Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

EUGÈNE GUTKIN

Billards en polygones et groupes fuchsiens

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 109-120
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__109_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (109–120)

BILLARDS EN POLYGONES ET GROUPES FUCHSIENS

Eugene GUTKIN

1. Introduction

Soit $P \subset \mathbf{R}^2$ un polygone, soit T^t le flot de billard dans P. Le flot T^t agit sur l'espace des phases, $Q = P \times S^1$ réduit par l'équivalence usuelle, en préservant la mesure de Lebesgue. Pour quels polygones T^t est-il ergodique? Soit $\mathcal{P}$ l'espace de polygones d'un type donné (par exemple, les polygones simples à n sommets), muni de la topologie naturelle. Alors l'ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ des polygones ergodiques est un G_δ dense ([16]). L'espace $\mathcal{P}$ a une mesure naturelle, et que l'on normalise par $\mu(\mathcal{P}) = 1$. On ne sait pas si $\mu(\mathcal{E}) > 0$, et on ne connaît pas d'exemples de polygones $P \in \mathcal{E}$, même pour le cas de triangles. D'ailleurs les billards dans les triangles rectangles T sont très intéressants. Ils correspondent au système dynamique de deux particules élastiques dans un intervalle. Les angles de T sont déterminés par le rapport m_1/m_2 des masses des particules ([5]). Le billard dans un polygone rationnel (dont les angles sont commensurables à π) n'est pas ergodique ([29]), et on connaît la décomposition de l'espace des phases en composantes ergodiques ([16]).

Un autre problème ouvert est l'existence des orbites périodiques de T^t. On ne sait pas si chaque polygone irrationnel a une orbite périodique. Les polygones rationnels en ont, et on sait beaucoup sur la statistique des orbites périodiques pour ces polygones ([18], [19]). Même pour les polygones irrationnels pour lesquels l'existence des orbites périodiques a été prouvée (triangles rectangles, parallélogrammes, etc [11]), on ne sait presque rien sur la statistique de ces orbites. Les orbites périodiques des billards polygonaux ne sont pas isolées : elles forment des *rubans* d'orbites parallèles. Toutes les orbites d'un ruban ont la même longueur. On sait que le nombre $f_P(x)$ des rubans de longueur $\leq x$ croît, quand $x \to \infty$, plus lentement que e^{hx}, pour n'importe quel $h > 0$. Cela veut dire que l'entropie topologique des billards polygonaux est nulle ([14], [7], [8]). On ne sait pas s'il y a une borne polynomiale sur $f_P(x)$ pour les polygones irrationnels. Pour les polygones rationnels H. Masur a prouvé ([18], [19]) l'existence des bornes quadratiques :

$$c_1 x^2 \leq f_P(x) \leq c_2 x^2 \qquad (1)$$

Classification math. : 30F60,30F30,58F17,11F72,22E40 pour x suffisamment grand. La nature des constantes $0 < c_1(P) \leq c_2(P) < \infty$ dans eq.(1) n'est pas claire. Pour les polygones intégrables (rectangles, triangle équilatéral, etc) on a

$$f_P(x) = cx^2 + o(x^2) \tag{2}$$

et la constante $c = c(P)$ est facile à calculer. On appelle les résultats de ce genre «les théorèmes de géodésiques primitives», et on écrit $f_P(x) \sim cx^2$. On ne sait pas si l'équation (2) est fausse pour des polygones rationnels, en général. Pour le moment, on sait que (2) est valable pour une classe remarquable des polygones rationnels : les polygones de Veech ([22], [23]).

Le but de cet exposé est de présenter les polygones de Veech et de discuter l'équation (2). Il est surtout basé sur les travaux de W. Veech ([22], [23]) et sur la recherche de l'auteur, en collaboration avec Chris Judge ([9], [10]). Pour le matériel de base on renvoie aux survols ([5], [6]) (les billards polygonaux) et à [20] (les billards généraux).

2. Surfaces de translation et groupes de Veech

À un polygone rationnel P, on associe, d'une manière canonique, une surface de Riemann compacte $R = R(P)$, munie d'une 1-forme ω différentielle holomorphe. Localement on a $\omega = dz$, où $P \subset \mathbf{C}$ et z est la variable canonique. Les zéros de ω correspondent aux sommets de P, d'angles $\pi m/n$, $m > 1$. Le genre de R ne dépend que de la topologie et des angles de P. Soit, par exemple, P un polygone simple, avec les angles $\pi m_i/n_i$, $1 \leq i \leq p$, et soit N le p.p.c.d. de m_i/n_i. Alors on a ([5]) :

$$g(R) = 1 + \frac{N}{2} \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i - 1}{n_i}. \tag{3}$$

Le billard dans P correspond au flot géodésique sur R par rapport à la métrique riemannienne $|\omega|^2$. Cette métrique est plate en dehors des points singuliers $\omega(z_i) = 0$. Au voisinage d'un tel point, R a la structure d'un cône euclidien de l'angle $2\pi m_i > 2\pi$ ([12], [13]). En dehors de l'ensemble fini $\Sigma = \Sigma(R, \omega)$ des points coniques R est une surface de translation. C'est-à-dire qu'il existe des coordonnées locales z_i, avec des fonctions de transitions de la forme $z_j = z_i + c_{ij}$.

