

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES CARRON

## Une suite exacte en $L^2$ -cohomologie

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 14 (1995-1996), p. 59-64

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1995-1996\\_\\_14\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__59_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE SUITE EXACTE EN $L^2$ -COHOMOLOGIE

*Gilles CARRON*

### a. Introduction

Pour motiver mon problème, je commence par rappeler la formule de Gauss- Bonnet : si  $(M, g)$  est une surface orientée compacte sans bord alors

$$\int_M \frac{K dA}{2\pi} = 2 - 2g = \chi(M) \text{ où } g \text{ est le genre de } M.$$

Cette formule exprime un invariant métrique (l'intégrale de la courbure :  $\int_M \frac{K dA}{2\pi}$ ) en fonction d'un invariant topologique  $\chi(M)$  (la caractéristique d'Euler). En dimension supérieure, il existe une formule analogue

$$\int_M \Omega = \chi(M)$$

où  $\Omega$  est la  $n$ -forme d'Euler de la variété riemannienne orientée  $(M^n, g)$  ; cette  $n$ -forme s'exprime en fonction de l'opérateur de courbure de  $(M^n, g)$  et on a ponctuellement la majoration

$$|\Omega(x)| \leq c(n)|R|^{\frac{n}{2}}(x)$$

où  $R$  est le tenseur de courbure de  $(M^n, g)$ . On aimerait savoir ce qui se passe lorsque la variété n'est plus compacte, la question est la suivante :

si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne complète telle que  $\int_M \Omega$  converge, alors comment relier cette intégrale à la topologie et à la géométrie de  $(M, g)$  ?

Pour cela, on aimerait, au moins dans le cas compact, avoir une définition plus métrique de la caractéristique d'Euler afin de pouvoir la relier plus directement à l'intégrale de la  $n$ -forme d'Euler, qui, elle, est définie à partir de la métrique. C'est pourquoi on considère la

## b. $L^2$ -cohomologie

Soit  $M^n$  une variété compacte grâce au théorème de De Rham, la caractéristique d'Euler de  $M^n$  peut être définie en terme de formes différentielles : l'opérateur de différentiation extérieure

$$d : C^\infty(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)$$

vérifie  $d \circ d = 0$ , le  $k$ -ième groupe de cohomologie (de De Rham) est défini par

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\text{Ker } d : C^\infty(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)}{dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}.$$

Et la caractéristique d'Euler est

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_{dR}^k(M);$$

c'est une définition différentielle de la caractéristique d'Euler.

Soit maintenant  $(M^n, g)$  une variété Riemannienne complète. La  $L^2$ -cohomologie est définie à partir de l'action (non-bornée) de la différentiation extérieure  $d$  sur l'espace de Hilbert  $L^2(\Lambda^k T^* M)$ . La structure hilbertienne induite par la métrique nous permet de définir un opérateur différentiel adjoint à  $d$  :  $\delta$  par la formule

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \delta\beta \rangle, \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M), \beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M).$$

Si  $\mathcal{H}^k(M)$  est l'espace des  $k$ -formes harmoniques  $L^2$

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M), d\alpha = \delta\alpha = 0\},$$

alors l'espace  $L^2(\Lambda^k T^* M)$  admet la décomposition orthogonale de Hodge-deRham-Kodaira suivante :

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus B^k L^2(M) \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)},$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de  $L^2(\Lambda^k T^* M)$ .

Donc pour toute  $k$ -forme  $\alpha \in L^2$  il existe une suite  $\varphi_l \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M) \oplus C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)$  et une forme harmonique  $\mathcal{H}(\alpha)$  telle que

$$\alpha - \mathcal{H}(\alpha) = L^2 - \lim_{l \rightarrow \infty} (d + \delta)\varphi_l.$$

De plus, si  $M^n$  est supposée compacte sans bord alors le théorème de De Rham nous dit que

$$\text{Ker}(d : C^\infty(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M),$$

et donc que

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq H_{dR}^k(M).$$

On peut donc exprimer la caractéristique d'Euler en fonction de la  $L^2$ -cohomologie

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M) = \int_M \Omega$$

*Remarque.* — Dans le cas non-compact, complet, ces espaces de formes harmoniques  $L^2$  ont encore une interprétation : ce sont les espaces de  $L^2$  cohomologie (réduite) de  $(M^n, g)$ .

