Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Józef Dodziuk

La trace du noyau de la chaleur des variétés hyperboliques de dimension 3

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 53-57
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__53_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (53–57)

LA TRACE DU NOYAU DE LA CHALEUR DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

Józef DODZIUK

RÉSUMÉ. — D'après un théorème de W. Thurston, toute variété M_0 hyperbolique, complète, non compacte, de volume fini et de dimension 3 est limite d'une suite des variétés M_k du même type avec moins de cusps. On va discuter le comportement de la trace de l'opérateur de la chaleur pendant la convergence $M_k \to M_0$.

Dans cet article on présente une partie d'un travail commun avec Jay Jorgenson [DJ]. Notre technique est une adaptation à la dimension 3 des méthodes développées par Jorgenson et Lundelius dans le cas des familles de surfaces de Riemann qui dégénèrent [JL1], [JL2], [JL3].

Nous considérons des variétés hyperbolique M de dimension 3, complètes et de volume fini. On écrit M_I pour la partie de M formée des points dont le rayon d'injectivité appartient à l'intervalle I. Soit μ la constante de Kazhdan-Margulis [G]; toute variété M se décompose en deux parties, $M = M_{(0,\mu]} \cup M_{[\mu,\infty)}$, la *partie mince* et la *partie épaisse*. La partie épaisse est non vide et connexe, et la partie mince est une réunion finie de *tubes* et de *cusps*. Un *cusp* est le produit $[a, \infty) \times T$, où T est un tore, muni de la métrique $ds^2 = dr^2 + e^{-2r}ds_0^2$, ds_0^2 étant une métrique plate sur T. Un tube est un voisinage tubulaire d'une géodésique fermée. Selon Thurston [G] on peut, en utilisant des chirurgies de Dehn, fermer certains cusps, de telle façon que $M = M_0$ devienne la limite d'une suite de variétés hyperboliques avec moins de cusps. Il faut remarquer que les variétés M_k ont des types d'homotopie distincts deux à deux, à cause du théorème de rigidité de Mostow. Le processus de fermeture des cusps les remplace par des tubes dans M_k entourant des géodésiques dont la longueur approche zéro. On les appelle les *petites géodésiques*. Pendant la convergence (qu'on appelle aussi la *dégénérescence*) les compléments des unions des petites géodésiques sont tous difféomorphes et la métrique riemannienne des M_k converge sur les parties épaisses vers la métrique de M_0 dans un sens très fort (la topologie C^∞).

Toute variété M_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, est un quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ par une action d'un sous-groupe discret Γ_k de $PSL(2, \mathbb{C})$; $M_k = \mathbb{H}^3/\Gamma_k$. Les groupes

---

Classification math.: 58G11, 58G25, 57M50, 57M60.

Γ_k convergent vers Γ_0 dans la topologie de Chabauty; cela veut dire qu'il y a des homomorphismes surjectifs $\psi_k : \Gamma_0 \to \Gamma_k$ tels que $\lim_{k\to\infty} \psi_k(\gamma) = \gamma$ pour $\gamma \in \Gamma_0$ et $U \cap \Gamma_k \to U \cap \Gamma_0$ pour tout ensemble $U \subset \mathbb{H}^3$ ouvert relativement compact.

Nous étudions la convergence des noyaux de la chaleur $K_{M_k}(t, x, y)$ et des invariants spectraux associés aux variétés de la suite M_k. Plus précisément, les invariants comme le déterminant du Laplacien, la fonction zêta de Selberg, la fonction de comptage spectrale $N_{M_k}(T) = \{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Delta_{M_k}) \mid \lambda \leq T\}$, etc. peuvent être exprimés par des formules integrales comportant la trace de l'opérateur de la chaleur

$$\mathrm{Tr}\, K_{M_k}(t) = \int_{M_k} K_{M_k}(t, x, x)\, dV.$$

Par exemple, la fonction zêta d'une variété compacte M est donnée par

$$\zeta_M(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty [\mathrm{Tr}\, K_M(t) - 1]\, t^s \frac{dt}{t}$$

et le déterminant du Laplacien par $\det \Delta_M = \exp(-\partial_s \zeta_M(0))$. La difficulté ici est que la trace $\mathrm{Tr}\, K_{M_k}(t)$ est infinie aussitôt que M a des cusps. Nous montrons comment on peut régulariser la trace de la chaleur, puis nous utilisons les mêmes formules qu'on utilise dans le cas des variétés compactes pour définir des analogues régularisés des invariants spectraux et pour relier les invariants régularisés des variétés M_k aux invariants de la variété limite M_0. En particulier, si la suite $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ ne contient que des variétés compactes, nous identifions comment les invariants spectraux divergent lorsque $k \to \infty$. Nous montrons aussi que, quand on soustrait le terme principal de "blow-up", la différence converge vers l'invariant régularisé de la variété limite.

Considérons une variété M comme $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{C})$ agissant par isométries sur l'espace hypberbolique $\mathbb{H}^3$. Soit $H(\Gamma)$ un ensemble de représentants de toutes des classes de conjugaison des éléments hyperboliques (c'est-a-dire des éléments γ pour lesquels $|Tr(\gamma)| > 2$) primitifs (qui ne sont pas des puissances non triviales des autres éléments) de Γ. Les éléments de $H(\Gamma)$ sont en correspondance bijective avec les géodésiques simples, fermées et orientées de M. Soit $P(\Gamma)$ un ensemble des représentants des classes de conjugaison des sous-groupes maximaux $\Pi \subset \Gamma$ qui sont isomorphes à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et ne contiennent que des éléments paraboliques. Si M est compacte, $P(\Gamma)$ est vide et, en general, les éléments de $P(\Gamma)$ correspondent à des cusps de M. Pour $\gamma \in \Gamma$ notons Γ_γ le centralisateur de γ et, pour $\Pi \in P(\Gamma)$, Γ_Π le centralisateur (égal dans notre situation au normalisateur) de Π dans Γ. Comme conséquence de l'unicité du noyau de la chaleur

$$K_M(t, x, y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} K_{\mathbb{H}^3}(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \tag{1}$$

où on écrit $\tilde{x}$ pour n'importe quelle pré-image de x dans $\mathbb{H}^3$. Le noyau de la chaleur de l'espace hyperbolique est donné par

$$K_{\mathbb{H}_3}(z, w_1, w_2) = K_{\mathbb{H}_3}(z, d(w_1, w_2)) = \frac{e^{-z}}{(4\pi z)^{3/2}} \frac{d(w_1, w_2)}{\sinh d(w_1, w_2)} e^{-d(w_1,w_2)^2/4z}$$

où $d(w_1, w_2)$ est la distance de w_1 à w_2. La forme explicite de $K_{\mathbb{H}_3}(z, w_1, w_2)$ permet de conclure que la série dans (1) converge uniformément, ainsi que ses derivées de tous ordres, sur les parties compactes de $\mathbb{H}^3$.

On va sommer (1) en regroupant les termes selon leurs classes de conjugaison. Ainsi

$$K_M(t,x,y) = K_{\mathbb{H}_3}(t,\tilde{x},\tilde{y}) + \sum_{\Pi\in P(\Gamma)} \sum_{\gamma\in\Pi\setminus\{e\}} \sum_{\kappa\in\Gamma/\Gamma_\Pi} K_{\mathbb{H}_3}(t,\tilde{x},\kappa^{-1}\gamma\kappa\tilde{y})$$
$$+ \sum_{\gamma\in H(\Gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa\in\Gamma/\Gamma_\gamma} K_{\mathbb{H}_3}(t,\tilde{x},\kappa^{-1}\gamma^n\kappa\tilde{y}).$$

Comme la proprieté d'être hyperbolique est préservée par conjugaison, la fonction

$$\mathrm{HK}_M(t,x) = \sum_{\gamma\in H(\Gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa\in\Gamma/\Gamma_\gamma} K_{\mathbb{H}_3}(t,\tilde{x},\kappa^{-1}\gamma^n\kappa\tilde{x}) \tag{2}$$

est bien définie pour $t > 0$ et $x \in M$. De plus, la fonction $\mathrm{HTr}\, K_M(t)$ de $t \in \mathbb{R}^+$ définie par

$$\mathrm{HTr}\, K_M(t) = \int_M \mathrm{HK}_M(t,x)\, dV \tag{3}$$

est finie. On appelle $\mathrm{HTr}\, K_M(t)$ la trace hyperbolique de M et on définit la *trace régularisée* $\mathrm{STr}\, K_M(t)$ par

$$\mathrm{STr}\, K_M(t) = \mathrm{HTr}\, K_M(t) + \mathrm{vol}(M) K_{\mathbb{H}_3}(t,0).$$

