Gilles Carron

Un théorème de l'indice relatif

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 193-202
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__193_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (193–202)

UN THÉORÈME DE L'INDICE RELATIF

Gilles CARRON

Le but est de donner un critère, assez général, pour que l'espace des solutions L^2 à une équation ($D\sigma = 0$), où D est un opérateur de type Dirac, soit de dimension finie.

1. Variétés riemanniennes non-paraboliques

Je vais commencer par expliquer d'où vient cette condition ; pour cela je vais citer un résultat d'Ancona : soit (M^n, g) une variété riemannienne connexe complète non-compacte, ce résultat relie l'existence de fonctions de Green positives (i.e. de solutions positives à l'équation $\Delta G_x = \delta_x$) à une propriété de l'espace de sobolev $H_0^1(M)$.

Qu'est ce que l'espace $H_0^1(M)$. — C'est le complété de l'espace pré-hilbertien $C_0^\infty(M)$ munit de la norme $u \mapsto \|du\|_{L^2}$. Remarquons que ceci est bien une norme puisque M est non-compacte. Cependant cet espace ne s'identifie généralement pas continument à un espace de fonctions ; par exemple sur $\mathbf{R}$ euclidien, si u est une fonction lisse à support compact, valant 1 dans un voisinage de 0 alors la suite de fonctions $u_k(x) = u(x/k)$ tend vers zéro dans l'espace de Sobolev $H_0^1(M)$, mais tend vers 1 dans L^2_{loc}.

On se pose alors la question naturelle : « Quand est-ce que l'injection naturelle de $C_0^\infty(M)$ dans L^2_{loc} se prolonge par continuité à $H_0^1(M)$? », ou encore quand est-ce que la topologie de H_0^1 est plus fine que celle de L^2_{loc} sur l'espace vectoriel $C_0^\infty(M)$? ou encore ceci équivaut à ce que pour tout ouvert borné U de M, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$C(U)\,\|f\|_{L^2(U)} \leq \|df\|_{L^2(M)},\ \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Classification math. : 58G03, 47A53, 46E35.

A. Ancona donne le critére suivant ([A]) :

THÉORÈME. — *Ces propriétés équivalent à l'existence de fonctions de Green positives sur* (M^n, g). *Dans ce cas, on dit que* (M^n, g) *est non-parabolique.*

Ce terme remonte à Ahlfors à propos de la classification des surfaces simplement connexe non-compactes, en effet la plan euclidien est parabolique et le disque hyperbolique ne l'est pas.

On va voir comment adapter cette propriété aux opérateurs de type Dirac.

2. Les opérateurs de type Dirac

Soient (M, g) une variété riemannienne complète et $E \longrightarrow M$ un fibré hermitien et $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac c'est à dire un opérateur différentiel du premier ordre symétrique dont le symbole principal de D^2 est l'opposé de la métrique :

$$\sigma(D^2)(x, \xi) = -g_x(\xi, \xi)\,\mathrm{Id}_{E_x},\ \forall (x, \xi) \in T^*M.$$

Rappelons que le symbole de D^2 est défini par

$$\sigma(D^2)(x, \xi)(u) = \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-itf} D^2 e^{itf}\, \bar{u}}{t^2}$$

où f est une fonction lisse dont la différentielle en x est ξ et $\bar{u}$ est une section lisse de E valant u en x.

Exemples.

i) Si $d : C_0^\infty(\Lambda T^*M) \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda T^*M)$ est l'opérateur de différentiation extérieure et si δ est l'adjoint formel de d alors l'opérateur de Gauss-Bonnet, $d + \delta : C_0^\infty(\Lambda T^*M) \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda T^*M)$, est un opérateur de type Dirac.

ii) L'opérateur de Dirac d'une variété spin est de type Dirac.

iii) Si D est un opérateur de type Dirac et si V est une section lisse du fibré des endomorphismes symétriques de E i.e $V : x \in M \mapsto V(x) \in \mathrm{End}(E_x)$, alors $D + V$ est encore un opérateur de type Dirac.

