

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

JÓZEF DODZIUK

## **La trace du noyau de la chaleur des variétés hyperboliques de dimension 3**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 14 (1995-1996), p. 53-57

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1995-1996\\_\\_14\\_\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__53_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LA TRACE DU NOYAU DE LA CHALEUR DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

Józef DODZIUK

RÉSUMÉ. — D'après un théorème de W. Thurston, toute variété  $M_0$  hyperbolique, complète, non compacte, de volume fini et de dimension 3 est limite d'une suite des variétés  $M_k$  du même type avec moins de cusps. On va discuter le comportement de la trace de l'opérateur de la chaleur pendant la convergence  $M_k \rightarrow M_0$ .

Dans cet article on présente une partie d'un travail commun avec Jay Jorgenson [DJ]. Notre technique est une adaptation à la dimension 3 des méthodes développées par Jorgenson et Lundelius dans le cas des familles de surfaces de Riemann qui dégèrent [JL1], [JL2], [JL3].

Nous considérons des variétés hyperbolique  $M$  de dimension 3, complètes et de volume fini. On écrit  $M_I$  pour la partie de  $M$  formée des points dont le rayon d'injectivité appartient à l'intervalle  $I$ . Soit  $\mu$  la constante de Kazhdan-Margulis [G]; toute variété  $M$  se décompose en deux parties,  $M = M_{(0,\mu)} \cup M_{[\mu,\infty)}$ , la *partie mince* et la *partie épaisse*. La partie épaisse est non vide et connexe, et la partie mince est une réunion finie de tubes et de cusps. Un cusp est le produit  $[a, \infty) \times T$ , où  $T$  est un tore, muni de la métrique  $ds^2 = dr^2 + e^{-2r} ds_0^2$ ,  $ds_0^2$  étant une métrique plate sur  $T$ . Un tube est un voisinage tubulaire d'une géodésique fermée. Selon Thurston [G] on peut, en utilisant des chirurgies de Dehn, fermer certains cusps, de telle façon que  $M = M_0$  devienne la limite d'une suite de variétés hyperboliques avec moins de cusps. Il faut remarquer que les variétés  $M_k$  ont des types d'homotopie distincts deux à deux, à cause du théorème de rigidité de Mostow. Le processus de fermeture des cusps les remplace par des tubes dans  $M_k$  entourant des géodésiques dont la longueur approche zéro. On les appelle les *petites géodésiques*. Pendant la convergence (qu'on appelle aussi la *dégénérescence*) les compléments des unions des petites géodésiques sont tous difféomorphes et la métrique riemannienne des  $M_k$  converge sur les parties épaisses vers la métrique de  $M_0$  dans un sens très fort (la topologie  $C^\infty$ ).

Toute variété  $M_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , est un quotient de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  par une action d'un sous-groupe discret  $\Gamma_k$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$ ;  $M_k = \mathbb{H}^3 / \Gamma_k$ . Les groupes

$\Gamma_k$  convergent vers  $\Gamma_0$  dans la topologie de Chabauty; cela veut dire qu'il y a des homomorphismes surjectifs  $\psi_k : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_k$  tels que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(y) = y$  pour  $y \in \Gamma_0$  et  $U \cap \Gamma_k \rightarrow U \cap \Gamma_0$  pour tout ensemble  $U \subset \mathbb{H}^3$  ouvert relativement compact.

Nous étudions la convergence des noyaux de la chaleur  $K_{M_k}(t, x, y)$  et des invariants spectraux associés aux variétés de la suite  $M_k$ . Plus précisément, les invariants comme le déterminant du Laplacien, la fonction zêta de Selberg, la fonction de comptage spectrale  $N_{M_k}(T) = \{\lambda \in \text{Spec}(\Delta_{M_k}) \mid \lambda \leq T\}$ , etc. peuvent être exprimés par des formules intégrales comportant la trace de l'opérateur de la chaleur

$$\text{Tr } K_{M_k}(t) = \int_{M_k} K_{M_k}(t, x, x) dV.$$

Par exemple, la fonction zêta d'une variété compacte  $M$  est donnée par

$$\zeta_M(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty [\text{Tr } K_M(t) - 1] t^s \frac{dt}{t}$$

et le déterminant du Laplacien par  $\det \Delta_M = \exp(-\partial_s \zeta_M(0))$ . La difficulté ici est que la trace  $\text{Tr } K_{M_k}(t)$  est infinie aussitôt que  $M$  a des cusps. Nous montrons comment on peut régulariser la trace de la chaleur, puis nous utilisons les mêmes formules qu'on utilise dans le cas des variétés compactes pour définir des analogues régularisés des invariants spectraux et pour relier les invariants régularisés des variétés  $M_k$  aux invariants de la variété limite  $M_0$ . En particulier, si la suite  $\{M_k\}_{k=1}^\infty$  ne contient que des variétés compactes, nous identifions comment les invariants spectraux divergent lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Nous montrons aussi que, quand on soustrait le terme principal de "blow-up", la différence converge vers l'invariant régularisé de la variété limite.

