Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

CLAIRE M. C. BARIBAUD

**Cordes et géodésiques fermées**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 15 (1996-1997), p. 189-192
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__189_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (189–192)

# CORDES ET GÉODÉSIQUES FERMÉES

*Claire M.C. BARIBAUD*

## 1. Introduction

Une surface de Riemann de signature $(g, k)$ est une surface compacte, orientable, munie d'une métrique hyperbolique (i.e courbure constante $-1$) de genre $g$ à $k$ trous et dont chaque composante de bord est une géodésique fermée. Rappelons qu'une géodésique fermée est la courbe la plus courte dans sa classe d'homotopie libre. Le spectre de longueurs d'une surface de Riemann est la liste donnée sous forme croissante de ses géodésiques fermées. Presque toute surface de Riemann compacte est déterminée par son spectre de longueurs, à isométrie près [Bus92]. De plus toute surface de Riemann compacte (de genre 1) se décompose en une succession de surfaces de Riemann de signature $(0, 3)$, plus communément appelées pantalons. Cette décomposition rend particulièrement intéressante l'étude du spectre de longueurs d'un pantalon. Pour ce faire, nous nous proposons de définir un critère topologique – le nombre de cordes – et de classifier les géodésiques fermées d'un pantalon en fonction de ce paramètre.

## 2. Définitions et notations

Notons $Y$ un pantalon, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ses géodésiques de bord et $p_1$, $p_2$, $p_3$ les perpendiculaires leur étant respectivement opposées. Ces géodésiques vérifient la relation $0 < \ell(\gamma_1) \leqslant \ell(\gamma_2) \leqslant \ell(\gamma_3)$ où $\ell$ est la longueur hyperbolique. Tout pantalon $Y$ peut être décomposé en deux hexagones hyperboliques droits identiques $Y_1$ et $Y_2$. Notons $\sigma : Y_1 \longrightarrow Y_2$ la symétrie qui envoie $Y_1$ sur $Y_2$. Nous définissons alors le critère topologique suivant,

DÉFINITION 2.1. — *On appelle corde un segment de géodésique sur $Y$ qui relie deux perpendiculaires distinctes sans avoir d'autres intersections avec $p_1$, $p_2$ ou $p_3$.*

Une corde est donc contenue dans un seul hexagone $Y_i$, $i = 1, 2$. Une géodésique fermée sur $Y$ est formée d'une succession de cordes où deux cordes successives ne se trouvent

*Classification math.* : 34,56,22

jamais sur le même hexagone. De plus, elle possède toujours un nombre pair de cordes. Afin de simplifier l'écriture nous adoptons les notations suivantes,

$$c_{i,n} = \cosh(n \frac{1}{2} y_i), \qquad c_i = c_{i,1},$$
$$s_{i,n} = \sinh(n \frac{1}{2} y_i), \qquad s_i = s_{1,1}, \qquad i = 1,2,3.$$

Nous allons maintenant montrer que pour un nombre de cordes donné $n$ ($n \geqslant 2$), une géodésique de longueur minimale existe. Nous donnerons sa représentation sur $Y$ ainsi que sa longueur en fonction des géodésiques de bord de $Y$. Afin de prouver cela, on étudie tout d'abord un cas particulier de géodésiques fermées sur $Y$: les géodésiques zygomorphes.

## 3. Géodésiques zygomorphes

DÉFINITION 3.1. — *On dit que la géodésique fermée g est zygomorphe s'il existe une succession de cordes $t_1, \ldots, t_{2n}$ formant g telle que $\sigma(t_k) = t_{2n+1-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. On dira qu'une telle succession est bonne.*

Remarquons qu'une géodésique zygomorphe est symétrique (en fonction de $\sigma$). La réciproque est fausse. Notons respectivement $c_1$ et $c_2$ les demi-chemins $t_1, \ldots, t_n$ et $t_{n+1}, \ldots, t_{2n}$. Si $g$ est zygomorphe alors $\sigma(c_1) = c_2$ et conséquemment les demi-chemins $c_1, c_2$ sont orthogonaux aux perpendiculaires de $Y$ en leurs extrémités. Étudions deux familles de géodésiques zygomorphes.