On désigne par $\mathcal{S}_g$ l'espace des surfaces de translation de genre g. La plupart de l'analyse qui suit s'applique à des surfaces générales $R \in \mathcal{S}_g$. Les surfaces qui correspondent aux polygones rationnels forment un sous-ensemble $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{S}_g$ de codimension positive. Depuis le travail de Masur ([17]), la tradition est d'utiliser l'espace de Teichmüller pour l'étude des billards dans les polygones rationnels, c'est à dire d'employer le langage des formes quadratiques holomorphes [16], [18], [19], [22]). À mon avis, les 1-formes sont plus naturelles à utiliser. D'ailleurs, si ω est une 1-forme, alors ω^2 est une forme quadratique. Si q est une forme quadratique sur R, et $q \neq \omega^2$, alors il'y a un revêtement à deux feuillets $\phi : R_1 \to R$ tel que le «pull-back» $q_1 = \phi^* q$ sur R_1 est un carré : $q_1 = \omega_1^2$. À partir des ces remarques, on peut reformuler les résultats de Veech ([22]), par exemple, dans le langage des surfaces de translation.

On va établir la terminologie et donner des exemples. Si R est une surface de translation précompacte, alors son adhérence $\overline{R}$ est une surface de Riemann compacte dont $\Sigma = \overline{R} \setminus R$ est l'ensemble fini des points coniques. Si $\Sigma = \emptyset$, alors R est un tore plat.

Soit $Q \subset \mathbf{C}$ un polygone à $2n$ côtés. Supposons que les côtés de Q forment n couples de côtés parallèles a_i, b_i de même longueur. Quand on identifie a_i avec b_i, $1 \leq i \leq n$, enlevant les sommets de Q, on obtient une surface R de translation. Sans enlever les sommets, on obtient la surface $\overline{R}$. Donc $\overline{R} \setminus R$ est formé par les sommets de Q, après les identifications. Soient $A_1, \ldots, A_r$ les sommets de Q qui s'identifient en formant un seul point $A \in \overline{R}$. L'angle conique $\alpha(A)$ satisfait $\alpha(A) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$, où α_i est l'angle du sommet A_i. D'autre part $\alpha(A) = 2\pi m(A)$, et $m(A) \geq 1$ est un entier. Si $m(A) = 1$, alors A est, en effet, un point régulier et l'ensemble des points coniques de $\overline{R}$ est $\Sigma = \{A : m(A) > 1\}$. On a la formule $\chi(\overline{R}) = \sum_A [1 - m(A)]$ pour la caractéristique d'Euler et eq. (3) est un cas spécial de cette formule. Dans ce cas, on part d'un polygone P rationnel simple, $\alpha_i = \pi m_i / n_i$, et on obtient Q en *développant* P ([4]). Alors Q comprend $2N$ copies de P, ce qui ramène à eq.(3). On recommande au lecteur de faire les exemples suivants : 1) Q est le $2n$-gone régulier; 2) P est le m-gone régulier ([23]).

Soit R une surface de translation. Alors R est une surface plate, donc une surface affine. Soit $Aff(R)$ le groupe des difféomorphismes affines de R (préservant l'orientation) qui s'étendent à $\overline{R}$. En écrivant $\phi \in Aff(R)$ dans les coordonnées locales (x_i, y_i) on obtient une matrice $D\phi$, la différentielle de ϕ. Comme ϕ multiplie la forme symplectique $dx_i dy_i$ par $\det(D\phi)$, et $vol(\overline{R}) < \infty$ est préservé, on a $D\phi \in SL(2, \mathbf{R})$. Alors $\phi \to D\phi$ est un homomorphisme de $Aff(R)$ dans $SL(2, \mathbf{R})$. On appelle $D(Aff(R)) = \Gamma_R \subset SL(2, \mathbf{R})$ le groupe de Veech de la surface de translation [1].

PROPOSITION 1 ([22]). — *Avec les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes :*

i) Si $\Sigma \neq \emptyset$, alors le noyau de l'homomorphisme $D : Aff(R) \to SL(2, \mathbf{R})$ est fini.

ii) Le groupe $\Gamma_R \subset SL(2, \mathbf{R})$ est discret et non cocompact.

Exemple 1. Soit $\overline{R} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le tore standard, et soit $|\Sigma| = 1$. Alors, sans perdre de généralité, on peut supposer que $\Sigma = \{(0,0)\}$, et $R = \overline{R} \setminus \Sigma$ est le tore standard percé. Les éléments $\phi \in Aff(R)$ sont les automorphismes de $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ qui fixent $\{(0,0)\}$. C'est-à-dire que ϕ est une transformation linéaire de $\mathbf{R}^2$ qui préserve $\mathbf{Z}^2$. On a donc $Aff(R) = \Gamma_R = SL(2, \mathbf{Z})$.

On dit qu'un groupe discret $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})$ est cofini si $vol(SL(2, \mathbf{R})/\Gamma) < \infty$ et que Γ n'est pas cocompact. D'habitude, on passe à $PSL(2, \mathbf{R})$ qui est le groupe d'isométries du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$. Par abus de notation et de langage on ne fait pas de différence entre Γ et son image dans $PSL(2, \mathbf{R})$, qui est un groupe fuchsien. Alors Γ est cofini si et seulement si $|\mathbf{H}/\Gamma| < \infty$. Le group $SL(2, \mathbf{Z})$ est un exemple classique de groupe cofini ([3]).