Considérons une variété  $M$  comme  $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$  où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $PSL(2, \mathbb{C})$  agissant par isométries sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Soit  $H(\Gamma)$  un ensemble de représentants de toutes des classes de conjugaison des éléments hyperboliques (c'est-à-dire des éléments  $\gamma$  pour lesquels  $|Tr(\gamma)| > 2$ ) primitifs (qui ne sont pas des puissances non triviales des autres éléments) de  $\Gamma$ . Les éléments de  $H(\Gamma)$  sont en correspondance bijective avec les géodésiques simples, fermées et orientées de  $M$ . Soit  $P(\Gamma)$  un ensemble des représentants des classes de conjugaison des sous-groupes maximaux  $\Pi \subset \Gamma$  qui sont isomorphes à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  et ne contiennent que des éléments paraboliques. Si  $M$  est compacte,  $P(\Gamma)$  est vide et, en general, les éléments de  $P(\Gamma)$  correspondent à des cusps de  $M$ . Pour  $\gamma \in \Gamma$  notons  $\Gamma_\gamma$  le centralisateur de  $\gamma$  et, pour  $\Pi \in P(\Gamma)$ ,  $\Gamma_\Pi$  le centralisateur (égal dans notre situation au normalisateur) de  $\Pi$  dans  $\Gamma$ . Comme conséquence de l'unicité du noyau de la chaleur

$$K_M(t, x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} K_{\mathbb{H}^3}(t, \bar{x}, \bar{y}), \quad (1)$$

où on écrit  $\bar{x}$  pour n'importe quelle pré-image de  $x$  dans  $\mathbb{H}^3$ . Le noyau de la chaleur de l'espace hyperbolique est donné par

$$K_{\mathbb{H}^3}(z, w_1, w_2) = K_{\mathbb{H}^3}(z, d(w_1, w_2)) = \frac{e^{-z}}{(4\pi z)^{3/2}} \frac{d(w_1, w_2)}{\sinh d(w_1, w_2)} e^{-d(w_1, w_2)^2/4z}$$

où  $d(w_1, w_2)$  est la distance de  $w_1$  à  $w_2$ . La forme explicite de  $K_{\mathbb{H}^3}(z, w_1, w_2)$  permet de conclure que la série dans (1) converge uniformément, ainsi que ses dérivées de tous ordres, sur les parties compactes de  $\mathbb{H}^3$ .

On va sommer (1) en regroupant les termes selon leurs classes de conjugaison. Ainsi

$$\begin{aligned} K_M(t, x, y) &= K_{\mathbb{H}_3}(t, \bar{x}, \bar{y}) + \sum_{\Pi \in P(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Pi \setminus \{e\}} \sum_{\kappa \in \Gamma/\Gamma_\Pi} K_{\mathbb{H}_3}(t, \bar{x}, \kappa^{-1}\gamma\kappa\bar{y}) \\ &+ \sum_{\gamma \in H(\Gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa \in \Gamma/\Gamma_\gamma} K_{\mathbb{H}_3}(t, \bar{x}, \kappa^{-1}\gamma^n\kappa\bar{y}). \end{aligned}$$

Comme la propriété d'être hyperbolique est préservée par conjugaison, la fonction

$$\text{HK}_M(t, x) = \sum_{\gamma \in H(\Gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa \in \Gamma/\Gamma_\gamma} K_{\mathbb{H}_3}(t, \bar{x}, \kappa^{-1}\gamma^n\kappa\bar{x}) \quad (2)$$

est bien définie pour  $t > 0$  et  $x \in M$ . De plus, la fonction  $\text{HTr } K_M(t)$  de  $t \in \mathbb{R}^+$  définie par

$$\text{HTr } K_M(t) = \int_M \text{HK}_M(t, x) dV \quad (3)$$

est finie. On appelle  $\text{HTr } K_M(t)$  la trace hyperbolique de  $M$  et on définit la *trace régularisée*  $\text{STr } K_M(t)$  par

$$\text{STr } K_M(t) = \text{HTr } K_M(t) + \text{vol}(M)K_{\mathbb{H}_3}(t, 0).$$