### 3.1. Famille $g^{ij}$

Notons $g^{ij}_{n,m}$ la géodésique fermée qui parcourt $n$ cordes sur la patte $y_i$, puis $m$ cordes sur la patte $y_j$. Par "zygomorphie" elle parcourt alors le chemin inverse, $n, m \in \mathbf{N}^*$, $i, j = 1,2,3$ distincts. Remarquons qu'une telle géodésique a $2(n+m)$ cordes. Pour connaître la longueur de $g^{ij}_{n,m}$, il suffit de regarder le relèvement $\bar{c}_k$ d'un demi-chemin $c_k$ de $g^{ij}_{nm}$, $k = 1,2$ dans le revêtement de $Y$ dans $\mathbf{H}$, le demi-plan de Poincaré. Le demi-chemin $\bar{c}_i$ est en fait le bord d'un hexagone droit croisé. On obtient la relation trigonométrique suivante

$$\cosh(\bar{c}_i) = \frac{s_{i,n} s_{j,m}}{s_i s_j}(c_k + c_i c_j) + c_{i,n} c_{j,m}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

THÉORÈME 3.2. — *$g^{12}_{n+m-1,1}$ est la plus courte géodésique de la famille $g^{ij}$ ayant $2(n+m)$ cordes.*

Pour la démonstration cf. [Bar96].

### 3.2. Famille $h^{ij}$

Notons $h^{ij}_{n,m}$ la géodésique fermée qui parcourt $n$ cordes sur la patte $y_i$, 1 corde sur la patte $y_k$ puis $m$ cordes sur la patte $y_j$. Par "zygomorphie" elle parcourt alors le chemin inverse, $n, m \in \mathbb{N}^*$, $i, j = 1,2,3$ distincts. Remarquons qu'une telle géodésique a $2(n+m+1)$ cordes. Pour connaître la longueur de $h^{ij}_{n,m}$, à nouveau on regarde le relèvement $\bar{c}_k$ d'un demi-chemin $c_k$ de $h^{ij}_{nm}$, $k = 1,2$ dans le revêtement de $Y$. Le demi-chemin $\bar{c}_i$ est, dans ce cas, le bord d'un hexagone droit. On obtient alors la relation trigonométrique suivante

$$\cosh(\bar{c}_i) = \frac{s_{i,n+1}s_{j,m+1}}{s_i s_j}(c_k + c_i c_j) - c_{i,n+1}c_{j,m+1}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

THÉORÈME 3.3. — *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$g^{ij}_{n+1,m} \leqslant h^{ij}_{n,m}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

Pour la démonstration cf. [Bar96].

Ainsi $g^{12}_{n-1,1}$ est la plus courte géodésique ayant $2n$ cordes dans les familles $g^{ij}$ et $h^{ij}$.

### 3.3. Généralisation

THÉORÈME 3.4. — *Soit $g$ une géodésique fermée zygomorphe. Alors $g$ peut être décomposée en une suite de courbes fermées, chacune homotope à une géodésique de la famille $g^{ij}$ ou $h^{ij}$.*

*Démonstration.* — Supposons que $g$ ait $2n$ cordes. Notons $d_1 = t_1, \dots, t_n$ un demi-chemin de $g$ tel que $d_1 \cup \sigma(d_1)$ soit une bonne succession de $g$.
Si $n = 2$, on voit aisément que $g = g^{ij}_{1,1}$, $i, j = 1,2,3$ distincts.
Si $n = 3$, alors $g = g^{ij}_{2,1}$ ou $g = h^{ij}_{1,1}$, $i, j = 1,2,3$ distincts.
Soit $n3$. Supposons que la bonne succession ci-dessus soit décomposable en une succession de courbes $c_1, \dots, c_r$, chacune homotope à une géodésique de la famille $g^{ij}$ ou $h^{ij}$, notées respectivement $g_1, \dots, g_r$. Notons $d_2 = d_1 \cup t_{n+1}$. Alors $d_2 \cup \sigma(d_2)$ est homotope à une géodésique $g'$ ayant $2(n+1)$ cordes. Montrons que $g'$ est aussi décomposable en une succession du type décrit ci-dessus. Supposons que $g_r = g^{ij}_{u,v}$. Notons $d_r = t_{n+1-(u+v)}, \dots, t_n$ le chemin inclus dans $d_1$ tel que $d_r \cup \sigma(d_r)$ est homotope à $g_r$ et $t_n$ est sur la patte $\gamma_j$. On construit alors le chemin $d_2' = d_r \cup t_{n+1}$.

1. si $t_{n+1}$ se trouve aussi sur la patte $\gamma_j$, alors $d_2' \cup \sigma(d_2')$ est homotope à $g_r = g^{ij}_{u,v+1}$.
2. si $t_{n+1}$ se trouve sur une autre patte, alors deux cas se présentent
   (a) si $v = 1$, alors $d_2' \cup \sigma(d_2')$ est homotope à $g_r = h^{ik}_{u,1}$.
   (b) si $v1$, notons $f = t_{n+1-(u+v)}, \dots, t_{n-1}$. Alors $f \cup \sigma(f)$ est homotope à $g_r = g^{ij}_{u,v-1}$ et $(t_n \cup t_{n+1}) \cup \sigma(t_n \cup t_{n+1})$ est homotope au nouvel élément $g_{r+1} = g^{j,q}_{1,1}$ où $q \neq j$.

Dans le cas où $g_r = h^{ij}_{u,v}$, la démonstration est similaire. □

THÉORÈME 3.5. — *Si* $1 \leqslant m \leqslant n-2$ *et* $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, *alors*

$$g^{ij}_{n,1} \leqslant g^{ij}_{n-m-1,1} + g^{ij}_{m,1} \quad 1 \leqslant m \leqslant n-2\,.$$

*Démonstration.* — Cette démonstration se décompose en deux parties. Dans la première partie, on montre que

$$\frac{s_{in}}{s_i}(c_k + c_i c_j) \leqslant \cosh\left(\frac{1}{2} g^{ij}_{n-m-1,1}\right) \cosh\left(\frac{1}{2} g^{ij}_{m,1}\right)$$

puis dans la seconde, on montre

$$c_{in}\, c_j \leqslant \sinh\left(\frac{1}{2} g^{ij}_{n-m-1,1}\right) \sinh\left(\frac{1}{2} g^{ij}_{m,1}\right)\,.$$

Pour plus de détails cf. [Bar96] □

Ainsi $g^{ij}_{n-1,1}$ est la plus courte géodésique zygomorphe ayant $2n$ cordes.

## 4. Géodésiques non zygomorphes

THÉORÈME 4.1. — *Soit g une géodésique non zygomorphe. Alors il existe au moins une géodésique zygomorphe plus courte que g (ayant le même nombre de cordes que g).*

*Démonstration.* — La géodésique $g$ a un nombre pair de cordes. Nous pouvons donc la scinder en deux demi–chemins $c_1$ et $c_2$ ayant le même nombre de cordes. Comme $g$ est non simple, le demi–chemin $c_i$, $i = 1, 2$ ne peut pas être uniquement sur une seule patte de $Y$. Notons $g_i$, la géodésique (non fermée) homotope à $c_i$, $i = 1, 2$. Supposons que $g_1$ soit plus courte que $g_2$. Alors la géodésique $g_1 \cup \sigma(g_1)$ est plus courte que $g$. □

CONCLUSION 4.2. — $g^{12}_{n-1,1}$ *est la plus courte géodésique fermée sur Y ayant* $2n$ *cordes.*

## Références

[Bar96] C. Baribaud. *Sur les géodésiques des surfaces de Riemann de signature* (0, 3). Thèse de doctorat ès sciences No. 1587, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suisse, décembre 1996.

[Bus92] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in mathematics*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1992.

Claire M.C. BARIBAUD
Department of Mathematics
The Florida State University
TALLAHASSEE FL 32306-3027 (USA)
email: baribaud@newton.math.fsu.edu