En fait, si M est compacte la trace régularisée est égale à la trace de l'opérateur de la chaleur. Soit $\gamma \in H(\Gamma)$ conjugué à l'élément diagonal

$$\begin{pmatrix} e^{\ell/2}e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\ell/2}e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Alors $\ell = \ell(\gamma)$ est égal à la longueur de la géodésique fermée g dans M correspondant à γ et α est l'angle de l'holonomie autour de g. L'integrale dans (3) peut être calculée explicitement comme

$$\mathrm{HTr}\, K_M(t) = \frac{e^{-t}}{(64\pi t)^{1/2}} \sum_{\gamma\in H(\Gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{|\sinh(n\ell/2 + in\alpha/2)|^2} e^{-(n\ell)^2/4t}. \tag{4}$$

Cette formule relie la trace hyperbolique à la géométrie des tubes de M. De plus, il découle de (2) que

$$\mathrm{HTr}\, K_M(t) = \int_{C_\gamma} \left(K_{C_\gamma}(t,x,x) - K_{\mathbb{H}^3}(t,0)\right) dV.$$

Cela nous permet d'étudier de la trace hyperbolique de M en utilisant des techniques classiques comme le principe du maximum, etc.

Soit $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de variétés hyperboliques de volume fini obtenues par application de chirurgies de Dehn et approchant une variété M_0. Si $\Pi_0 \in P(\Gamma_0)$ correspond à un des cusps fermé par chirurgie de Dehn, on a $\psi^{-1}(\Pi_0) = \langle\gamma_k\rangle$ où $\ell(\gamma_k) \to 0$. Alors la géodésique associée a γ_k est une petite géodésique. On note $D(\Gamma_k) \subset H(\Gamma_k)$ l'ensemble des telles γ_k. Maintenant on peut définir la trace dégénerante comme

$$\mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t) = \frac{e^{-t}}{(64\pi t)^{1/2}} \sum_{\gamma\in D(\Gamma_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{|\sinh(n\ell/2 + in\alpha/2)|^2} e^{-(n\ell)^2/4t},$$

c'est-à-dire comme la partie de la somme dans (4) correspondant aux petites géodésiques. Les deux théorèmes suivants décrivent le comportement des traces hyperboliques pendant la dégénérescence.

THÉORÈME 1. — *Soit $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de variétés hyperboliques de dimension 3 complètes, de volume fini qui convergent vers une variété de même type M_0.*

a)

$$\lim_{k\to\infty}[\mathrm{HTr}\, K_{M_k}(t) - \mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t)] = \mathrm{HTr}\, K_{M_0}(t)$$

pour tout $t > 0$.

b) Pour chaque $\delta > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour $t < \delta$

$$\mathrm{HTr}\, K_{M_k}(t) - \mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t) = O(e^{-c/t})$$

uniformément en k.

Notre second théorème établit l'uniformité de la convergence de la différence des traces hyperboliques et les traces dégénérantes lorsque t prend des valeurs complexes.

THÉORÈME 2. — *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 0$.*

a) Pour $z = t + is$ fixé avec $t > 0$

$$\lim_{k\to\infty}[\mathrm{HTr}\, K_{M_k}(t+is) - \mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t+is)] = \mathrm{HTr}\, K_{M_0}(t+is).$$

b) Pour $t > 0$ fixé, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\left|\mathrm{HTr}\, K_{M_k}(t+is) - \mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t+is)\right| \leq L(1+|s|^{3/2})$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $k = 1, 2, 3, \ldots$

Il est utile de considérer le valeurs complexes de temps t parce que pour M compacte, si

$$N_{M,w}(T) = \sum_{\lambda \leq T}(T-\lambda)^w$$

où λ dénotent les valeurs propres du Laplacien,

$$N_{M,w}(T) = N_{M,S}((w)t^w)(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(w+1)}{z^w}\,\mathrm{STr}\, K_M(z)e^{zT}\frac{dz}{z}$$

si $\mathrm{Re}(w)$ est assez grand. On peut étudier aussi $N_M(T) = N_{M,0}(T) = \#\{\lambda \in \mathrm{Spec}_M(\Delta) \mid \lambda \leq T\}$ au moyen de la trace de la chaleur pour t complexe. Si M n'est pas compacte on remplace la trace ci-dessus par la trace régularisée.