En fait, si  $M$  est compacte la trace régularisée est égale à la trace de l'opérateur de la chaleur. Soit  $\gamma \in H(\Gamma)$  conjugué à l'élément diagonal

$$\begin{pmatrix} e^{\ell/2} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\ell/2} e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Alors  $\ell = \ell(\gamma)$  est égal à la longueur de la géodésique fermée  $g$  dans  $M$  correspondant à  $\gamma$  et  $\alpha$  est l'angle de l'holonomie autour de  $g$ . L'intégrale dans (3) peut être calculée explicitement comme

$$\text{HTr } K_M(t) = \frac{e^{-t}}{(64\pi t)^{1/2}} \sum_{\gamma \in H(\Gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{|\sinh(n\ell/2 + in\alpha/2)|^2} e^{-(n\ell)^2/4t}. \quad (4)$$

Cette formule relie la trace hyperbolique à la géométrie des tubes de  $M$ . De plus, il découle de (2) que

$$\text{HTr } K_M(t) = \int_{C_\gamma} (K_{C_\gamma}(t, x, x) - K_{\mathbb{H}^3}(t, 0)) dV.$$

Cela nous permet d'étudier de la trace hyperbolique de  $M$  en utilisant des techniques classiques comme le principe du maximum, etc.

Soit  $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$  une suite de variétés hyperboliques de volume fini obtenues par application de chirurgies de Dehn et approchant une variété  $M_0$ . Si  $\Pi_0 \in P(\Gamma_0)$  correspond à un des cusps fermé par chirurgie de Dehn, on a  $\psi^{-1}(\Pi_0) = \langle \gamma_k \rangle$  où  $\ell(\gamma_k) \rightarrow 0$ . Alors la géodésique associée à  $\gamma_k$  est une petite géodésique. On note  $D(\Gamma_k) \subset H(\Gamma_k)$  l'ensemble des telles  $\gamma_k$ . Maintenant on peut définir la trace dégénérente comme

$$\text{DTr } K_{M_k}(t) = \frac{e^{-t}}{(64\pi t)^{1/2}} \sum_{\gamma \in D(\Gamma_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{|\sinh(n\ell/2 + in\alpha/2)|^2} e^{-(n\ell)^2/4t},$$

c'est-à-dire comme la partie de la somme dans (4) correspondant aux petites géodésiques. Les deux théorèmes suivants décrivent le comportement des traces hyperboliques pendant la dégénérescence.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$  une suite de variétés hyperboliques de dimension 3 complètes, de volume fini qui convergent vers une variété de même type  $M_0$ .

a)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\text{HTr } K_{M_k}(t) - \text{DTr } K_{M_k}(t)] = \text{HTr } K_{M_0}(t)$$

pour tout  $t > 0$ .

b) Pour chaque  $\delta > 0$ , il existe  $c > 0$  tel que pour  $t < \delta$

$$\text{HTr } K_{M_k}(t) - \text{DTr } K_{M_k}(t) = O(e^{-c/t})$$

uniformément en  $k$ .

Notre second théorème établit l'uniformité de la convergence de la différence des traces hyperboliques et les traces dégénérentes lorsque  $t$  prend des valeurs complexes.

**THÉORÈME 2.** — Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Re}(z) > 0$ .

a) Pour  $z = t + is$  fixé avec  $t > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\text{HTr } K_{M_k}(t + is) - \text{DTr } K_{M_k}(t + is)] = \text{HTr } K_{M_0}(t + is).$$

b) Pour  $t > 0$  fixé, il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$|\text{HTr } K_{M_k}(t + is) - \text{DTr } K_{M_k}(t + is)| \leq L(1 + |s|^{3/2})$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $k = 1, 2, 3, \dots$

Il est utile de considérer les valeurs complexes de temps  $t$  parce que pour  $M$  compacte, si

$$N_{M,w}(T) = \sum_{\lambda \leq T} (T - \lambda)^w$$

où  $\lambda$  dénotent les valeurs propres du Laplacien,

$$N_{M,w}(T) = N_{M,s}((w)t^w)(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(w+1)}{z^w} \text{STr } K_M(z) e^{zT} \frac{dz}{z}$$

si  $\text{Re}(w)$  est assez grand. On peut étudier aussi  $N_M(T) = N_{M,0}(T) = \#\{\lambda \in \text{Spec}_M(\Delta) \mid \lambda \leq T\}$  au moyen de la trace de la chaleur pour  $t$  complexe. Si  $M$  n'est pas compacte on remplace la trace ci-dessus par la trace régularisée.

