

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

**Théorèmes de Courant et de Cheng combinatoires**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 13 (1994-1995), p. 9-13

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1994-1995\\_\\_13\\_\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__9_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## THÉORÈMES DE COURANT ET DE CHENG COMBINATOIRES

Yves COLIN DE VERDIÈRE

### 1. Laplaciens subordonnés à un graphe.

$\Gamma = (V, E)$  est un graphe fini, non orienté, sans boucles, ni arêtes multiples. On considère l'espace de Hilbert  $\mathbb{R}^V$  muni de la structure hilbertienne canonique. On désigne par  $O_\Gamma$  l'ensemble des opérateurs symétriques réels  $A$  sur  $\mathbb{R}^V$  de matrice  $A = (a_{i,j})$  tels que :

$$a_{i,j} \begin{cases} < 0, & \text{si } (i, j) \in E; \\ = 0, & \text{si } (i, j) \notin E \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

$O_\Gamma$  est un cône de dimension  $\#V + \#E$ . On dira aussi parfois que  $A \in O_\Gamma$  est un opérateur de Schrödinger sur  $\Gamma$ .

### 2. Théorème de Courant.

Le théorème de Courant classique ([Courant-Hilbert]) pour les modes propres du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord dans un domaine borné  $D$  connexe de  $\mathbb{R}^n$  est le suivant : si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$  est le spectre du problème de Dirichlet dans  $D$ , si  $\varphi$  est une fonction propre non identiquement nulle de valeur propre  $\lambda_k$ , le nombre de composantes connexes de  $D \setminus \varphi^{-1}(0)$  est  $\leq k$ . Sa preuve nécessite de savoir que les zéros des fonctions propres ne sont pas trop *sauvages*, en particulier ils sont d'ordre finis.

Il faut être un peu soigneux pour généraliser ceci aux graphes.

**THÉORÈME 1 (Perron-Frobenius).** — *Si  $\Gamma$  est connexe et  $A \in O_\Gamma$ ,  $\lambda_1(A)$  est de multiplicité 1 et l'espace propre est engendré par une fonction strictement positive en tout sommet.*

**THÉORÈME 2.** — Supposons toujours  $\Gamma$  connexe et soit  $\varphi \in E_k = \text{Ker}(A - \lambda_k \text{Id}) \setminus 0$ ,  $V_+ = \{i \in V | \varphi(i) > 0\}$ ,  $V_- = \{i \in V | \varphi(i) < 0\}$  et  $V_o = \{i \in V | \varphi(i) = 0\}$ . Si  $n_{\pm}$  est le nombre de composantes connexes de  $V_{\pm} \cup V_o$ , alors  $n_+ + n_- \leq k$ .

*Remarque.* — La généralisation plus naturelle du théorème de Courant comme majoration du nombre de composantes connexes de l'ensemble où  $\varphi \neq 0$  est fausse, comme le montre l'exemple du graphe formé d'une étoile avec beaucoup de branches, avec le laplacien canonique : l'espace propre  $E_{\lambda_2}$  est alors formé des fonctions qui s'annulent au centre et dont la somme des valeurs aux sommets est 0.

*Preuve du théorème 1.* — Soit  $\varphi \in E_1$  de norme 1. Alors  $q_A(|\varphi|) \leq q_A(\varphi)$ , alors que la norme est conservée. On en déduit que  $\eta = |\varphi| \in E_1$ . Soit  $i \in V$  tel que  $\eta(i) = 0$  et qu'il existe  $j$  voisin de  $i$  avec  $\eta(j) > 0$ . Soit  $\eta_{\varepsilon} = \eta + \varepsilon \delta(i)$ . On a :

$$\|\eta_{\varepsilon}\| = 1 + O(\varepsilon^2),$$

alors que

$$q_A(\eta_{\varepsilon}) = q_A(\eta) - a\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

avec  $a > 0$ . On en déduit une contradiction par la caractérisation variationnelle du  $\lambda_1$ .

*Preuve du théorème 2.*

*1ère étape :* on considère le cas où aucune arête ne joint  $V_+$  à  $V_-$  et  $V_o$  est formé de sommets de degré 2 au voisinage desquels  $\varphi$  ne s'annule pas. Dans ce cas  $n_+ + n_-$  est le nombre total de composantes de  $V_+ \cup V_-$ . La preuve suit alors la preuve classique : par l'absurde, si  $N = n_+ + n_- > k$ , soit  $V_+ \cup V_- = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$  et  $\psi_i$  la fonction qui vaut  $\varphi$  sur  $\Omega_i$  et 0 ailleurs. Soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par les  $\psi_i$ , le quotient de Rayleigh est identiquement égal à  $\lambda_k$  sur  $F$  et il existe donc une fonction  $\psi \in F \setminus 0$  orthogonale à  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ . Cette fonction est donc fonction propre pour  $\lambda_k$ . Soit  $\Omega$  l'ensemble des zéros de  $\psi$ .  $\Omega$  est une réunion d' $\Omega_i$  et de  $V_o$ . Soit  $j$  un sommet de  $V_o$  dont un voisin est dans  $\Omega$  et l'autre pas : on voit facilement que c'est impossible pour  $\psi$  fonction propre.

*2ème étape :* on suppose maintenant que  $\varphi \in E_k \setminus 0$  est générique, c'est-à-dire que  $V_o = \emptyset$ . On peut bien sûr supposer  $\lambda_k = 0$ . On construit un nouveau graphe  $\tilde{\Gamma}$  en ajoutant à  $\Gamma$  un sommet au milieu de chaque arête où  $\varphi$  change de signe. On étend alors  $\varphi$  en  $\tilde{\varphi}$  en lui donnant la valeur 0 aux nouveaux sommets. On définit un nouvel opérateur  $\tilde{A} \in O_{\tilde{\Gamma}}$  dont  $\tilde{\varphi}$  est encore vecteur propre pour une valeur propre  $\tilde{\lambda}_l = 0$  avec  $l \leq k$ . On pourra ainsi appliquer la 1ère étape.

On définit  $\tilde{A}$  par la forme quadratique associée  $\tilde{q}$  qui est obtenue de la façon suivante : soit  $q_o$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{\tilde{V}}$  obtenue en composant  $q$  avec le plongement évident (prolonger par 0) de  $\mathbb{R}^V$  dans  $\mathbb{R}^{\tilde{V}}$ . Le spectre de  $q_o$  est celui de  $q$  augmenté de la valeur propre 0 répétée  $l = \#\tilde{V} - \#V$  fois. On remplace alors dans  $q_o$  les termes  $c(x_i - x_j)^2$  où  $(i, j)$  est une arête de  $\Gamma$  où  $\varphi$  changeait de signe par  $c_{i,\alpha}(x_i - x_{\alpha})^2 + c_{j,\alpha}(x_j - x_{\alpha})^2$  où  $\alpha$  est le nouveau sommet inséré entre  $i$  et  $j$ , avec les relations suivantes où  $\varphi(i) = a$ ,  $\varphi(j) = b$  :

$$c_{i,\alpha}a = c(a - b), \quad c_{j,\alpha}b = c(b - a), \quad c_{i,\alpha}a + c_{j,\alpha}b = 0.$$

On vérifie facilement que  $\tilde{q} \geq q_0$ , que  $\tilde{q} \in O_{\tilde{\Gamma}}$  et que  $\tilde{\varphi}$  est dans le noyau de  $\tilde{q}$ . De plus, par le minimax, il est clair que 0 est valeur propre d'ordre  $l \leq k$  de  $\tilde{q}$ .

*3ème étape :* on traite maintenant le cas général. On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets où  $\varphi$  s'annule.

Supposons que  $\varphi(0) = 0$ . On peut supposer  $W_0 = 0$  et  $\sum c_{i,0} = 1$ . On pose  $c_i = c_{i,0}$  et  $Q(x) = \sum_{i \neq 0} W_i x_i^2 + \sum_{i,j \neq 0} c_{i,j} (x_i - x_j)^2$ . Soit  $L(x_i) = \sum_i c_i x_i$ .

On fabrique un nouveau graphe  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  ainsi :

$$V_1 = V \setminus 0,$$

$E_1$  est obtenu en supprimant les arêtes  $\{i, 0\}$  et en rajoutant une arête  $\{i, j\}$  entre 2 sommets  $i, j$  qui sont tous 2 voisins de 0 dans  $\Gamma$ .

On définit une forme quadratique  $q_1$  sur  $\mathbb{R}^{V_1}$  par

$$q_1(y) = \sum c_i (y_i - L(y))^2 + Q(y) = \sum c_i y_i^2 - L(y)^2 + Q(y).$$

Alors, il est clair que  $q_1 \in O_{\Gamma_1}$  et on note  $A_1$  l'opérateur associé.

On va montrer que :

- (i) Si  $\varphi_1$  est la restriction de  $\varphi$  à  $V_1$ ,  $A_1 \varphi_1 = \lambda_k \varphi_1$ .
- (ii) Les valeurs propres  $\lambda_l^1$  de  $A_1$  vérifient  $\forall 1 \leq l \leq N-1$ ,  $\lambda_l^1 \geq \lambda_l$ .

Le (i) résulte trivialement de la nullité de  $L$  sur  $\varphi$ . Le (ii) résulte du minimax, car on a :

$$\frac{q_1(y)}{\|y\|^2} \geq \frac{q_1(y)}{\|y\|^2 + L(y)^2} = \frac{q(y, L(y))}{\|(y, L(y))\|^2},$$

et donc les valeurs propres de  $A_1$  sont plus grandes que celles de la restriction de  $q$  à un sous-espace de  $\mathbb{R}^V$  et donc a fortiori à celles de  $A$ .

On conclut alors comme dans la deuxième étape.  $\square$

Dans [H-L-S], les auteurs donnent une variante intéressante du principe de Courant pour  $\lambda_2$  :

**THÉORÈME 3 [H-L-S].** — *Supposons toujours  $\Gamma$  connexe et soit  $\varphi \in E_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 \text{Id}) \setminus 0$ ,  $V_+ = \{i \in V | \varphi(i) > 0\}$ ,  $V_- = \{i \in V | \varphi(i) < 0\}$ , supposons que  $V_+ \cup V_- = \text{Supp}(\varphi)$  soit minimal pour l'inclusion parmi les  $\varphi \in E_2$ . Alors  $V_+$  et  $V_-$  sont connexes. En particulier c'est toujours le cas si  $\dim(E_2) = 1$ , c'est-à-dire si la valeur propre est non dégénérée.*

*Preuve.* — Soit  $A_1, A_2$  2 composantes de  $V_+$ . Soit  $\varphi_i$  les restrictions de  $\varphi$  à  $A_i$  étendues par 0 à l'extérieur de  $A_i$ . Il existe  $\psi = \sum_{i=1}^2 x_i \varphi_i$  non nulle orthogonale à l'espace propre  $E_{\lambda_1}$ . Il est facile de vérifier (en supposant pour simplifier  $\lambda_2 = 0$ ) que le quotient de Rayleigh de  $\psi$  est  $\leq 0$ , on a en effet :

$$q(\psi) = x_1^2 \langle A\varphi_1 | \varphi_1 \rangle + x_2^2 \langle A\varphi_2 | \varphi_2 \rangle$$

car  $A\varphi_1$  est nulle là où  $\varphi_2$  est non nulle. Puis

$$\langle A\varphi_1 | \varphi_1 \rangle = \langle A(\varphi_1 - \varphi) | \varphi_1 \rangle + \langle A\varphi | \varphi_1 \rangle$$

et le dernier terme est nul alors que le premier est  $\leq 0$ , la somme portant sur les sommets de  $\Lambda_1$  pour les voisins desquels  $\varphi_1 - \varphi \geq 0$ . Le même raisonnement s'applique à  $\varphi_2$ . Et donc  $\psi \in E_2$  : son support est strictement inclus dans celui de  $\varphi$ , d'où la conclusion.  $\square$

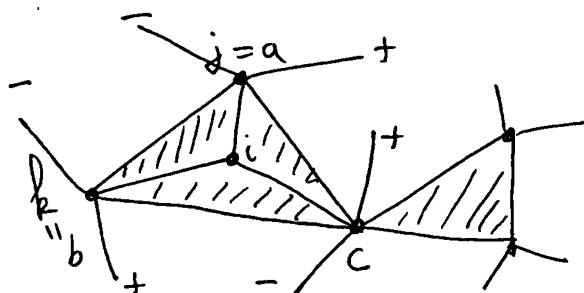
### 3. Multiplicités des valeurs propres sur un graphe.

#### 3.1. Le théorème de Cheng combinatoire.

Dans [H-L-S], est prouvée la variante combinatoire suivante du théorème de Cheng :

**THÉORÈME.** — Soit  $\Gamma$  le 1-squelette d'une triangulation de  $S^2$  ou d'un domaine à bord de  $S^2$ , alors si  $A \in O_\Gamma$ , la multiplicité de la seconde valeur propre de  $A$  est  $\leq 3$ .

*Preuve.* — Soit  $i, j, k$  3 sommets d'un triangle de cette triangulation, il existe  $\varphi \in F \setminus 0$ , telle que  $\varphi(i) = \varphi(j) = \varphi(k) = 0$ . On peut supposer que  $\varphi$  est de support minimal et donc vérifie le théorème de Courant habituel (th3 de § 2). On étend  $\varphi$  comme fonction affine sur chaque simplexe à partir de ses valeurs aux sommets.



La région  $V$  et 3 sommets du bord joints à  $V_\pm$

On considère l'ouvert  $\Omega$  de  $S^2$  qui est le complémentaire du support fermé de  $\varphi$ . Soit  $V$  la composante connexe de  $(i, j, k)$  dans  $\Omega$ . Soit  $a, b, c$  3 sommets (il y en a au moins 3 à cause de la 3-connexité !!) de la frontière de  $V$  : chacun de ces sommets ( $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0$ ) est connecté à un sommet où  $\varphi > 0$  et à un sommet où  $\varphi < 0$  : la connexité des ensembles  $V_+ = \{\varphi > 0\}$  et  $V_- = \{\varphi < 0\}$  est alors impossible d'après le théorème de Jordan.

#### 3.2. $\mu(\Gamma) \leq 3$ équivaut à $\Gamma$ planaire.

On a le

**THÉORÈME [CV1].** —  $\mu(\Gamma) \leq 3$  si et seulement si  $\Gamma$  est planaire.

Une des implication résulte du théorème de Kuratowski [KI] : un graphe non planaire contient un mineur isomorphe à l'un des 2 graphes dits de Kuratowski, le graphe  $K_5$  complet à 5 sommets et le graphe  $K_{3,3}$  bipartite complet à  $2 \times 3$  sommets. On vérifie

facilement que  $\mu(K_5) = \mu(K_{3,3}) = 4$ . On applique alors le théorème de monotonie de  $\mu$  par rapport à l'opération de mineur.

Je connais 4 preuves différentes de l'autre implication : les 2 premières sont purement combinatoires et données dans [B-CV] et [H-L-S], les 2 autres s'appuient sur des approximations du spectre d'opérateurs de Schrödinger par des laplaciens sur des graphes : on utilise soit l'approximation semi-classique de l'effet tunnel étudiées par Helffer-Sjöstrand, soit l'étude asymptotique du spectre de voisinages tubulaires du graphe plongé ([CV2]).

Donnons par exemple une preuve inspirée de [H-L-S].

Soit  $\Gamma$  planaire avec  $\mu(\Gamma) \geq 4$ , on peut considérer  $\Gamma$  comme un mineur d'une triangulation de  $S^2$  : on prend une triangulation assez fine de  $S^2$  pour que  $\Gamma$  se trace comme une ligne polygonale sur le 1-squelette  $\Gamma_1$  de la triangulation. On applique à nouveau la monotonie de  $\mu$  qui donne  $\mu(\Gamma_1) \geq 4$ , puis Cheng combinatoire appliqué à  $\Gamma_1$  donne une contradiction.

## Références

- [B-CV] R. BACHER, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicités des valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes*, Bull. Soc. Math. F. (à paraître), 1995.
- [CG] S.-Y. CHENG. — *Eigenfonctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 43-55.
- [CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Journal of Comb. Theory B **50** (1990), 11-21.
- [CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicités de valeurs propres : laplaciens discrets et continus*, Rendiconti di Matematica **VII**, **13** (1993), 433-460.
- [C-H] COURANT-HILBERT. — *Methods of mathematical physics*.
- [H-L-S] H. VAN DER HOLST, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER. — *Clique minors, graph connectivity and Colin de Verdière's invariant*, preprint (1994), 1-11.
- [KI] K. KURATOWSKI. — *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. **15** (1930), 271-283.

Yves COLIN DE VERDIÈRE  
 INSTITUT FOURIER  
 Laboratoire de Mathématiques  
 URA188 du CNRS  
 BP 74  
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)  
 e-mail : ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr