Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Théorèmes de Courant et de Cheng combinatoires

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 9-13
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (9–13)

THÉORÈMES DE COURANT ET DE CHENG COMBINATOIRES

Yves COLIN DE VERDIÈRE

1. Laplaciens subordonnés à un graphe.

$\Gamma = (V, E)$ est un graphe fini, non orienté, sans boucles, ni arêtes multiples. On considère l'espace de Hilbert $\mathbb{R}^V$ muni de la structure hilbertienne canonique. On désigne par O_Γ l'ensemble des opérateurs symétriques réels A sur $\mathbb{R}^V$ de matrice $A = (a_{i,j})$ tels que :

$$a_{i,j} \begin{cases} < 0, & \text{si } (i,j) \in E; \\ = 0, & \text{si } (i,j) \notin E \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

O_Γ est un cône de dimension $\#V + \#E$. On dira aussi parfois que $A \in O_\Gamma$ est un opérateur de Schrödinger sur Γ.

2. Théorème de Courant.

Le théorème de Courant classique ([Courant-Hilbert]) pour les modes propres du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord dans un domaine borné D connexe de $\mathbb{R}^n$ est le suivant : si $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ est le spectre du problème de Dirichlet dans D, si φ est une fonction propre non identiquement nulle de valeur propre λ_k, le nombre de composantes connexes de $D \setminus \varphi^{-1}(0)$ est $\leq k$. Sa preuve nécessite de savoir que les zéros des fonctions propres ne sont pas trop *sauvages*, en particulier ils sont d'ordre finis.

Il faut être un peu soigneux pour généraliser ceci aux graphes.

THÉORÈME 1 (Perron-Frobenius). — *Si Γ est connexe et $A \in O_\Gamma$, $\lambda_1(A)$ est de multiplicité 1 et l'espace propre est engendré par une fonction strictement positive en tout sommet.*

Classification math. : 05C50.

THÉORÈME 2. — *Supposons toujours* Γ *connexe et soit* $\varphi \in E_k = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k \mathrm{Id}) \setminus 0$, $V_+ = \{i \in V | \varphi(i) > 0\}$, $V_- = \{i \in V | \varphi(i) < 0\}$ *et* $V_o = \{i \in V | \varphi(i) = 0\}$. *Si* $n_\pm$ *est le nombre de composantes connexes de* $V_\pm \cup V_o$, *alors* $n_+ + n_- \leq k$.

Remarque. — La généralisation plus naturelle du théorème de Courant comme majoration du nombre de composantes connexes de l'ensemble où $\varphi \neq 0$ est fausse, comme le montre l'exemple du graphe formé d'une étoile avec beaucoup de branches, avec le laplacien canonique : l'espace propre E_{λ_2} est alors formé des fonctions qui s'annulent au centre et dont la somme des valeurs aux sommets est 0.

Preuve du théorème 1. — Soit $\varphi \in E_1$ de norme 1. Alors $q_A(|\varphi|) \leq q_A(\varphi)$, alors que la norme est conservée. On en déduit que $\eta = |\varphi| \in E_1$. Soit $i \in V$ tel que $\eta(i) = 0$ et qu'il existe j voisin de i avec $\eta(j) > 0$. Soit $\eta_\varepsilon = \eta + \varepsilon\delta(i)$. On a :

$$\|\eta_\varepsilon\| = 1 + O(\varepsilon^2) ,$$

alors que

$$q_A(\eta_\varepsilon) = q_A(\eta) - a\varepsilon + O(\varepsilon^2) ,$$

avec $a > 0$. On en déduit une contradiction par la caractérisation variationnelle du λ_1.

Preuve du théorème 2.

1ère étape : on considère le cas où aucune arête ne joint V_+ à V_- et V_o est formé de sommets de degré 2 au voisinage desquels φ ne s'annule pas. Dans ce cas $n_+ + n_-$ est le nombre total de composantes de $V_+ \cup V_-$. La preuve suit alors la preuve classique : par l'absurde, si $N = n_+ + n_- > k$, soit $V_+ \cup V_- = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$ et ψ_i la fonction qui vaut φ sur Ω_i et 0 ailleurs. Soit F l'espace vectoriel engendré par les ψ_i, le quotient de Rayleigh est identiquement égal à λ_k sur F et il existe donc une fonction $\psi \in F \setminus 0$ orthogonale à $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$. Cette fonction est donc fonction propre pour λ_k. Soit Ω l'ensemble des zéros de ψ. Ω est une réunion d'Ω_i et de V_o. Soit j un sommet de V_o dont un voisin est dans Ω et l'autre pas : on voit facilement que c'est impossible pour ψ fonction propre.

2ème étape : on suppose maintenant que $\varphi \in E_k \setminus 0$ est générique, c'est-à-dire que $V_o = \emptyset$. On peut bien sûr supposer $\lambda_k = 0$. On construit un nouveau graphe $\widetilde{\Gamma}$ en ajoutant à Γ un sommet au milieu de chaque arête où φ change de signe. On étend alors φ en $\widetilde{\varphi}$ en lui donnant la valeur 0 aux nouveaux sommets. On définit un nouvel opérateur $\widetilde{A} \in O_{\widetilde{\Gamma}}$ dont $\widetilde{\varphi}$ est encore vecteur propre pour une valeur propre $\widetilde{\lambda}_l = 0$ avec $l \leq k$. On pourra ainsi appliquer la 1ère étape.

On définit $\widetilde{A}$ par la forme quadratique associée $\widetilde{q}$ qui est obtenue de la façon suivante : soit q_o la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{\widetilde{V}}$ obtenue en composant q avec le plongement évident (prolonger par 0) de $\mathbb{R}^V$ dans $\mathbb{R}^{\widetilde{V}}$. Le spectre de q_o est celui de q augmenté de la valeur propre 0 répétée $l = \#\widetilde{V} - \#V$ fois. On remplace alors dans q_o les termes $c(x_i - x_j)^2$ où (i, j) est une arête de Γ où φ changeait de signe par $c_{i,\alpha}(x_i - x_\alpha)^2 + c_{j,\alpha}(x_j - x_\alpha)^2$ où α est le nouveau sommet inséré entre i et j, avec les relations suivantes où $\varphi(i) = a$, $\varphi(j) = b$:

$$c_{i,\alpha}a = c(a - b),\ c_{j,\alpha}b = c(b - a),\ c_{i,\alpha}a + c_{j,\alpha}b = 0 .$$

On vérifie facilement que $\widetilde{q} \geq q_o$, que $\widetilde{q} \in O_{\widetilde{\Gamma}}$ et que $\widetilde{\varphi}$ est dans le noyau de $\widetilde{q}$. De plus, par le minimax, il est clair que 0 est valeur propre d'ordre $l \leq k$ de $\widetilde{q}$.

3ème étape : on traite maintenant le cas général. On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets où φ s'annule.

Supposons que $\varphi(0) = 0$. On peut supposer $W_o = 0$ et $\sum c_{i,0} = 1$. On pose $c_i = c_{i,0}$ et $Q(x) = \sum_{i\neq 0} W_i x_i^2 + \sum_{i,j\neq 0} c_{i,j}(x_i - x_j)^2$. Soit $L(x_i) = \sum_i c_i x_i$.

On fabrique un nouveau graphe $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ ainsi :

$$V_1 = V \setminus 0\,,$$

E_1 est obtenu en supprimant les arêtes $\{i, 0\}$ et en rajoutant une arête $\{i, j\}$ entre 2 sommets i, j qui sont tous 2 voisins de 0 dans Γ.

On définit une forme quadratique q_1 sur $\mathbb{R}^{V_1}$ par

$$q_1(y) = \sum c_i(y_i - L(y))^2 + Q(y) = \sum c_i y_i^2 - L(y)^2 + Q(y)\,.$$

Alors, il est clair que $q_1 \in O_{\Gamma_1}$ et on note A_1 l'opérateur associé.

On va montrer que :

(i) Si φ_1 est la restriction de φ à V_1, $A_1\varphi_1 = \lambda_k \varphi_1$,

(ii) Les valeurs propres λ_l^1 de A_1 vérifient $\forall 1 \leq l \leq N-1$, $\lambda_l^1 \geq \lambda_l$.

Le (i) résulte trivialement de la nullité de L sur φ. Le (ii) résulte du minimax, car on a :

$$\frac{q_1(y)}{\|y\|^2} \geq \frac{q_1(y)}{\|y\|^2 + L(y)^2} = \frac{q(y, L(y))}{\|(y, L(y))\|^2}\,,$$

et donc les valeurs propres de A_1 sont plus grandes que celles de la restriction de q à un sous-espace de $\mathbb{R}^V$ et donc a fortiori à celles de A.

On conclut alors comme dans la deuxième étape. □

Dans [H-L-S], les auteurs donnent une variante intéressante du principe de Courant pour λ_2 :

THÉORÈME 3 [H-L-S]. — *Supposons toujours Γ connexe et soit $\varphi \in E_2 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 \mathrm{Id}) \setminus 0$, $V_+ = \{i \in V | \varphi(i) > 0\}$, $V_- = \{i \in V | \varphi(i) < 0\}$, supposons que $V_+ \cup V_- = \mathrm{Supp}(\varphi)$ soit minimal pour l'inclusion parmi les $\varphi \in E_2$. Alors V_+ et V_- sont connexes. En particulier c'est toujours le cas si $\dim(E_2) = 1$, c'est-à-dire si la valeur propre est non dégénérée.*

Preuve. — Soit A_1, A_2 2 composantes de V_+. Soit φ_i les restrictions de φ à A_i étendues par 0 à l'extérieur de A_i. Il existe $\psi = \sum_{i=1}^2 x_i\varphi_i$ non nulle orthogonale à l'espace propre E_{λ_1}. Il est facile de vérifier (en supposant pour simplifier $\lambda_2 = 0$) que le quotient de Rayleigh de ψ est ≤ 0, on a en effet :

$$q(\psi) = x_1^2 < A\varphi_1|\varphi_1 > + x_2^2 < A\varphi_2|\varphi_2 >$$

car $A\varphi_1$ est nulle là où φ_2 est non nulle. Puis

$$< A\varphi_1|\varphi_1 > = < A(\varphi_1 - \varphi)|\varphi_1 > + < A\varphi|\varphi_1 >$$

et le dernier terme est nul alors que le premier est ≤ 0, la somme portant sur les sommets de A_1 pour les voisins desquels $\varphi_1 - \varphi \geq 0$. Le même raisonnement s'applique à φ_2. Et donc $\psi \in E_2$: son support est strictement inclus dans celui de φ, d'où la conclusion. □