Pour estimer la différence  $\text{HTr } K_{M_k}(t) - \text{DTr } K_{M_k}(t)$  on l'écrit comme une somme d'intégrales de trace de divers noyaux de la chaleur sur des domaines qui sont soit sous-ensembles de parties épaisses de  $M_k$ , soit d'autres variétés de type standard (des cusps ou des cylindres hyperboliques). Si  $\epsilon > 0$  est assez petit,  $M_{k,(0,\epsilon]}$  est une réunion finie disjointe de  $C_{\gamma_k,(0,\epsilon]}$  et  $C_{\Pi_k,(0,\epsilon]}$  où  $C_{\gamma_k} = \mathbb{H}^3 / \langle \gamma_k \rangle$  pour  $\gamma_k \in D(\Gamma_k)$  et  $C_{\Pi_k} = \mathbb{H}^3 / \Pi_k$  pour  $\Pi_k \in P(\Gamma_k)$ . Alors les composantes de  $M_{k,(0,\epsilon]}$  peuvent être identifiées avec des parties de  $C_{\gamma_k}$

(ou  $C_{\Pi_k}$ ) et on peut comparer les noyaux de la chaleur de  $M_k$  avec ceux des  $C_{\gamma_k}$  (ou  $C_{\Pi_k}$ ) sur le domaine commun  $C_{\gamma_k, (0, \epsilon)}$  (ou  $C_{\Pi_k, (0, \epsilon)}$ ). Cela étant, on montre que

$$\begin{aligned} \text{HTr } K_{M_k}(t) - \text{DTr } K_{M_k}(t) &= \int_{M_k, (\epsilon, \infty)} [K_{M_k}(t, x, x) - K_{\mathbb{H}^3}(t, 0)] dV \\ &+ \sum_{\substack{C_{\gamma_k} \\ \gamma_k \in \mathcal{D}(\Gamma_k)}} \int_{C_{\gamma_k, (0, \epsilon)}} [K_{M_k}(t, x, x) - K_{C_{\gamma_k}}(t, x, x)] dV \\ &+ \sum_{\Pi_k \in \mathcal{P}(\Gamma_k)} \int_{C_{\Pi_k, (0, \epsilon)}} [K_{M_k}(t, x, x) - K_{C_{\Pi_k}}(t, x, x)] dV \\ &- \sum_{\substack{C_{\gamma_k} \\ \gamma_k \in \mathcal{D}(\Gamma_k)}} \int_{C_{\gamma_k, (\epsilon, \infty)}} [K_{C_{\gamma_k}}(t, x, x) - K_{\mathbb{H}^3}(t, 0)] dV \\ &- \sum_{\Pi_k \in \mathcal{P}(\Gamma_k)} \int_{C_{\Pi_k, (\epsilon, \infty)}} [K_{C_{\Pi_k}}(t, x, x) - K_{\mathbb{H}^3}(t, 0)] dV. \end{aligned}$$

Le premier terme ci-dessus peut être contrôlé parce que les métriques des  $M_k$  convergent vers la métrique de  $M_0$  sur les parties épaisses. On traite les autres termes en utilisant: (i) la description explicite de la géométrie des domaines; (ii) les méthodes classiques d'analyse comme le principe du maximum, la formule de Poisson etc.

## BIBLIOGRAPHIE

- [D]) J. DODZIUK et J. JORGENSEN. — *Spectral asymptotics on degenerating hyperbolic 3-manifolds*, Preprint IHES, Décembre, 1995.
- [G]) M. GROMOV. — *Hyperbolic manifolds according Thurston and Jørgensen*, Sémin. Bourbaki 546 (1979), 1-14.
- [JL1]) J. JORGENSEN et R. LUNDELIUS. — *Convergence of the heat kernel and the resolvent kernel on degenerating hyperbolic Riemann surfaces of finite volume*, Quaestiones Mathematicae 18 (1995), 345-363.
- [JL2]) J. JORGENSEN et R. LUNDELIUS. — *Convergence of the normalized spectral function on degenerating hyperbolic Riemann surfaces of finite volume*, Preprint Yale University, 1994.
- [JL3]) J. JORGENSEN et R. LUNDELIUS. — *A regularized heat trace for hyperbolic Riemann surfaces of finite volume*, à paraître dans Journal of Geometric Analysis.

Józef DODZIUK  
The GRADUATE SCHOOL and  
UNIVERSITY CENTER  
33 west 42 street,  
NEW YORK NY 10036-8099  
(USA)