On peut penser qu'il y a une preuve "métrique" de l'égalité des deux invariants métriques  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)$  et  $\int_M \Omega$  ; et ceci est vrai grâce à la preuve du théorème de l'indice par l'équation de la chaleur, due pour le cas général à Atiyah-Bott-Patodi et dans le cas du théorème de Gauss-Bonnet à Patodi.

Lorsque  $(M^n, g)$  n'est plus compacte, les espaces de  $L^2$ -cohomologie ne sont plus forcément de dimension finie, et de nombreux travaux ont été fait pour relier la  $L^2$ -cohomologie, l'intégrale de la  $n$ -forme d'Euler et la topologie de  $M$ .

J'avais obtenu le résultat suivant :

**THÉORÈME A.** — Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_n(M) \left( \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x) dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x) dx, \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont le tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R|^{\frac{n}{2}}(x) dx < \infty,$$

alors les espaces de  $L^2$ -cohomologie de  $(M^n, g)$  sont de dimension finie.

Après ce résultat, il vient plusieurs questions naturelles :

- i) Quelle formule de Gauss-Bonnet peut-on espérer dans ce cadre ? i.e. comment peut-on relier  $\int_M \Omega$  (qui converge puisque  $|\Omega|(x) \leq c(n)|R|^n(x)$ ) et la caractéristique d'Euler  $L^2$  de  $(M, g)$  définie par

$$\chi_{L^2}(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M) ?$$

ii) Comment ces quantités dépendent de la topologie de  $M$ ?

Dans [C1], j'avais calculé les espaces de  $L^2$ -cohomologie des variétés asymptotiquement euclidiennes et ce calcul montrait qu'en dimension supérieure ou égale à 3, on avait une formule de Gauss-Bonnet

$$\chi_{L^2}(M) = \int_M \Omega$$

Cette égalité était déjà montré dans [B-M-S] et [Br]. Nous avons le résultat suivant :

**PROPOSITION B.1.** — *La caractéristique d'Euler  $L^2$  est un invariant d'homotopie à support compact.*

En fait, les espaces de  $L^2$ -cohomologie ont une définition cohomologique et on peut montrer qu'ils sont des invariants d'homotopies Lipschitz (cf. [Lo]). Maintenant on aimerait savoir ce qui se passe lorsque la topologie est modifiée sur un compact, la proposition suivante nous dit qu'alors la caractéristique d'Euler  $L^2$  est modifiée de la même façon que l'intégrale de la  $n$ -forme d'Euler, c'est une formule de Gauss-Bonnet relative :

**PROPOSITION B.2.** — *Soient  $(M_1^n, g_1)$  et  $(M_2^n, g_2)$  deux variétés riemanniennes complètes de dimension  $n \geq 5$  qui vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème A alors s'il existe  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) un domaine compact de  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) tel que  $(M - D_1, g_1)$  soit isométrique à  $(M_2 - D_2, g_2)$  alors*

$$\chi_{L^2}(M_1, g_1) - \chi_{L^2}(M_2, g_2) = \int_{D_1} \Omega^{g_1} - \int_{D_2} \Omega^{g_2}.$$

M. Gromov et B. Lawson avaient démontré un tel résultat pour des opérateurs de Dirac sur des variétés non-compactes, complètes dont le potentiel courbure, qui apparaît dans la formule de Bochner-Weitzenböck, est uniformément strictement positif sur un voisinage de l'infini ([G-L]); en fait comme l'a montré H. Donnelly, le fait que le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Dirac soit strictement positif suffit pour avoir une formule de l'indice  $L^2$ -relatif ([D]). Cependant les variétés que nous considérons ont, généralement, un bas du spectre essentiel nul.