Pour estimer la différence $\mathrm{HTr}\, K_{M_k}(t) - \mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t)$ on l'écrit comme une somme d'integrales de trace de divers noyaux de la chaleur sur des domaines qui sont soit sous-ensembles de parties épaisses de M_k, soit d'autres variétés de type standard (des cusps ou des cylindres hyperboliques). Si $\epsilon > 0$ est assez petit, $M_{k,(0,\epsilon]}$ est une réunion finie disjointe de $C_{\gamma_k,(0,\epsilon]}$ et $C_{\Pi_{k,(0,\epsilon]}}$ où $C_{\gamma_k} = \mathbb{H}^3/\langle\gamma_k\rangle$ pour $\gamma_k \in D(\Gamma_k)$ et $C_{\Pi_k} = \mathbb{H}^3/\Pi_k$ pour $\Pi_k \in P(\Gamma_k)$. Alors les composantes de $M_{k,(0,\epsilon]}$ peuvent être identifiées avec des parties de C_{γ_k}

(ou C_{Π_k}) et on peut comparer les noyaux de la chaleur de M_k avec ceux des C_{γ_k} (ou C_{Π_k}) sur le domaine commun $C_{\gamma_k,(0,\epsilon]}$ (ou $C_{\Pi_k,(0,\epsilon]}$). Cela étant, on montre que

$$\begin{aligned}
\mathrm{HTr}\, K_{M_k}(t) - \mathrm{DTr}\, K_{M_k}(t) &= \int_{M_{k,(\epsilon,\infty)}} [K_{M_k}(t,x,x) - K_{\mathbb{H}^3}(t,0)]\, dV \\
&+ \sum_{\substack{C_{\gamma_k} \\ \gamma_k \in D(\Gamma_k)}} \int_{C_{\gamma_k,(0,\epsilon]}} [K_{M_k}(t,x,x) - K_{C_{\gamma_k}}(t,x,x)]\, dV \\
&+ \sum_{\Pi_k \in P(\Gamma_k)} \int_{C_{\Pi_k,(0,\epsilon]}} [K_{M_k}(t,x,x) - K_{C_{\Pi_k}}(t,x,x)]\, dV \\
&- \sum_{\substack{C_{\gamma_k} \\ \gamma_k \in D(\Gamma_k)}} \int_{C_{\gamma_k,(\epsilon,\infty)}} [K_{C_{\gamma_k}}(t,x,x) - K_{\mathbb{H}^3}(t,0)]\, dV \\
&- \sum_{\Pi_k \in P(\Gamma_k)} \int_{C_{\Pi_k,(\epsilon,\infty)}} [K_{C_{\Pi_k}}(t,x,x) - K_{\mathbb{H}^3}(t,0)]\, dV.
\end{aligned}$$

Le premier terme ci-dessus peut être contrôlé parce que les métriques des M_k convergent vers la métrique de M_0 sur les parties épaisses. On traite les autres termes en utilisant: (i) la description explicite de la géométrie des domaines; (ii) les méthodes classiques d'analyse comme le principe du maximum, la formule de Poisson etc.

BIBLIOGRAPHIE

[DJ] J. Dodziuk et J. Jorgenson. — *Spectral asymptotics on degenerating hyperbolic 3-manifolds*, Preprint IHES, Décembre, 1995.

[G] M. Gromov. — *Hyperbolic manifolds according Thurston and Jørgensen*, Sém. Bourbaki **546** (1979), 1–14.

[JL1] J. Jorgenson et R. Lundelius. — *Convergence of the heat kernel and the resolvent kernel on degenerating hyperbolic Riemann surfaces of finite volume*, Quaestiones Mathematicae **18** (1995), 345–363.

[JL2] J. Jorgenson et R. Lundelius. — *Convergence of the normalized spectral function on degenerating hyperbolic Riemann surfaces of finite volume*, Preprint Yale University, 1994.

[JL3] J. Jorgenson et R. Lundelius. — *A regularized heat trace for hyperbolic Riemann surfaces of finite volume*, à paraître dans Journal of Geometric Analysis.

Józef DODZIUK
The GRADUATE SCHOOL and
UNIVERSITY CENTER
33 west 42 street,
NEW YORK NY 10036-8099
(USA)