1. Quand R est une surface avec une forme quadratique, $D\phi$ est défini au signe près, ce qui ramène à $\Gamma_R \subset PSL(2, \mathbf{R})$ ([22]).

Le flot géodésique d'un tore plat $\mathbf{T}^2$ correspond à la famille des flots linéaires sur $\mathbf{T}^2$. Un flot linéaire est ergodique si sa direction est irrationnelle. Si la direction est rationnelle, les orbites sont les géodésiques fermées de la même longueur. Veech ([22]) a généralisé cette dichotomie à des surfaces de translation R, telles que Γ_R soit cofini. On va les appeler les *surfaces de Veech*. Un *polygone de Veech* est un polygone P, dont la surface $R(P)$ est une surface de Veech.

3. Surfaces et polygones de Veech

Soient R une surface de translation précompacte et $\Sigma = \overline{R} \setminus R$ son ensemble singulier. La structure des translations définit une notion de direction sur le fibré tangent unitaire de R. Alors on a l'application de direction $\theta : T_1(R) \to S^1$. Comme les vecteurs v et $-v$ définissent la même géodésique, on s'intéresse plutôt à l'application $\xi : T_1(R) \to \mathbf{R}P^1 = S^1/\{\pm 1\}$, que l'on appelle encore l'application de direction.

Comme ξ est préservé par le flot géodésique, la direction d'une géodésique γ sur R est bien définie. D'ailleurs les géodésiques s'envoient dans les droites en $\mathbf{R}^2$ par l'application développante ([21]). Pour un $\xi \in \mathbf{R}P^1$ soit F_ξ le feuilletage de R par les géodésiques de direction ξ. Les feuilles de F_ξ sont parallèles : elles ne se croisent pas dans R.

Une géodésique complète γ de R peut être périodique ou infinie ou demi-finie, ou bien γ est une séparatrice. Le bout d'une géodésique demi-finie et les deux bouts d'une séparatrice sont des points coniques. Il est pratique de dire «géodésiques finies» pour les géodésiques périodiques et les séparatrices, et «géodésiques infinies» pour les autres.

Dans ce qui suit on suppose que $\Sigma(R) \neq \emptyset$, et on laisse le cas où R est un tore plat au lecteur. Une géodésique périodique γ de longueur $|\gamma|$ (on ne considère que des géodésiques primitives) définit un cylindre périodique ouvert $C \subset R$, formé des géodésiques isotopes à γ. La clôture $\overline{C} \subset \overline{R}$ est un cylindre fermé. Le bord $\partial\overline{C}$ est constitué de séparatrices. On associe à C deux nombres positifs : sa longueur $\ell(C) = |\gamma|$ et son épaisseur $w(C)$. Une direction $\xi \in \mathbf{R}P^1$ telle que toutes les feuilles de F_ξ sont finies définit une unique décomposition $\overline{R} = \cup_i \overline{C}_i^\xi$, où $1 \leq i \leq I(\xi)$ et $C_i^\xi \cap C_j^\xi = \emptyset$. Nous dirons que ξ est une direction complètement périodique.

THÉORÈME 2 ([22]). — *Soit R une surface de Veech. Soit $\xi \in \mathbf{R}P^1$ une direction. Alors on a la dichotomie : ou bien ξ est complètement périodique, ou bien F_ξ est uniquement ergodique.*

Pour une surface de Veech l'ensemble des directions complètement périodiques est justement l'ensemble des directions de séparatrices, donc un ensemble infini dénombrable. On ne sait pas si la dichotomie du théorème ci-dessus est caractéristique des surfaces de Veech. Une surface de translation peut avoir beaucoup de directions complètement périodiques sans être une surface de Veech.

Soit P un polygone arbitraire. Il n'y a pas d'application naturelle de l'espace des phases de billard de P dans $\mathbf{R}P^1$. Mais à tout $\xi \in \mathbf{R}P^1$ on associe l'ensemble des orbites de direction ξ : ce sont celles qui ont un segment parallèle à ξ. Si P est un polygone rationnel alors le flot du billard directionnel T^t_ξ est bien défini pour chaque ξ ([11]).

Corollaire 3. — *Soit P un polygone de Veech. Pour tout $\xi \in \mathbf{R}P^1$, on a la dichotomie : ou bien toutes les orbites de billard en direction ξ sont finies, ou bien T^t_ξ est uniquement ergodique.*

En particulier, l'ensemble $\mathcal{NE}_P \subset \mathbf{R}P^1$ des directions non ergodiques est dénombrable. Pour les billards rationnels, en général, la mesure (de Lebesgue) de $\mathcal{NE}_P$ est nulle ([16]), mais $\mathcal{NE}_P$ n'est pas dénombrable. D'après [4], la dichotomie du Corollaire 3 a lieu pour les polygones presque intégrables, une classe de polygones définie en [4], (voir §5 ci-dessous). Maintenant on réalise que c'est un cas spécial des polygones de Veech.