Enfin, la proposition suivante nous informe sur la topologie des variétés considérées :

**PROPOSITION B.3.** — *Si  $(M^n, g)$  une variété riemannienne complète connexe, qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_n(M) \left( \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x) dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x) dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*et si la plus petite valeur propre négative du tenseur de Ricci,  $\text{ric}_-$ , vérifie*

$$\int_M |\text{ric}_-(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

alors on a la majoration

$$\dim H_c^1(M) = \dim H^{(n-1)}(M) \leq C(n)\mu_n(M)^{-1} \int_M |\text{ric}_-(x)|^{\frac{n}{2}} dx.$$

et dans ce cas  $M^n$  a un nombre fini de bouts  $b$  et on a la majoration

$$b \leq 1 + C(n)\mu_n(M)^{-1} \int_M |\text{ric}_-(x)|^{\frac{n}{2}} dx.$$

En fait tous ces résultats reposent sur la suite exacte suivante :

**THÉORÈME B.** — Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n \geq 5$ , vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M) \left( \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x) dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x) dx, \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et telle que son tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

alors si  $D$  est un ouvert borné (à bord régulier) de  $M$ , nous avons la suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^k(D, \partial D) \xrightarrow{i} \mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{j^*} H_{(2)}^k(M - D) \xrightarrow{b} H^{k+1}(D, \partial D) \longrightarrow \dots$$

*Remarques.*

- i) Cette suite exacte est l'analogue de la suite exacte de l'homomorphisme cobord en cohomologie classique.
- ii) L'hypothèse sur la dimension est une hypothèse sur la dimension de l'inégalité de Sobolev  $n \geq 5$ , c'est celle qui permet de savoir que certaines fonctions harmoniques décroissent assez vite à l'infini. Les termes de cette suite exacte sont les suivants :  $H^k(D, \partial D)$  est la cohomologie relative (ou à support compact) de  $D$ , et  $H_{(2)}^k(M - D)$  est la  $L^2$ -cohomologie absolue de  $M - D$  que l'on peut identifier à la partie de la  $L^2$ -cohomologie du double de  $M - D$  qui est invariante par la symétrie par rapport à  $\partial D$  ; on peut aussi identifier cet espace à un espace de formes harmoniques

$$H_{(2)}^k(M - D) \simeq \{h \in L^2(\wedge^k T^*(M - D)), dh = \delta h = 0 \text{ et } \text{int}_\nu h = 0\},$$

où  $\nu$  est le champ de vecteur normal unitaire à  $\partial D$ . Cette identification est similaire à celle que l'on a pour les variétés compactes à bord (cf [D-S]).

De cette suite exacte, nous pouvons en déduire les formules suivantes pour la caractéristique d'Euler  $L^2$  :

**PROPOSITION B.4.** — Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème B alors si  $D$  est un ouvert borné de  $M$  on a

$$\chi_{L^2}(M, g) = \chi(D, \partial D) + \chi_{L^2}(M - D, g).$$

Si de plus la dimension  $n$  est paire alors

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_D \Omega + \int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D),$$

où  $P(II)$  est un polynôme en la seconde forme fondamentale de  $\partial D \subset M$ . En particulier, nous avons la formule

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_M \Omega + \lim_{D \rightarrow M} \left( \int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D) \right).$$

Ces formules se déduisent du théorème B en écrivant que la somme alternée des dimensions des termes de la suite exacte est nulle et des formules exprimant la caractéristique d'Euler d'une variété à bord. Ces résultats sont démontrés dans [C2], l'étape essentielle de la preuve consiste à montrer qu'il existe un opérateur de Green, i.e. un bon inverse au Laplacien agissant sur les formes différentielles.

## c. Bibliographie

- [B-M-S] N.V. BORISOV, W. MÜLLER, R. SCHRADER. — *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. math. Phys. 114 (1988), 475–513.
- [Br] J. BRÜNING. —  *$L^2$ -index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry 32 (1990), 491–532.
- [C1] G. CARRON. —  *$L^2$ -cohomologie et inégalités de Sobolev*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 306, Grenoble, 1994.
- [C2] G. CARRON. — *Une suite exacte en  $L^2$ -cohomologie*, Prépublication n°174 de l'ENS Lyon., 1995.
- [D] H. DONNELLY. — *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal. 75 (1987), 362–381.
- [D-S] G. DUFF, D.C. SPENCER. — *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with boundary*, Ann. of Math. Stud. 56, n°1 (1952), 115–127.
- [G-L] M. GROMOV, H.B. LAWSON, JR. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 83–196.
- [Lo] J. LOTT. —  *$L^2$ -cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifold*, to appear in GAFA.

CARRON Gilles  
 UMPA, CNRS UMR 128  
 ENS Lyon  
 46 Allée d'Italie  
 69364 Lyon cedex 07  
 e-mail : gcarron@umpa.ens-lyon.fr