$ appartient à l'orbite compacte $\mathcal{O}$ si et seulement si $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ; nous introduisons également la matrice hermitienne $P$ d'ordre 3 définie par $P_{ij} = \langle u_j, u_i\rangle$ pour toute paire $i, j = 1,2,3$ (en particulier, les termes diagonaux de $P$ sont égaux à 1) et nous notons $\Delta = \det P$ le déterminant de $P$ ; nous définissons de même $P'$ et $\Delta' = \det P'$ à partir du triplet conjugué $\{\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3\}$. On vérifie aisément que l'on a les relations suivantes :

$$P'_{ij} = \cos\theta_i\, P^{-1}_{ij}\, \cos\theta_j, \tag{5.38}$$

pour toute paire $i, j$ (où $P^{-1}$ désigne la matrice inverse de $P$),

$$\frac{1}{\cos^2\theta_i} = \frac{1 - |P_{jk}|^2}{\Delta} = \frac{1 - |P'_{jk}|^2}{\Delta'}, \tag{5.39}$$

pour toute permutation $i, j, k$ de $1,2,3$, et

$$\Delta\,\Delta' = \cos^2\theta_1\, \cos^2\theta_2\, \cos^2\theta_3. \tag{5.40}$$

(On notera que les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ définis à partir du triplet $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ sont les mêmes que les angles définis à partir du triplet conjugué $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$).

Considérons comme au paragraphe précédent la famille $y_t$ des éléments de $\mathcal{O}_4^c$ associés à $A$, de valeurs propres $i\lambda$ et $-i\lambda$, chacune de multiplicité 2 ; soit $P_t$, $Q_t$ les sous-espaces propres correspondants de $y_t$ ; on vérifie aisément que $P_t$ et $Q_t$ sont les 2-plans vectoriels complexes de $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}\, u_0$ définis comme suit (à redéfinition près du paramètre $t$) :

$$\begin{aligned} P_t &= \mathbb{C}\, u_1 \oplus \mathbb{C}\,(u_2 + t\, u_0) \\ Q_t &= \mathbb{C}\, u_3 \oplus \mathbb{C}\,(u_2 - t\, u_0); \end{aligned} \tag{5.41}$$

nous obtenons ainsi l'assertion suivante

Proposition 10. — *Pour tout élément $A$ de l'orbite complexe $\mathcal{O}_3^c$, dont les espaces propres relatifs à $i\lambda, 0, -i\lambda$ sont les droites complexes $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ engendrées respectivement par les vecteurs unitaires $u_1, u_2, u_3$, $\rho_3(A)$ est égal à l'infimum des $\rho_4(y_t)$, où, pour chaque $t$ dans $\mathbb{C}^*$, $y_t$ est l'élément de $\mathcal{O}_4^c$ dont les espaces propres relatifs à $i\lambda$ et $-i\lambda$ sont les 2-plans $P_t$ et $Q_t$ de $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}\, u_0$ engendrés respectivement par les paires $\{u_1, u_2 + t\, u_0\}$ et $\{u_3, u_2 - t\, u_0\}$.*

Un calcul similaire au calcul de la section précédente montre que l'on a :

$$\begin{aligned} (\rho_3(A))^2 = \inf_{s>0} \Big(&\frac{3}{4} + \frac{1}{2\cos^2\theta_1} + \frac{1}{2\cos^2\theta_3} - \frac{1}{4\cos^2\theta_2} + \frac{1}{4s} + \frac{s}{4\cos^2\theta_2} \\ &+ \Big(\frac{s}{\Delta} + \frac{\Delta}{\cos^2\theta_1\cos^2\theta_3}\frac{1}{s} + \frac{1}{\cos^2\theta_1} + \frac{1}{\cos^2\theta_3}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Cette expression montre en particulier que $\rho_3(A)$ ne dépend que des quatre variables géométriques (réelles) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et $\Delta$ ; ces quatre grandeurs sont clairement $SU(3)$-invariantes; les trois premières sont également invariantes par l'action de la conjugaison $\tau$, mais non la quatrième ; on peut toutefois raisonnablement penser que $\rho(A)$ est invariant par $\tau$, plus précisément que $\tau(A)$ coïncide avec $-1 \cdot A$, via l'action naturelle de $S^1$ dont $\rho_3$ est le moment relativement à $\omega_2$.

Le calcul effectif de $s$, donc celui de $\rho_3(A)$ par cette méthode, semble toutefois hors de portée.

## Bibliographie


[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc, R. Soc. Lond. A **362** (1978), 425–461.

[2] A. Beauville, *Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1990), 211–235.

[3] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Erg. der Math. **10**, Springer-Verlag (1987).

[4] O. Biquard, *Sur les équations de Nahm et la structure de Poisson des algèbres de Lie semi-simples complexes*, Math. Ann. **304** (1996), 253–276.

[5] O. Biquard, *Twisteurs des orbites coadjointes et métriques hyper-pseudokählériennes*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), 79–105.

[6] O. Biquard and P. Gauduchon, *Hyperkähler metrics on cotangent bundles of hermitian symmetric spaces*, in *Geometry and Physics*, J. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen and A. Swann, editors, *Lect. Notes Pure Appl. Math. Ser.* **184**, Marcel Dekker (1996), 287–298.

[7] O. Biquard et P. Gauduchon, *La métrique hyperkählérienne des orbites coadjointes de type symétrique d'un groupe de Lie complexe semi-simple*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **323**, série I (1996), 1259–1264.

[8] D. Burns, *Some examples of the twistor construction*, dans *Contributions to several complex variables, in honor of Wilhelm Stoll* (eds. A. Howard and P. M. Wong), Vieweg (1986), 51–67.

[9] E. Calabi, *Métriques kählériennes et fibrés holomorphes*, Ann. Ec. Norm. Sup. **12** (1979), 269–294.

[10] A. Dancer and R. Szöke, *Symmetric spaces, adapted complex structures and hyperkähler structures*, Q. J. Math., Oxford II, Series 48, **189** (1997), 27–38.

[11] S. K. Donaldson, *Nahm's equations and the classification of monopoles*, Comm. Math. Phys. **96** (1984), 387–407.

[12] T. Eguchi and A. J. Hanson, *Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity*, Phys. Lett. **74B** (1978), 249–251.

[13] G. W. Gibbons and S. Hawking, *Gravitational multi-instantons*, phys. Lett. **78B** (1978), 430–432.

[14] R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Publications mathématiques de l'Université Paris 7, **11–12** (1982).

[15] V. Guillemin and S. Sternberg, *Convexity Properties of the Moment Mapping*, Inv. Math. **67** (1982), 491–513.

[16] N. J. Hitchin, *Monopoles, minimal surfaces and Algebraic curves*, Presses Universitaires de Montréal, **105** (1987).

[17] N. J. Hitchin, *Hyperkähler manifolds*, Séminaire Bourbaki, exposé **748** (1991).

[18] N. J. Hitchin, *Integrable systems in Riemannian geometry*

[19] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.

[20] D. Kaledin, *Hyperkähler structures on total spaces of holomorphic cotangent bundles*, Preprint (1997), alg-geom/9710026.

[21] P. Kobak and A. Swann, *Quaternionic geometry of a nilpotent variety*, Math. Ann. **297** (1993), 747–764.

[22] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.

[23] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, II*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math. **15**, II, Interscience Publishers, Wiley (1969)

[24] S. Kobayashi and H. Wu, *On holomorphic sections of certain Hermitian vector bundles*, Math. Ann. **189** (1970), 1–4.

[25] A. G. Kovalev, *Nahm's equations and complex adjoint orbits*, Quat. J. Math. Oxford **47** (1996), 41–58.

[26] P. B. Kronheimer, *Instantons and the geometry of the nilpotent variety*, J. Diff. Geom. **32** (1990), 473–490.

[27] P. B. Kronheimer, *A hyperkähler structure on coadjoint orbits of a semi-simple Lie group*, J. London Math. Soc. **42** (1990), 193–208.

[28] S. Santa Cruz, *Construction of hyperkähler metrics for complex adjoint orbits*, Ph. D. thesis, Univ. of Warwick, Sept.1995.

[29] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Nancago, VI, Hermann (1958).

[30] S. T. Yau, *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **74** (1977), 1798–1799.

Olivier BIQUARD et Paul GAUDUCHON
CMAT
UMR 7640 du CNRS
École Polytechnique
91128 PALAISEAU cedex (France)

e-mail: Olivier.Biquard@math.polytechnique.fr
Paul.Gauduchon@math.polytechnique.fr