Deux groupes $\Gamma, \Gamma' \subset SL(2,\mathbf{R})$ sont commensurés si $\Gamma \cap \Gamma'$ est d'indice fini dans Γ et Γ'. Si Γ et $g\Gamma' g^{-1}$ sont commensurés pour un g quelconque, on dit que Γ et Γ' sont commensurable. Un sous-groupe $\Gamma \subset SL(2,\mathbf{R})$ est arithmétique si Γ et $SL(2,\mathbf{Z})$ sont commensurables. Les groupes arithmétiques sont cofinis.

Théorème 4 ([10]). — *Un polygone P rationnel est presque intégrable si et seulement si P est un polygone de Veech, et le groupe de Veech est arithmétique.*

Comme conséquence du Théorème 2, on obtient que les polygones et les surfaces de Veech ont une propriété remarquable : s'il y a une orbite finie de direction ξ, alors toutes les orbites de direction ξ sont finies. Cela n'est pas vrai en général. On en trouve des exemples en utilisant la connexion entre les flots directionnels sur les surfaces de translation et les echanges d'intervalles ([1], [2]).

On fixe $g > 1$ et on considère le groupe de Veech Γ_R comme une «fonction» sur l'espace $\mathcal{S}_g$ des surfaces de translation. On désigne par $\mathcal{SV}_g \subset \mathcal{S}_g$ l'ensemble des surfaces de Veech.

Théorème 5 ([9]). — *Soit $\mathcal{X}_g \subset \mathcal{S}_g$ l'ensemble des surfaces de translation dont les groupes de Veech ne sont pas triviaux. Alors $\mathcal{X}_g$ est contenu dans une union dénombrable des sous-variétés de codimension positive.*

Comme $\mathcal{SV}_g \subset \mathcal{X}_g$, le théorème ci-dessus implique que les surfaces de Veech sont rares. Soit $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{S}_g$ comme au §2, soit $\mathcal{PV}_g \subset \mathcal{P}_g$ l'ensemble des polygones de Veech. Le Théorème 5 ne donne aucune information sur la grandeur de $\mathcal{PV}_g$. Je crois quand même qu'il y a un résultat semblable au Théorème 5 pour les polygones rationnels.

L'application $v_g : R \mapsto \Gamma_R$ de l'espace $\mathcal{S}_g, g > 1$, pose beaucoup de questions ouvertes. On ne sait pas quels sous-groupes de $SL(2,\mathbf{R})$ peuvent être réalisés. Ou bien quels sous-groupes cofinis se réalisent comme Γ_R. On ne sait pas s'il y a des surfaces $R \in \mathcal{S}_g$ telles que Γ_R est un sous-groupe non élémentaire, mais pas cofini.

4. Comment chercher des surfaces et des polygones de Veech

Soit R une surface de translation précompacte, avec un ensemble $\Sigma = \overline{R} \setminus R$ des points coniques. Soit ξ la direction d'une séparatrice. Si R est une surface de Veech, alors $\overline{R}$ se décompose en cylindres périodiques $\overline{C}_i^\xi, 1 \leq i \leq I(\xi)$. On pose $\ell_i(\xi) = \ell(C_i^\xi), w_i(\xi) = w(C_i^\xi)$ et $m_i(\xi) = w_i(\xi)/\ell_i(\xi)$. Les nombres $m_i(\xi) > 0$ s'appellent les modules des cylindres périodiques et ils sont commensurables : $m_i(\xi)/m_j(\xi) \in \mathbf{Q}$ ([22]). Par conséquence, il y a un difféomorphisme $\phi_\xi \in Aff(R)$ qui préserve les cylindres $\overline{C}_i^\xi$, et tel que $g_\xi = D(\phi_\xi) \in \Gamma_R$ est une matrice parabolique. La restriction de ϕ_ξ sur chaque cylindre $\overline{C}_i^\xi$ est une puissance du «twist de Dehn» ([22]).

La réciproque est aussi valable : soient R une surface de Veech et $g \in \Gamma_R$ un élément parabolique. Soit $\xi \in \mathbf{R}P^1$ l'unique droite fixée par $g : g(\xi) = \xi$, alors ξ est la direction d'une séparatrice. Soient $\overline{R} = \cup_i \overline{C}_i^\xi$ la décomposition correspondante et g_ξ comme ci-dessus, alors $(g_\xi)^m = g^n$ $(\neq 1)$, pour certains $m, n \in \mathbf{Z}$.

Cela établit une relation entre les cylindres périodiques de R et les sous-groupes paraboliques de Γ_R. En même temps, cela donne, à peu près, un algorithme pour déterminer si une surface de translation est une surface de Veech. On commence par trouver une séparatrice de R de direction ξ. Si le feuilletage F_ξ a une feuille infinie, R n'est pas une surface de Veech. On suppose que ξ est complètement périodique. Soit $\overline{R} = \cup_i \overline{C}_i^\xi$ la décomposition de $\overline{R}$ en cylindres. On calcule les modules $m_i(\xi)$ de ces cylindres. Si les modules ne sont pas commensurables, R n'est pas une surface de Veech. Supposons que $m_i(\xi)$ sont commensurables, et posons (sans perdre la généralité) $m_1(\xi) = 1$. Soit N le p.p.c.d. des $m_i(\xi)$, et posons $N_i = N_i(\xi) = Nm_i(\xi)$. On désigne par $\tau_i = \tau_i(\xi)$ le twist de Dehn de C_i^ξ. Alors les transformations $\tau_i^{N_i}$ se collent en un difféomorphisme affine ϕ_ξ de $\overline{R}$. La matrice parabolique $g_\xi = D(\phi_\xi) \in \Gamma_R$ a ξ pour direction fixe.

Si R est une surface de Veech, il suffira de considérer un nombre fini de séparatrices telles que les matrices correspondantes engendrent un groupe cofini. C'est ainsi que Veech ([22], [23]) et Ward ([27], [28]) ont trouvé leurs exemples explicites. D'ailleurs dans ces exemples, il suffit de considérer deux directions complètement périodiques. Évidemment quand on cherche les surfaces de Veech par cet algorithme, on élimine beaucoup de candidats. C'est ainsi que l'on a trouvé des triangles qui ne sont pas des polygones de Veech ([27], [15]).

5. Exemples des polygones de Veech

1. Les exemples les plus simples de polygones de Veech sont les polygones presque intégrables ([4]). Pour simplifier l'explication, on ne considère qu'une classe particulière des polygones presque intégrables : les polygones dessinés sur le réseaux standard ([4]). Un polygone P de cette classe est pavé par n carrés unités, $n \geq 1$. Le premier cas non trivial

est le « gnomon » qui comprend trois carrés unités. On désigne par T le tore $\mathbf{R}^2/(2\mathbf{Z})^2$. C'est la surface de translation correspondant au carré unité. Alors la surface $\overline{R} = \overline{R}(P)$ d'un polygone presque intégrable est un revêtement ramifié de T, de degré n, avec un seul point de ramification, $(0,0) \in T$. Le Théorème 6 ci-dessous implique que P est un polygone de Veech dont le groupe de Veech est arithmétique. La réciproque est aussi vraie (voir Théorème 4).

2. On désigne par V_n le triangle isocèle dont l'angle de base est π/n, $n \geq 3$. Soient $R(V_n)$ la surface de translation correspondante et $\Gamma_n \subset SL(2,\mathbf{R})$ le groupe de Veech de V_n. Dans ([22]) Veech a calculé le groupe Γ_n (plus précisément l'image de Γ_n dans $PSL(2,\mathbf{R})$) pour $n > 4$. D'ailleurs V_3 et V_4 sont des triangles intégrables, et V_6 est un triangle presque intégrable.

Soit $2 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$. On désigne par $S_{p,q,r} \subset PSL(2,\mathbf{R})$ le groupe du triangle de Schwarz associé au triangle hyperbolique dont les angles sont $\pi/p, \pi/q, \pi/r$. Alors $\Gamma_n = S_{2,n,\infty}$ si $n > 4$ est impair. Si $n > 4$ est pair, Γ_n est un sous-groupe d'indice deux dans $S_{2,n,\infty}$. En particulier, si $n \neq 6$, les groupes Γ_n, $n > 4$, ne sont pas arithmétiques. En plus, pour $m \neq n$, les groupes Γ_m et Γ_n ne sont pas commensurables.

Évidemment, les triangles V_n sont des polygones de Veech pour tout $n \geq 3$.

3. On désigne par W_n le triangle dont les angles sont $\pi/2n, \pi/n, (2n-3)\pi/2n$. Soit $\Delta_n \subset SL(2,\mathbf{R})$ son groupe de Veech. Si $n \geq 4$. C. Ward a trouvé que l'image de Δ_n dans $PSL(2,\mathbf{R})$ est le groupe du triangle de Schwarz $S_{3,n,\infty}$ ([27], [28]) alors W_n est un triangle de Veech. Ward a aussi montré que les groupes Δ_m et Δ_n ne sont pas commensurables si $m \neq n$. En plus, Γ_m et Δ_n ne sont jamais commensurables.

4. Soient R_n le n-gone régulier et $G_n \subset SL(2,\mathbf{R})$ son groupe de Veech. Dans [23], Veech a calculé l'image de G_n en $PSL(2,\mathbf{R})$, que l'on désigne toujours par G_n. Le groupe G_n est un sous-groupe d'indice fini dans le groupe du triangle de Schwarz $S_{2,n,\infty}$. et l'indice $[S_{2,n,\infty} : G_n]$ est une fonction arithmétique de n ([23]).

5. Les travaux [28, 15] considèrent certaines familles de triangles et donnent des conditions suffisantes et nécessaires pour que ces triangles soient des polygones de Veech. R. Kenyon et J. Smillie ([15]) s'occupent des triangles rectangles, P. Soit $\alpha \leq \pi/4$ l'angle le plus petit de P. Alors P est un triangle de Veech si et seulement si $\alpha = \pi/n$ ([15]). Ward ([28]) considère les triangles P dont les angles sont $\pi/m, p\pi/m, q\pi/m$, où $p < q$ et $4p \leq m$. Si p ou m est impair, le triangle de Ward est un polygone de Veech si et seulement si $p = 1$, c'est-à-dire $P = V_m$ (voir exemple 2).

En particulier, les résultats de [15], [27], [28] produisent des exemples de triangles qui ne sont pas des polygones de Veech.

6. Y. Vorobets a annoncé plusieurs théorèmes sur les surfaces et polygones de Veech ([26]). Quelques-uns de ses résultats étaient déjà connus. Par exemple, il a annoncé que les triangles avec les angles $\pi/2n, \pi/n, (2n-3)\pi/2n$ sont des polygones de Veech, un des résultats de [28]. Aussi, Vorobets a annoncé que le $(\pi/3, \pi/4, 5\pi/12)$-triangle et le

$(\pi/3, \pi/5, 7\pi/15)$-triangle sont des polygones de Veech. Cela paraît nouveau. Par contre, Vorobets n'identifie pas les groupes de Veech de ses triangles.

6. Les séries d'Eisenstein et les théorèmes de géodésiques primitives

On s'intéresse à l'asymptotique de la fonction $f_P(x)$, où P est un polygone rationnel. Soient $R = R(P)$ la surface de translation correspondante et $f_R(x)$ la fonction de comptage des cylindres géodésiques sur R. Alors $f_P(x)$ est à peu près le même que $f_R(x)$, et il suffit d'obtenir l'asymptotique de $f_R(x)$.

Exemple 2. Soit P le carré unité. Alors R est le tore plat $\mathbf{R}^2/(2\mathbf{Z})^2$, homothétique au tore standard $T = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. On a $f_R(x) = f_T(x/2)$, et il suffit de travailler avec $f_T(x)$.

Les (familles de) géodésiques périodiques primitives de T correspondent aux points $\{p, q\} \in \mathbf{Z}^2$ tels que $(p, q) = 1$. Ce sont les points primitifs de $\mathbf{Z}^2$, et on désigne leur ensemble par $\mathbf{Z}^2_{prim}$. Alors $f_T(x) = |\mathbf{Z}^2_{prim} \cap D(x)|$, où $D(x)$ est le disque de rayon x centré à l'origine.

Il est classique que $|\mathbf{Z}^2 \cap D(x)| \sim \pi x^2$ et il est élémentaire de vérifier que $|\mathbf{Z}^2_{prim} \cap D(x)| \sim cx^2$, où $\pi = c\zeta(2)$. Comme $\zeta(2) = \pi^2/6$, on a

$$f_T(x) \sim \frac{6}{\pi} x^2. \tag{4}$$

Notre analyse s'applique aux polygones P tels que $R(P)$ est un tore plat, c'est-à-dire aux polygones intégrables. Ce sont justement les polygones qui pavent $\mathbf{R}^2$ par réflexions et leur liste est très courte ([5]). La même analyse asymptotique de f_T est valable pour le tore plat général. Pour étudier l'asymptotique de $f_R(x)$, où R est une surface de translation, $g(R) > 1$, Veech a introduit une fonction zêta ([22]) :

$$\zeta_R(s) = \sum_C \ell(C)^{-s}. \tag{5}$$

La somme est sur tout les cylindres périodiques de R. La fonction ζ_R est bien définie si $\Re(s)$ est suffisamment grand. Quand R est une surface de Veech, ζ_R s'exprime explicitement en termes des séries d'Eisenstein de la surface de Riemann $\mathbf{H}/\Gamma_R$ ([22]). La théorie standard des séries d'Eisenstein s'applique ([25]), et on obtient l'asymptotique quadratique : $f_R(x) \sim cx^2$. Plus précisément on a

$$f_R(x) \sim \frac{c(R)}{|R|} x^2 \tag{6}$$

où $|R|$ est le volume euclidien de R, et $c(R)$ dépend du volume hyperbolique $|\mathbf{H}/\Gamma_R|$. Cependant, l'expression pour $c(R)$ dépend des choix de «directions de référence» pour les pointes de Γ_R qui sont plutôt arbitraires ([22]). Par conséquence, on n'obtient pas une expression intrinsèque pour la constante $c(R)$ dans eq. (6) pour une surface de Veech générale ([22]).

D'ailleurs, on peut étudier la fonction $f_R(x)$ d'une façon élémentaire. Soit $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})$ un sous-groupe cofini, soit $v_0 \in \mathbf{R}^2$ un vecteur dont le stabilisateur dans Γ est un sous-groupe parabolique. On désigne par u_0 la pointe correspondante de $\mathbf{H}/\Gamma$. Alors l'ensemble $\Gamma v_0 \subset \mathbf{R}^2$ est discret, et la cardinalité $|\Gamma v_0 \cap D(x)|$ a une asymptotique quadratique. Plus précisément, on a ([10]) :

$$|\Gamma v_0 \cap D(x)| \sim \frac{|u_0|}{|\mathbf{H}/\Gamma| \|v_0\|^2} x^2, \tag{7}$$

où $|u_0|$ est «l'épaisseur» de la pointe u_0, et $|\mathbf{H}/\Gamma|$ est le volume hyperbolique. On applique eq. (7) à une surface de Veech R quand $\Gamma = \Gamma_R$ et u_0 parcourt les pointes de Γ_R. On obtient une expression intrinsèque pour $c(R)$ qui ne dépend essentiellement que du volume et des épaisseurs de pointes de $\mathbf{H}/\Gamma_R$ ([10]).

7. Revêtements ramifiés et nouveaux exemples de polygones de Veech

Dans ce qui suit on ne considère que des surfaces connexes, orientées, et des applications différentiables, préservant l'orientation. Soient R et S des surfaces de translation et $\phi : R \to S$ un difféomorphisme local. On dit que ϕ est une application affine si elle est localement linéaire dans les coordonnées locales. Si, en plus, ϕ est un revêtement topologique, on dit que ϕ est un revêtement affine.

On ne considère que des revêtements affines $\phi : R \to S$ qui se prolongent (uniquement) à des revêtement ramifiés $\overline{\phi} : \overline{R} \to \overline{S}$. Ce sont des objets principaux de cette section. On va les appeler tantôt revêtements ramifiés, tantôt revêtements affines, tantôt revêtements tout court.

La différentielle d'un revêtement $\phi : R \to S$ est une matrice $D\phi \in GL_+(2, \mathbf{R})$. Quand $D\phi = 1$, on dit que ϕ est un revêtement de translation. On peut toujours se ramener à ce cas particulier par une change affine de la structure de translation.

Théorème 6 ([9], [10]). — *Soit $\phi : R \to S$ un revêtement fini de surfaces de translation précompactes. Alors les groupes de Veech Γ_R et Γ_S sont commensurables.*

On va utiliser ce résultat pour construire de nouveaux exemples des polygones de Veech. Soient S_1, S_2 deux surfaces de translation. On dit que S_1 et S_2 sont *très proches* s'il y a une surface de translation R et des revêtements finis $p_i : S_i \to R$ ou $q_i : R \to S_i$, pour $i = 1, 2$. La relation d'être très proche n'est pas forcément transitive. On dit «*proche*» pour la relation d'équivalence correspondante, et on la désigne par $S_1 \sim S_2$. Les corollaires ci-dessous suivent immédiatement du Théorème 6.

Corollaire 7 ([10]). — *Soient S_1, S_2 des surfaces de translation et Γ_1, Γ_2 leurs groupes de Veech. Si S_1 et S_2 sont proches, alors Γ_1 et Γ_2 sont commensurables.*

COROLLAIRE 8 ([10]). — *Soient $S_1 \sim S_2$ des surfaces de translation. Alors S_1 est une surface de Veech si et seulement si S_2 est une surface de Veech.*

Pour appliquer ces résultats aux polygones, on introduit la notion du pavage par réflexions. On dit qu'un polygone Q est ***pavé*** par un polygone P (par réflexions) si $Q = \cup P_i$, $1 \leq i \leq N$, où P_i sont des copies isométriques de P, et si les conditions évidentes sont vérifiées.

On impose une condition de plus, qui n'est pas tout à fait évidente. Si P_i et P_j ont un côté commun, on désigne par $\sigma_{i,j}$ la réflexion par rapport à ce côté, et on dit que P_i et P_j sont voisins. Soient $P_1, \ldots, P_k, P_{k+1} = P_1$ une suite des polygones voisins du pavage. Alors $\sigma_{k+1,k}\sigma_{k,k-1} \cdots \sigma_{2,1} P_1 = P_1$. On suppose que $\sigma_{k+1,k}\sigma_{k,k-1} \cdots \sigma_{2,1} = id$.

Par exemple, le triangle isocèle avec l'angle de base α est pavé par le triangle rectangle avec l'angle α. Le «gnomon» de l'exemple 1 de §5 est pavé par le carré unité (trois copies).

On dit que deux polygones P_1 et P_2 sont très proches s'il y un polygone Q tel que, soit P_1 et P_2 sont pavés par Q, soit Q est pavé par P_1 et par P_2. On appelle «proche» la relation d'équivalence engendrée et on la désigne par $P_1 \sim P_2$.

THÉORÈME 9 ([10]). — *Soient P_1, P_2 deux polygones proches et Γ_1, Γ_2 leurs groupes de Veech.*

1. Alors P_1 est un polygone de Veech si et seulement si P_2 est un polygone de Veech.

2. Supposons que P_1 est un polygone de Veech. Alors Γ_1 et Γ_2 sont des groupes cofinis commensurés.

Exemple 3. Le n-gone régulier R_n et le triangle isocèle V_n (voir exemple 2 de §5) sont très proches. Soient G_n et Γ_n les groupes de Veech correspondants. Par [22], Γ_n est essentiellement le groupe $S_{2,n,\infty}$. Par le Théorème 9, R_n est un polygone de Veech et G_n est commensuré avec $S_{2,n,\infty}$. Çeci fait une preuve simple d'un des résultats de [23].

On utilise le Théorème 9 pour obtenir des nouveaux exemples de polygones de Veech. Soient, par exemple, P un polygone de Veech convexe et c un côté de P. Soit σ_c la réflexion par rapport à c. Alors $Q_c = P \cup \sigma_c(P)$ est un polygone de Veech. En modifiant cette construction, on obtient d'autres polygones Q, pavés par P. D'après le Théorème 9, ils sont tous des polygones de Veech dont les groupes de Veech sont commensurés avec Γ_P.

Soit, par exemple, P le triangle rectangle avec l'angle π/n. Alors on obtient comme Q_c deux triangles isocèles, avec les angles de base π/n et $\pi/2 - \pi/n$, et un quadrilatère avec les angles $\pi/2, 2\pi/n, \pi/2, \pi - 2\pi/n$. En réfléchissant P autour du sommet d'angle π/n on obtient le n-gone régulier et d'autres polygones. Par exemple, on obtient un quadrilatère avec les angles $3\pi/n, \pi/2 - \pi/n, \pi - 2\pi/n, \pi/2$. En réfléchissant P autour du sommet d'angle $\pi/2$ on obtient le rhombe d'angle $2\pi/n$.

Soit P un des triangles de Vorobets, celui avec les angles $\pi/3, \pi/4, 5\pi/12$. Alors on obtient comme Q_c trois quadrilatères différents. En réfléchissant P autour du sommet d'angle $\pi/4$, on obtient un octogone dont les quatre angles sont $2\pi/3$, et les autres quatre angles sont $10\pi/12$. On laisse le lecteur construire ainsi d'autres exemples de polygones de Veech.

D'autre part, le Théorème 9 nous permet d'obtenir de nouveaux exemples de polygones qui ne sont pas de Veech. Par exemple, le rhombe Q d'angle $\alpha \neq 2\pi/n$ n'est pas un polygone de Veech. En effet, Q est pavé par le triangle rectangle, P, d'angle $\alpha/2$. Si Q était un polygone de Veech, alors P le serait aussi (Théorème 9), mais ce n'est pas le cas [15].

Je remercie H. Pesce et F. Bonahon pour leur assistance linguistique.

Références

[1] P. ARNOUX, *Ergodicité générique des billards polygonaux*, Séminaire Bourbaki, 696 (1988), 203–221.

[2] P. ARNOUX, *Echanges d'intervalles et flots sur les surfaces*, Enseignement Mathématique, Monographie 29 (1981), 5–38.

[3] A. BEARDON, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] E. GUTKIN, *Billiard flows on almost integrable polyhedral surfaces*, Ergod. Theor. & Dyn. Sys. 4 (1984), 569–584.

[5] E. GUTKIN, *Billiards in polygons*, Physica 19 D (1986), 311–333.

[6] E. GUTKIN, *Billiards in polygons: survey of recent results*, J. Stat. Phys. 83 (1996), 7–26.

[7] E. GUTKIN and N. HAYDN, *Topological entropy of generalized polygon exchanges*, Bull. AMS 32 (1995), 50–57.

[8] E. GUTKIN and N. HAYDN, *Topological entropy of polygon exchange transformations and polygonal billiards*, Ergod. Theor. & Dyn. Sys., sous presse.

[9] E. GUTKIN and C. JUDGE, *The geometry and arithmetic of translation surfaces, with applications to polygonal billiards*, Math. Res. Lett. 3 (1996), 391–403.

[10] E. GUTKIN and C. JUDGE, *Affine coverings of translation surfaces, billiards, and arithmetic lattices*, prépublication, 1996.

[11] E. GUTKIN and S. TROUBETZKOY, *Directional flows and strong recurrence for polygonal billiards*, Pittman Res. Notes in Math., sous presse.

[12] C. JUDGE, *On the existence of Maas cusp forms on hyperbolic surfaces with cone points*, Journal of the A.M.S. 8 (1995), 715–759.

[13] C. JUDGE, *On the angular moduli of constant curvature surfaces with conic singularities*, prépublication, 1995.

[14] A. KATOK, *The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Comm. Math. Phys. 111 (1987), 151–160.

[15] R. KENYON and J. SMILLIE, *Billiards in rational-angled triangles*, prépublication, 1996.

[16] S. KERCKHOFF, H. MASUR, and J. SMILLIE, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, Ann. Math. 124 (1986), 293 – 311.

[17] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math. 115 (1982), 169–200.

[18] H. Masur, *Lower bounds for the number of saddle connections, and closed trajectories of a quadratic differential*, MSRI Publ. vol. 10 (1988), 215–228.

[19] H. Masur, *The growth rate of trajectories of a quadratic differential*, Ergod. Theor. & Dyn. Sys. 10 (1990), 151–176.

[20] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panoramas et Synthèses, n.1, Soc. Math. France, 1995.

[21] W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Princeton Lecture Notes, 1978.

[22] W. A. Veech, *Teichmuller curves in modular space, Eisenstein series, and an application to triangular billiards*, Inv. Math. 97 (1989), 553–583.

[23] W. Veech, *The billiard in the regular polygon*, Geom. and Func. Analysis 2 (1992), 341–379.

[24] W. A. Veech, *Flat surfaces*, Amer. J. Math. 15 (1993), 589–689.

[25] A. B. Venkov, *The spectral theory of automorphic functions*, Kluwer, Amsterdam, 1990.

[26] Y. Vorobets, *Structures plates et billards dans les polygones rationnels*, Uspekhi Mat. Nauk 51 (1996), 145–146 (en russe).

[27] C. Ward, *Fuchsian groups and polygonal billiards*, Ph. D. Dissertation, Rice University, 1996.

[28] C. Ward, *Calculation of Fuchsian groups associated to rational triangles*, preprint, Rice University, 1996.

[29] A. Zemlyakov and A. Katok, *Topological transitivity of billiards in polygons*, Math. Notes 18 (1976), 760–764.

Eugene GUTKIN
Department of Mathematics
University of Southern California
University Park-MC 1113
LOS ANGELES CA, 90089-1113