Par définition, un opérateur de type Dirac est elliptique, en conséquence, nous avons le résultat classique suivant

THÉORÈME. — *Si* (M, g) *est compact sans bord alors*

$$\dim\{\sigma \in L^2(E),\ D\sigma = 0\} < \infty$$

et mieux $D : \mathcal{D}(D) \longrightarrow L^2(E)$ *est Fredholm, où* $\mathcal{D}(D)$ *est le domaine de D i.e. c'est l'espace de Sobolev des sections de E qui sont elle et leur image par D dans* L^2, *cet espace est normé par* $\sigma \mapsto \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2}$.

Cependant lorsque M n'est plus compact, ceci n'est plus vrai par exemple, si on considère le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ munit de la métrique hyperbolique $\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$ alors

$$\dim\{\alpha \in L^2(T^*\mathbb{D} / (d+\delta)\alpha = 0\} = \infty,$$

car cet espace contient tout les $P(z)dz$ où $P \in \mathbb{C}[z]$.

3. Ce qu'on peut dire dans le cas non-compact

De nombreux travaux ont été fait sur les variétés non-compactes, par exemple, M. Gromov et H. B. Lawson ont montré que le théorème précédent était encore vrai dans le cas suivant :

THÉORÈME ([G-L]). — *Si (M, g) est une variété spin riemannienne complète telle qu'il existe un compact hors duquel la courbure scalaire de (M, g) est uniformément strictement positive alors l'opérateur de Dirac de (M, g), $D : \mathcal{D}(D) \longrightarrow L^2(S)$, est Fredholm.*

En fait, de façon plus conceptuel, N. Anghel donne un critère très général pour que la conclusion du théorème de Gromov-Lawson reste vrai :

THÉORÈME ([An]). — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac alors $D : \mathcal{D}(D) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm si, et seulement si, il existe un compact K de M et une constante strictement positive Λ tel que*

$$\Lambda\|\sigma\|_{L^2} \leq \|D\sigma\|_{L^2},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K, E).$$

Ceci équivaut en fait à ce que zéro ne soit pas dans le spectre essentiel de l'opérateur D, ce qui est assez restrictif. Inspiré par le résultat d'Ancona et celui d'Anghel, j'ai introduit la notion suivante ([C4]) :

4. Opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini

DÉFINITION. — *Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M^n, g), on dira que D est* **non-parabolique à l'infini** *s'il existe un compact K de M tel que pour tout ouvert U relativement compact dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que*

$$C(U)\,\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K, E).$$

En quelque sorte, les opérateurs non-paraboliques à l'infini sont ceux qui sont faiblement inversibles à l'infini. Et suivant le résultat de N. Anghel, Les opérateurs de type

Dirac qui sont Fredholm sur leurs domaines sont évidement non-paraboliques à l'infini. En fait, on a une définition analogue en terme d'espace de Sobolev

DÉFINITION. — *Un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ sur une variété riemannienne complète (M, g) est non-parabolique à l'infini si, et seulement si, il existe un compact K de M tel que si l'on complète $C_0^\infty(E)$ avec la norme*

$$N_K(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|D\sigma\|^2_{L^2(M)}},$$

afin d'obtenir $W(E)$ alors l'injection $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{loc}(E)$ se prolonge par continuité à $W(E)$.

Ceci montre que l'opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini et la métrique g détermine l'espace de Sobolev W. Les opérateurs non-paraboliques à l'infini ont la propriété suivante

THÉORÈME. — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini alors*

$$D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm. En particulier, la dimension du noyau L^2 d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini est finie.

En fait, ceci est une propriété caractéristique des opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini.

5. Des Exemples

a. Les opérateurs de type Dirac sur les variétés à bout cylindrique. — Soit (M, g) une variété riemannienne à bout cylindrique, c'est à dire qu'il existe un compact K de M tel que $(M - K, g)$ soit isométrique au produit riemannien $\mathbb{R}_+ \times \partial K$. On considère un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ agissant sur les sections d'un fibré hermitien qui respecte cette géométrie. C'est à dire que la métrique de $E|_{M-K}$ ne dépend pas de la distance à ∂K et on suppose que sur $\mathbb{R}_+ \times \partial K$, D prend la forme suivante

$$D \simeq \left(\frac{\partial}{\partial r} + A\right),$$

où A est un opérateur elliptique auto-adjoint sur $E|_{\partial K}$. Ces opérateurs avaient été étudiés par M. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer afin d'obtenir une formule pour la signature d'une variété compacte à bord ([A-P-S])

PROPOSITION. — *Un tel opérateur est non-parabolique à l'infini.*

La preuve est élémentaire, nous la donnons pour illustrer la simplicité de la notion de non-parabolicité à l'infini. Pour $\sigma \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial K, E)$, on a

$$\|D\sigma\|_{L^2}^2 = \left\|\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right\|_{L^2}^2 + \|A\sigma\|_{L^2}^2,$$

on conclut alors grâce à l'inégalité suivante dont la preuve est laissée au lecteur :

$$\|\sigma\|_{L^2([0,T]\times\partial K)}^2 \leq \frac{T^2}{2}\left\|\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right\|_{L^2}^2.$$

b. Exemples reposant sur la formule de Bochner-Weitzenbock-Lichnerovicz. Lorsque E est muni d'une connexion ∇ compatible avec D alors on a une formule de Bochner-Weitzenbock-Lichnerovicz:

$$D^2 = \bar{\Delta} + \mathcal{R}$$

où $\bar{\Delta}$ est l'opérateur défini à partir de la forme quadratique $\sigma \mapsto \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2$,

$$\text{i. e. } \forall \sigma \in C_0^\infty(E),\ \int_M \langle \bar{\Delta}\sigma, \sigma\rangle = \int_M |\nabla\sigma|^2 ;$$

autrement dit $\bar{\Delta} = \nabla^*\nabla$; et $\mathcal{R}(x)$ est un endomorphisme symétrique de E_x défini à partir de l'opérateur de courbure de M et de E.

i) Si $\mathcal{R}$ est un opérateur positif ou nul hors d'un compact de M, alors D est non-parabolique à l'infini ; ceci généralise donc le théorème de M. Gromov et H.B. Lawson. Par exemple, ceci montre que sur une variété riemannienne complète à courbure nulle sur un voisinage de l'infini, l'espace des formes harmoniques de carrés intégrables est de dimension fini.

On peut aussi relaxer un peu l'hypothèse sur la positivité de la courbure $\mathcal{R}$ au voisinage de l'infini, en supposant que l'opérateur $\bar{\Delta}$ est un peu mieux que positif ou nul, ce qui se voit sur la forme quadratique $\sigma \mapsto \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2$; en fait, grâce à l'inégalité de Kato, on a

$$|D\sigma|(x) \geq |d|\sigma|(x)|,$$

ceci permet de faire uniquement une hypothèse sur la forme quadratique $u \mapsto \|du\|_{L^2}^2$, par exemple une inégalité de Sobolev permet de minorer cette forme quadratique :

ii) Si pour un $p > 2$, (M, g) est une variété riemannienne satisfaisant à l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé sur M dont le terme $\mathcal{R}$ en potentiel courbure apparaissant dans la formule de Bochner-Weitzenbock vérifie

$$\int_M |\mathcal{R}|^{\frac{p}{2}}(x)dx < \infty,$$

alors

$$D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm. Ceci redémontre un résultat de [C1]. Remarquons que suivant [C2], si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une sous-variété d'un espace euclidien dont le vecteur courbure moyenne est dans L^n vérifie cette inégalité de Sobolev pour $p = n$, ceci améliorait le résultat de [H-S]. Ce résultat est très facile à montrer, on procède de la façon suivante On choisit d'abord K un compact de M tel que

$$\|\mathcal{R}\|_{L^{\frac{p}{2}}(M-K)} \leq \mu_p/2,$$

alors si $\sigma \in C_0^\infty(M-K, E)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_M |D\sigma|^2 &= \int_M |\nabla\sigma|^2 + \langle\mathcal{R}\sigma, \sigma\rangle \\
&\geq \int_{M-K} |\nabla\sigma|^2 - \|\sigma\|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \|\mathcal{R}\|_{L^{\frac{p}{2}}(M-K)} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{M-K} |\nabla\sigma|^2 \geq \frac{\mu_p}{2}\|\sigma\|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière minoration l'inégalité de Sobolev et l'hypothèse sur l'intégrale de $\mathcal{R}$. □

Puis, nous avons dans [C3], montrer une inégalité de Sobolev ne dépendant que du noyau de la chaleur ceci nous permet d'obtenir le résultat suivant :

iii) Il existe une constante universelle C telle que si (M, g) est une variété riemannienne complète, dont $(P(t, x, y))_{(t\in\mathbf{R}_+, x,y\in M)}$ est le noyau de l'opérateur de la chaleur i.e. la solution minimale positive de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t, x, y) + \Delta_y^g P(t, x, y) = 0, \quad (x, y) \in M,\ t > 0 \\ P(0, x, y) = \delta_x(y). \end{cases}$$

Si on a

$$\int_M |\mathcal{R}|(x) \left(\int_{\frac{C}{|\mathcal{R}|(x)}}^\infty \sqrt{\frac{P(s, x, x)}{s}} ds\right)^2 dx < \infty,$$

alors

$$D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm.

6. Indice et opérateur Fredholm

Lorsque $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est Fredholm entre deux espaces de Hilbert, on peut lui associer son indice

$$\mathrm{ind}\, T = \dim\ker T - \dim \mathrm{Im}\, T)^{\perp} = \dim\ker T - \dim\ker T^{*}.$$

Et on a la propriété fondamentale suivante si

$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow \mathcal{L}(H_1, H_2)\\ s &\longmapsto T_s\end{aligned}$$

est une famille continue d'opérateurs Fredholm, alors

$$\mathrm{ind}\, T_s = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

En fait on a même mieux puisque deux opérateurs de Fredholm peuvent être joint par une courbe continue d'opérateurs de Fredholm si, et seulement si, ils ont même indice.

7. Indice des opérateurs de type Dirac sur une variété compacte sans bord

Désormais, nous considèrons uniquement des variétés orientés et on suppose que le fibré E admet la décomposition orthogonale $E = E^{+} \oplus E^{-}$ et que D se décompose en

$$\begin{pmatrix} 0 & D^{-} \\ D^{+} & 0 \end{pmatrix} : C^{\infty}(M, E^{+} \oplus E^{-}) \longrightarrow C^{\infty}(M, E^{+} \oplus E^{-}).$$

On a $(D^{+})^{*} = D^{-}$ puisque qu'on suppose D symétrique. Lorsque M est compact sans bord, D est Fredholm de son domaine sur L^2, cependant son indice est nul, car D est auto-adjoint $D = D^{*}$. C'est l'indice de D^{+} qui est intéressant :

$$\mathrm{ind}\, D^{+} = \dim\{\sigma \in L^2(E^{+}),\ D^{+}\sigma = 0\} - \dim\{\sigma \in L^2(E^{-}),\ D^{-}\sigma = 0\}.$$

Exemple. — $D = d + \delta$ agissant sur les formes différentielles envoie les formes de degré pair sur celles de degré impair

$$d + \delta : C^{\infty}(\Lambda^{2\bullet} T^{*}M) \longrightarrow C^{\infty}(\Lambda^{2\bullet+1} T^{*}M)$$

et son indice est égale à la caractéristique d'Euler de M

$$\sum_k (-1)^k \dim\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^{*}M),\ d\alpha = \delta\alpha = 0\} = \chi(M).$$

Le fait que D^{+} soit Fredholm montre que si on le déforme dans la classe des opérateurs elliptiques, son indice ne change pas. On peut donc se demander si, comme dans le cas de l'opérateur de Gauss-Bonnet, il n'y a pas une formule topologique pour cet indice. Cette question fut posé par Gelfand et la réponse est donnée par le théorème d'Atiyah-Singer.

THÉORÈME.

$$\operatorname{ind} D^+ = \int_M \alpha_{D^+}$$

où la forme caractéristique de D^+, α_{D^+}, est une forme différentielle s'exprimant localement à l'aide des courbures de E et de M.

Par exemple, pour l'opérateur de Gauss-Bonnet

$$\alpha_{d+\delta} = \Omega^g = \operatorname{Pfaff}(\frac{\mathcal{R}}{2i\pi}),$$

où $\mathcal{R}$ est l'opérateur de courbure. Une morale du théorème d'Atiyah-Singer est que l'indice s'exprimant localement on peut faire du découpage pour le calculer. C'est à dire que si deux opérateurs de type Dirac D_1 et D_2 définis sur des variétés compactes sans bord M_1 et M_2 sont telles qu'il existe des compacts (à bord lisse) $K_i \subset M_i$ hors duquels les opérateurs sont isométriques alors

$$\operatorname{ind} D_1^+ - \operatorname{ind} D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+} = \int_{K_1 \# - K_2} \alpha_{D^+}.$$

8. Indice des opérateurs de type Dirac non-parabolique à l'infini

On a vu que si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est non-parabolique à l'infini alors $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm. De plus, on a $\ker_{L^2} D \subset \ker_W D$, car une solution L^2 à l'équation $(D\sigma = 0)$ est dans le domaine de D, et par la définition de W il est clair qu'alors cette solution est dans W. On a donc $\operatorname{ind} D = \dim\,(\ker_W D / \ker_{L^2} D) = h_\infty(D)$. On peut définir de même

$$h_\infty(D^{\pm}) = \dim\left(\frac{\ker_W D^{\pm}}{\ker_{L^2} D^{\pm}}\right).$$

Interprétation de h_∞. — Deux solutions de l'équation $(D\sigma = 0, \sigma \in W)$ qui diffèrent d'une solution L^2 ont, en un sens L^2, même valeur à l'infini. En quelque sorte $h_\infty(D)$ est la dimension des valeurs à l'infini des solutions de cette équation puisque les solutions L^2 sont celles qui s'annulent à l'infini (en un sens L^2). En fait, dans le cas d'un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne à bout cylindrique, cette interprétation heuristique est prouvée par Atiyah-Patodi-Singer. Et dans ce cas particulier, les solutions de l'équation $D\sigma = 0$ qui sont dans l'espace $W(E)$ sont exactement celle que M. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer appellent solutions étendues. C'est pourquoi lorsque $D : C^\infty(E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(E^+ \oplus E^-)$ sera un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini, on nommera indice étendu l'indice de $D^+ : W(E^+) \longrightarrow L^2(E^-)$, i.e.

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \dim\{\sigma \in W(E^+),\ D^+\sigma = 0\} - \dim\{\sigma \in L^2(E^-),\ D^-\sigma = 0\}.$$

Ainsi on relie indice L^2 et indice étendu

$$\mathrm{ind}_e D^+ = h_\infty(D^+) + \mathrm{ind}_{L^2} D^+.$$

Encore une fois, cet indice étendu est stable par déformation à support compact et en fait une morale du théorème d Atiyah-Singer reste vrai, c'est le théorème de l'indice relatif :

THÉORÈME. — *Si D_1, D_2 sont deux opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini et isométriques hors de compacts $K_i \subset M_i$, alors on a*

$$\mathrm{ind}_e D_1^+ - \mathrm{ind}_e D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+},$$

où on a noté $\alpha_{D_i^+}$ est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principale de D_i^+.

Ce théorème avait été montré par M. Gromov et H.B. Lawson ainsi que H.Donnely, lorsque 0 n'etait pas contenu dans le spectre essentiel des opérateurs. Nous pouvons alors les indices L^2 des deux opérateurs D_1^+ et D_2^+ :

COROLLAIRE.

$$\mathrm{ind}_{L^2} D_1^+ - \mathrm{ind}_{L^2} D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+} - \left(h_\infty(D_1^+) - h_\infty(D_2^+)\right),$$

où $h_\infty(D_i^+)$ est la dimension de l'espace $\ker_W D_i^+ / \ker_{L^2} D_i^+$, i.e. la dimension de l'espace des valeurs à l'infini des solutions à l'équation $\{D_i^+\sigma = 0,\ \sigma \in W\}$.

Selon U. Bunke lorsque les fibrés et les variétés riemanniennes sont à géométries bornées, alors cette différence entre les dimensions de l'espace des valeurs à l'infini pourrait s'interpréter comme un indice de scattering entre les opérateurs $D_1^- D_1^+$ et $D_2^- D_2^+$ ([B]). Il serait intéressant de mieux comprendre ceci, afin de rendre calculable ces dimensions.

On peut se demander si le théorème de l'indice relatif L^2 a lieu pour les opérateurs non-paraboliques à l'infini . Ce qui revient à savoir si $h_\infty(D^+)$ ne dépend que de la géométrie à l'infini. En fait ceci n'est pas vrai, pour la surface C obtenue en recollant deux plans euclidien le long de deux disques isométriques. Cependant si $h_\infty(D^+)$ ne dépend pas que de la géométrie à l'infini, $h_\infty(D^+) + h_\infty(D^-)$ ne dépend que de la géométrie à l'infini, on obtient ce résultat en appliquant le théorème de l'indice relatif aux opérateurs $D_1 = D_1^+ + D_1^-$ et $D_2 = D_2^+ + D_2^-$, on obtient

COROLLAIRE. — *Dans le même contexte qu'au théorème 3.1, on a*

$$h_\infty(D_1^+) + h_\infty(D_1^-) = h_\infty(D_2^+) + h_\infty(D_2^-,)$$

En particulier si D est un opérateur de type Dirac Z/2Z gradué non-parabolique à l'infini tel que $h_\infty(D^+) + h_\infty(D^-) = 0$ alors le théorème de l'indice L^2 relatif a lieu pour tout opérateur de type Dirac isométrique à l'infini avec D.

9. Application

Ce théorème permet de calculer l'indice de D_1^+ lorsqu'on connait celui de D_2^+ ; par exemple si on étudie l'opérateur de Gauss-Bonnet $d+\delta$. Supposons qu'il existe un compact K de M^n tel que $M - K$ soit isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne. Un calcul montre que si $n \geq 3$ alors $\mathrm{ind}_e((d+\delta), \mathbf{R}^n) = 0$ et que $h_\infty(d+\delta, \mathbf{R}^n) = 0$ ainsi en appliquant le théorème de l'indice relatif entre les opérateurs de Gauss-Bonnet de M et de $\mathbf{R}^n$ on obtient

$$\mathrm{ind}_{L^2}(d+\delta, M) - \mathrm{ind}_{L^2}(d+\delta, \mathbf{R}^n) = \mathrm{ind}_{L^2}(d+\delta, M) = \int_M \Omega^g.$$

Ce qui remontre un résultat de Stern, Borisov-Muller-Schrader ([S], [B-M-S]).

Bibiographie

[A] A. ANCONA. — *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lectures Notes n°1427, 1990.

[An] N. ANGHEL. — *An abstract index theorem on non-compact riemannian manifolds*, Houston J. Math. 19:2 (1993), 223–237.

[A-P-S] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI, I.M. SINGER. — *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), 43–69.

[B-M-S] N.V. BORISOV, W. MÜLLER, R. SCHRADER. — *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. math. Phys. 114 (1988), 475–513.

[B] U. BUNKE. — *Relative Index theory*, J. Funct. Anal. 105 (1992), 63–76.

[C1] G. CARRON. — *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, prépublication n°306 de l'institut J. Fourier, 1994.

[C2] G. CARRON. — *Une suite exacte en L^2-cohomologie*, prépublication n°174 de l'ENS Lyon., 1995.

[C3] G. CARRON. — *Inégalités de Sobolev-Orlicz non-uniforme*, prépublication n°195 de l'E.N.S. Lyon, 1996.

[c4] G. CARRON. — *Un théorème de l'indice relatif*, prépublication n°196 de l'E.N.S. Lyon, 1996.

[G-L] M. GROMOV, H.B. LAWSON. JR. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 83–196.

[D] H. DONNELY. — *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal. 75 (1987), 362–381.

[H-S] D. HOFFMAN, J.SPRUCK. — *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 7156–727.

[S] M.A. STERN. — *L^2-index theorem on warped-products*, thèse, Princeton Univ., 1984.

CARRON Gilles
UMPA, CNRS U.M.R. 128
ENS Lyon
46 Allée d'Italie
69364 LYON cedex 07 (France)
email : gcarron@umpa.ens-lyon.fr