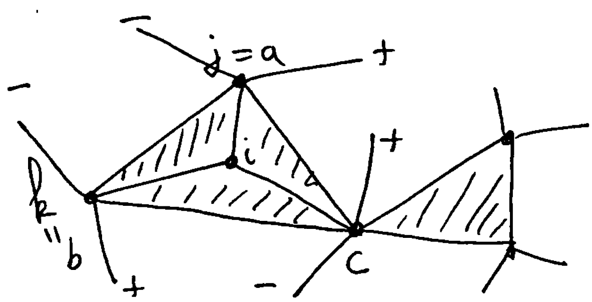
3. Multiplicités des valeurs propres sur un graphe.

3.1. Le théorème de Cheng combinatoire.

Dans [H-L-S], est prouvée la variante combinatoire suivante du théorème de Cheng :

THÉORÈME. — *Soit Γ le 1-squelette d'une triangulation de S^2 ou d'un domaine à bord de S^2, alors si $A \in O_\Gamma$, la multiplicité de la seconde valeur propre de A est ≤ 3.*

Preuve. — Soit i, j, k 3 sommets d'un triangle de cette triangulation, il existe $\varphi \in F\backslash 0$, telle que $\varphi(i) = \varphi(j) = \varphi(k) = 0$. On peut supposer que φ est de support minimal et donc vérifie le théorème de Courant habituel (th3 de § 2). On étend φ comme fonction affine sur chaque simplexe à partie de ses valeurs aux sommets.



La région V et 3 sommets du bord joints à $V_\pm$

On considère l'ouvert Ω de S^2 qui est le complémentaire du support fermé de φ. Soit V la composante connexe de (i, j, k) dans Ω. Soit a, b, c 3 sommets (il y en a au moins 3 à cause de la 3-connexité !!) de la frontière de V : chacun de ces sommets $(\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0)$ est connecté à un sommet où $\varphi > 0$ et à un sommet où $\varphi < 0$: la connexité des ensembles $V_+ = \{\varphi > 0\}$ et $V_-\{\varphi < 0\}$ est alors impossible d'après le théorème de Jordan.

3.2. $\mu(\Gamma) \leq 3$ équivaut à Γ planaire.

On a le

THÉORÈME [CV1]. — $\mu(\Gamma) \leq 3$ *si et seulement si Γ est planaire.*

Une des implication résulte du théorème de Kuratowski [Ku] : un graphe non planaire contient un mineur isomorphe à l'un des 2 graphes dits de Kuratowski, le graphe K_5 complet à 5 sommets et le graphe $K_{3,3}$ bipartite complet à 2×3 sommets. On vérifie facilement que $\mu(K_5) = \mu(K_{3,3}) = 4$. On applique alors le théorème de monotonie de μ par rapport à l'opération de mineur.

Je connais 4 preuves différentes de l'autre implication : les 2 premières sont purement combinatoires et données dans [B-CV] et [H-L-S], les 2 autres s'appuient sur des approximations du spectre d'opérateurs de Schrödinger par des laplaciens sur des graphes : on utilise soit l'approximation semi-classique de l'effet tunnel étudiées par Helffer-Sjöstrand, soit l'étude asymptotique du spectre de voisinages tubulaires du graphe plongé ([CV2]).

Donnons par exemple une preuve inspirée de [H-L-S].

Soit Γ planaire avec $\mu(\Gamma) \geq 4$, on peut considérer Γ comme un mineur d'une triangulation de S^2 : on prend une triangulation assez fine de S^2 pour que Γ se trace comme une ligne polygonale sur le 1-squelette Γ_1 de la triangulation. On applique à nouveau la monotonie de μ qui donne $\mu(\Gamma_1) \geq 4$, puis Cheng combinatoire appliqué à Γ_1 donne une contradiction.

Références

[B-CV] R. BACHER, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicités des valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes*, Bull. Soc. Math. F. (à paraitre), 1995.

[CG] S.Y. CHENG. — *Eigenfonctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 43-55.

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Journal of Comb. Theory B **50** (1990), 11-21.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicités de valeurs propres : laplaciens discrets et continus*, Rendiconti di Matematica **VII, 13** (1993), 433-460.

[C-H] COURANT-HILBERT. — *Methods of mathematical physics,*.

[H-L-S] H. VAN DER HOLST, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER. — *Clique minors, graph connectivity and Colin de Verdière's invariant*, preprint (1994), 1-11.

[K] K. KURATOWSKI. — *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. **15** (1930), 271-283.

Yvex COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr