Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

François Ledrappier

Structure au bord des variétés à courbure négative

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 97-122
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__97_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (97–122)

STRUCTURE AU BORD DES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

François LEDRAPPIER

On considère une variété Riemannienne fermée M telle que la courbure sectionnelle est partout strictement négative. Un tel objet n'est pas rigide : on peut déformer la métrique en modifiant par exemple la longueur d'une certaine géodésique fermée et pas celle d'une autre. Mais les nombreux résultats et problèmes de rigidité suggèrent néanmoins que cet objet n'est pas très souple. Une technique souvent utilisée est l'étude de la théorie ergodique de l'action du groupe $\pi_1(M)$ sur le bord à l'infini $\partial\widetilde{M}$ du revêtement universel de M. Dans ce cadre, les déformations apparaissent comme des déformations de divers objets associés à la structure quasi-conforme de la sphère à l'infini :

- les classes de cohomologie de fonctions Höldériennes sur $\partial\widetilde{M}$,
- les classes de cohomologie de 1-formes feuilletées stables,
- les classes de mesures sur $\partial\widetilde{M}$ quasi-invariantes sous l'action de $\pi_1(M)$,
- les familles équivariantes de mesures au bord,
- les structures conformes sur la sphère pour lesquelles l'action de $\pi_1(M)$ est infinitésimalement conforme,
- les birapports invariants,
- les courants géodésiques de Gibbs.

Chacun de ces objets est complètement décrit par une suite de nombres, les "périodes" des classes de conjugaison de $\pi_1(M)$. Par exemple, dans le cas où ces périodes sont les longueurs des géodésiques fermées, les objets considérés sont respectivement :

- le cocycle associé à la fonction de Busemann,
- la 1-forme fondamentale, considérée comme une 1-forme fermée sur les feuilles stables,
- la classe de la mesure de Margulis-Patterson-Sullivan au bord,
- la famille de mesures de Margulis sur les sphères,

Classification math. : 53C20, 58F17.

- la métrique de Gromov au bord,
- le birapport de Liouville (Otal [28]),
- le courant géodésique de Bowen-Margulis.

Il est "bien connu" et souvent utilisé que tous ces objets sont canoniquement associés les uns aux autres (voir par exemple [34], [35], [3], [30], [31], [13], [22], [20], [29], [14], [4], [5], [15], [16], [17], [18], [37], etc.). Nous pensons utile de présenter ces techniques de manière unifiée. Il en ressort une notion de structure quasi-conforme au bord où plusieurs questions s'expriment naturellement.

I. Frontière à l'infini

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord, dont la courbure sectionnelle est strictement négative. Le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ de (M, g) est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$. Deux géodésiques γ_1, γ_2 de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sont dites équivalentes si $\widetilde{d}(\gamma_1(\mathbf{R}_+), \gamma_2(\mathbf{R}_+)) < +\infty$, où $\widetilde{d}$ est la distance de Hausdorff sur les parties de $\widetilde{M}$ associée à $\widetilde{g}$. L'espace quotient $\partial\widetilde{M}$ est homéomorphe à une sphère et est appelé frontière à l'infini. On note $T^1\widetilde{M}$ le sous-fibré unitaire dans $T\widetilde{M}$, et $\tau_{\widetilde{x}} : T^1_{\widetilde{x}}\widetilde{M} \longrightarrow \partial\widetilde{M}$ l'application qui à un vecteur v de $T^1_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ associe la classe d'équivalence de la géodésique γ_v définie par $\dot{\gamma}_v(0) = v$. L'application $\tau_{\widetilde{x}}$ est un homéomorphisme entre $T^1_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ et $\partial\widetilde{M}$. Si $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ sont deux points de $\widetilde{M}$, l'application $\tau_{\widetilde{y}}^{-1}\tau_{\widetilde{x}}$ est Höldérienne de $T^1_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ sur $T^1_{\widetilde{y}}\widetilde{M}$. Une fonction F sur $\partial\widetilde{M}$ à valeurs dans un espace métrique sera dite Höldérienne si pour un $\widetilde{x}$ de $\widetilde{M}$, la fonction $F \circ \tau_{\widetilde{x}}$ est Höldérienne sur $T^1_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$. Si g_1, g_2 sont deux métriques sur M à courbures sectionnelles strictement négatives, il existe une identification quasi-conforme, et en particulier bihöldérienne, entre les frontières à l'infini [12]. Une fonction F sur $\partial\widetilde{M}$ est donc Höldérienne s'il existe une métrique à courbure négative, un point p de $\widetilde{M}$ et une application associée τ_p tels que $F \circ \tau_p$ est une fonction Höldérienne sur $T^1_p\widetilde{M}$. Nous allons décrire des propriétés de cette "sphère Höldérienne". Nous nous efforcerons de les décrire de manière indépendante des métriques. À toutes fins utiles, nous choisissons une métrique de référence g_0 à courbures sectionnelles strictement négatives, un point p de $\widetilde{M}$ et l'application associée $\tau_p : T^1_p\widetilde{M} \longrightarrow \partial\widetilde{M}$.

Une fonction F sur $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$ est dite de classe C^k si pour tout ξ de $\partial\widetilde{M}$, la fonction $F(\cdot, \xi)$ est de classe C^k sur $\widetilde{M}$ et que les j-jets de $F(\cdot, \xi)$, $j \leq k$, sont des fonctions Höldériennes de ξ. Soit g une métrique à courbures sectionnelles strictement négatives, l'application $\tau : T^1\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$, $\tau = \{\tau_{\widetilde{x}}, \widetilde{x} \in \widetilde{M}\}$ est un homéomorphisme fibré au-dessus de $\widetilde{M}$. Une fonction G sur $T^1\widetilde{M}$ sera dite de classe C^k_s si la fonction $G \circ \tau^{-1}$ est de classe C^k (au sens ci-dessus) sur $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$.

Rappelons aussi la notion d'espace métrique quasi-conforme (voir [4] pour détails et références). Soit (E, d) un espace métrique. Un k-anneau de (E, d) est un couple (B_1, B_2) de boules concentriques $B_1 = B(\xi, r_1)$, $B_2 = B(\xi, r_2)$ avec $r_2 = kr_1$. Deux métriques d et d' sont dites quasi-conformes si leurs anneaux sont comparables, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\varphi\colon [1, +\infty) \circlearrowleft$ telle que si (B_1, B_2) est un k-anneau dans la métrique d, il existe un $\varphi(k)$-anneau dans la métrique d' (B_1', B_2') tel que $B_1' \subset B_1 \subset B_2 \subset B_2'$ et vice-versa en échangeant le rôle de d et de d'. En particulier si E est compact, deux métriques quasi-conformes sont Hölder équivalentes et ont donc les mêmes fonctions Höldériennes. Dans le cas de $\partial\widetilde{M}$ toutes les métriques définies par le choix d'une métrique à courbures sectionnelles strictement négatives g et d'un point $\widetilde{x}$ de $\widetilde{M}$ sont quasi-conformes à la métrique de référence définie par g_0 et p.

Le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est finiment engendré et agit canoniquement sur $\widetilde{M}$. Cette action s'étend à $\partial\widetilde{M}$. Pour tout γ de $\pi_1(M)$, l'application $\xi \to \gamma\cdot\xi$ sur $\partial\widetilde{M}$ est quasi-conforme. Tout γ de $\pi_1(M)$ distinct de l'identité a exactement deux points fixes γ_-, γ_+ sur $\partial\widetilde{M}$ et la dynamique est de type Nord-Sud : pour tout $\xi \neq \gamma_-, \gamma_+$, la suite $(\gamma^n\xi)_{n\in\mathbf{Z}}$ converge vers γ_- si $n \to -\infty$, vers γ_+ si $n \to +\infty$. Nous notons Γ l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(M)$ distinctes de l'identité.

Dans cette première partie, nous décrivons précisément les différents objets associés à cette action de $\pi_1(M)$ et leurs propriétés. Les preuves consisteront ensuite pour l'essentiel à construire des correspondances bijectives entre les avatars de la structure au bord.

a) Cocycles Höldériens.

DÉFINITION 1.a.

i) On appelle cocycle Höldérien *une application* $c : \pi_1(M) \times \partial\widetilde{M} \longrightarrow \mathbf{R}$ *telle que pour tout* γ *de* $\pi_1(M)$, *la fonction* $c(\gamma, \cdot\,)$ *est Höldérienne sur* $\partial\widetilde{M}$ *et satisfait :*

(1) $$c(\gamma_2\gamma_1, \xi) = c(\gamma_1, \xi) + c(\gamma_2, \gamma_1\cdot\xi)\,.$$

ii) Deux cocycles Höldériens sont dits cohomologues s'il existe une fonction U *Höldérienne sur* $\partial\widetilde{M}$ *telle que pour tout* γ *de* $\pi_1(M)$,

(2) $$c(\gamma, \xi) - c'(\gamma, \xi) = U(\gamma\cdot\xi) - U(\xi).$$

Soit c un cocycle Höldérien, $\gamma \in \pi_1(M)$, $\gamma \neq e$. Le nombre $c(\gamma, \gamma_+)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de γ dans $\pi_1(M)$ et ne dépend que de la classe de cohomologie du cocycle Höldérien c. On appelle période de c en γ le nombre $c(\gamma, \gamma_+)$.

THÉORÈME 1.a. — *Deux cocycles Höldériens sont cohomologues si, et seulement si, ils ont mêmes périodes.*

Un cocycle Höldérien est dit *pair* si $\ell(\gamma) = \ell(\gamma^{-1})$. Il est dit *normalisé* si pour tout γ de Γ, $\ell(\gamma) > 0$ et si $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \#\{\gamma : \gamma \in \Gamma,\ \ell(\gamma) \leq T\} = 1$.

Les autres objets annoncés dans l'introduction correspondent à différentes manières de faire apparaître un cocycle Höldérien.

b) 1-forme stable fermée.

DÉFINITION 1.b.

i) On appelle 1-forme stable *une famille* $\alpha = \{\alpha_\xi,\ \xi \in \partial\widetilde{M}\}$ *de 1-formes sur* $\widetilde{M}$ *telles que*

- *pour tout* γ *de* $\pi_1(M)$, $\gamma^*\alpha_{\gamma\xi} = \alpha_\xi$,
- *pour tout champ de vecteur* C^∞ *sur* $\widetilde{M} Z$, $(x,\xi) \longrightarrow \alpha_\xi(Z_x)$ *est une fonction de classe* C^1 *sur* $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$.

ii) La 1-forme stable $\alpha = \{\alpha_\xi,\ \xi \in \partial\widetilde{M}\}$ *est dite* fermée *si pour tout* ξ *la 1-forme* α_ξ *est fermée sur* $\widetilde{M}$.

iii) Deux 1-formes stables α, α' *sont dites* cohomologues *s'il existe une fonction Höldérienne* U *sur* $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$, $\pi_1(M)$*-invariante de classe* C^1, *telle que pour tout* ξ *de* $\partial\widetilde{M}$

$$\alpha'_\xi - \alpha_\xi = dU(\cdot,\xi) \tag{3}$$

où la différenciation d porte sur la variable dans $\widetilde{M}$.

À une 1-forme stable fermée, on associe un cocycle Höldérien c en choisissant un point p de $\widetilde{M}$ et en posant

$$c(\gamma,\xi) = \int_p^{\gamma^{-1}p} \alpha_\xi\,. \tag{4}$$

Les périodes de la 1-forme stable fermée sont les périodes du cocycle associé. La formule (4) permet d'obtenir tous les cocycles Höldériens et on a :

THÉORÈME 1.b ([23]). — *Deux formes fermées stables sont cohomologues si, et seulement si, elles ont mêmes périodes.*

c) Mesure quasi-invariante à l'infini.

DÉFINITION 1.c. — *Une mesure finie sur* $\partial\widetilde{M}$ *sera dite quasi-invariante s'il existe un cocycle Höldérien c sur* $\partial\widetilde{M}$ *tel que*

$$\int f(\gamma^{-1}\xi)d\mu(\xi) = \int f(\xi)e^{-c(\gamma,\xi)}d\mu(\xi)\,. \tag{5}$$

Le cocycle Höldérien associé à une mesure quasi-invariante est unique. On appelle périodes de la mesure μ les périodes du cocycle Höldérien associé. Remarquons qu'avec notre convention, puisque γ_+ est attractif pour γ, les périodes de la mesure μ sont toutes positives.

THÉORÈME 1.c. — *Soient μ et μ' deux mesures quasi-invariantes sur $\partial\widetilde{M}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) μ et μ' ont les mêmes ensembles négligeables,

ii) il existe une fonction Höldérienne U sur $\partial\widetilde{M}$ telle que $\mu' = e^{-U}\mu$,

iii) les cocycles associés sont cohomologues,

(iv) μ et μ' ont les mêmes périodes.

Les mesures μ et μ' sont dites équivalentes si elles satisfont ces propriétés.

THÉORÈME 2.c. — *Un cocycle Höldérien est associé à une mesure si, et seulement si, il est normalisé.*

d) Famille équivariante de mesures au bord.

DÉFINITION 1.d. — *On appelle famille équivariante de mesures au bord une application $x \to \mu_x$ de $\widetilde{M}$ dans les mesures de Radon sur $\partial\widetilde{M}$ telle que*

- *pour tout γ de $\pi_1(M)$, $\mu_{\gamma x} = \gamma_*\mu_x$,*
- *pour tous x, y de $\widetilde{M}$, les mesures μ_x et μ_y ont les mêmes ensembles négligeables et il existe une fonction strictement positive de classe C^2 sur $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$, k_x telle que*

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = k_x(y,\xi), \quad \mu_x - p.p.$$

À une famille équivariante de mesures au bord on associe un cocycle Höldérien $c(\gamma,\xi)$ par

$$c(\gamma,\xi) = -\log k_p(\gamma^{-1}p,\xi). \tag{6}$$

Les périodes de la famille de mesures sont les périodes du cocycle associé par (6). Les résultats parallèles à ceux du paragraphe **c)** s'énoncent :

THÉORÈME 1.d. — *Soient $x \to \mu_x$ et $x \to \mu'_x$ deux familles équivariantes de mesures au bord. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) μ et μ' ont les mêmes ensembles négligeables, *ii) il existe une fonction de classe C^2 sur $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$, $\pi_1(M)$-invariante, telle que pour tout x de $\widetilde{M}$, $\mu'_x = e^{-U(x,\cdot)}\mu_x$,*

iii) les cocycles associés par (6) sont cohomologues,

iv) μ et μ' ont les mêmes périodes.

THÉORÈME 2.d. — *Il existe une famille équivariante de mesures définissant le cocycle c par (6) si, et seulement si, le cocycle c est normalisé.*

e) Métriques conformes.

DÉFINITION 1.e. — *Une métrique d sur $\partial\widetilde{M}$ est appelée* conforme *si*

- *la métrique est quasi-conforme à la métrique de référence,*
- *il existe un cocycle Höldérien pair $c(\gamma, \xi)$ et des constantes $C > 1, \varepsilon_0 > 0$, telles que pour tous ξ, η de $\partial\widetilde{M}$, $d(\xi, \eta) < \varepsilon_0$, tout γ de $\pi_1(M)$ tel que $d(\gamma\xi, \gamma\eta) < \varepsilon_0$, on a :*

$$\left|\log d(\gamma\xi, \gamma\eta) - \log d(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\big(c(\gamma, \xi) + c(\gamma, \eta)\big)\right| \leq C\,. \tag{7}$$

On appelle périodes d'une métrique conforme les périodes du cocycle Höldérien associé.

Rappelons que deux métriques d et d' sur un espace X sont dites conformément équivalentes s'il existe pour tout ξ de X un nombre $a(\xi)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ si r est assez petit

$$B'\big(\xi, a(\xi)r(1-\varepsilon)\big) \subset B(\xi, r) \subset B'\big(\xi, a(\xi)r(1+\varepsilon)\big)\,.$$

Le nombre $a(\xi)$ s'appelle le coefficient de d par rapport à d'.

THÉORÈME 1.e. — *Deux métriques conformes sont conformément équivalentes si, et seulement si, elles sont mêmes périodes.*

THÉORÈME 2.e ([35]). — *Soient d une métrique conforme sur $\partial\widetilde{M}$, c le cocycle Höldérien associé par (7). Il existe δ tel que le cocycle δc est normalisé. Le nombre δ est la dimension de Hausdorff de $(\partial\widetilde{M}, d)$. La δ-mesure de Hausdorff de $(\partial\widetilde{M}, d)$ est finie, quasi-invariante et de cocycle δc.*

En particulier, nous avons $\delta \geq \dim M - 1$. Deux métriques d et d' sont dites équivalentes s'il existe un nombre positif ζ tel que d^{ζ} et d soient deux métriques conformément équivalentes.

THÉORÈME 1.e$'$. — *Deux métriques conformes sont équivalentes si, et seulement si, leurs périodes sont proportionnelles.*

f) Birapport invariant.

On note $\Delta \subset \partial\widetilde{M}^4$, $\Delta = \{(a,b,c,d)\ \{a,b\} \cap \{c,d\} \neq \emptyset\}$.

DÉFINITION 1.f. — *On appelle birapport une fonction B sur $\partial\widetilde{M}^4 \setminus \Delta$, Höldérienne, invariante par l'action diagonale de $\pi_1(M)$ et qui vérifie*

i) $B(a,b,c,d) = B(c,d,a,b)$,

ii) $B(a,b,c,d) + B(a,b,d,e) = B(a,b,c,e)$ *pour tous a,b,c,d,e de $\partial\widetilde{M}$ tels que les quantités soient définies.*

Soit $\gamma \in \pi_1(M)$, $\gamma \neq e$. Il suit de *ii)* et de l'invariance que le nombre $\ell(\gamma)$

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2} B(\gamma\xi, \xi, \gamma_-, \gamma_+)$$

ne dépend pas de ξ ni de la classe de conjugaison de γ. On appelle périodes du birapport B les nombres $\{\ell(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$.

THÉORÈME 1.f (Otal [29]). — *Il existe au plus un birapport de périodes données.*

Un birapport est dit normalisé si $\ell(\gamma) > 0$ pour tout γ, $\gamma \in \Gamma$, et si

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \#\{\gamma; \gamma \in \Gamma,\ \ell(\gamma) \leq T\} = 1\,.$$

Remarquons également que les périodes d'un birapport sont paires :

$$\ell(\gamma^{-1}) = \frac{1}{2} B(\gamma^{-1}\xi, \xi, \gamma_+, \gamma_-) = \frac{1}{2} B(\xi, \gamma^{-1}\xi, \gamma_-, \gamma_+) = \ell(\gamma).$$

g) Courants de Gibbs.

Soit Δ la diagonale de $\partial\widetilde{M}^2$. On appelle *courant géodésique* une mesure de Radon sur $\partial\widetilde{M}^2 \setminus \Delta$, $\pi_1(M)$ invariante. Un courant géodésique est dit *symétrique* s'il est invariant par l'application $(\xi,\eta) \longrightarrow (\eta,\xi)$. Un courant géodésique symétrique m est dit de *Gibbs* s'il existe une mesure finie μ sur $\partial\widetilde{M}$ et une fonction G Höldérienne sur $\partial\widetilde{M}^2 \setminus \Delta$ telles que $m = e^G \mu \otimes \mu$.

THÉORÈME 2.g (Hamenstädt [18]). — *Il y a correspondance biunivoque entre*

- *les classes de cohomologie de cocycles Höldériens pairs et normalisés,*
- *les classes d'équivalence de métriques conformes,*
- *les courants géodésiques de Gibbs symétriques, à une constante multiplicative près,*
- *les birapports normalisés,*

de mêmes périodes.

II. Cocycles Höldériens, 1-formes stables et classes de Livtchits

Pour montrer les théorèmes 1 et 2, nous fixons une métrique de référence g_0 et nous identifions par l'application τ les espaces $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$ et $T^1\widetilde{M}$. L'homéomorphisme τ conjugue l'action diagonale de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$ et l'action dérivée de $\pi_1(M)$ sur $T^1\widetilde{M}$. L'homéomorphisme quotient identifie l'espace quotient $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}/\pi_1(M)$ et le fibré unitaire T^1M. Soit X le *champ géodésique* sur T^1M ; le champ X est le champ de vecteurs définissant le flot géodésique $\{\theta_t\}_{t\in\mathbf{R}}$. Il y a deux propriétés de pistage du flot géodésique que nous utiliserons. Rappelons qu'on dit qu'une orbite $\{\theta_s v,\ s \in \mathbf{R}\}$, (T,ε)-piste l'orbite $\{\theta_s w,\ s \in \mathbf{R}\}$ si pour tout s, $0 \leq s \leq T$, $d(\theta_s v, \theta_s w) \leq \varepsilon$. Alors si F est une fonction Höldérienne et que les orbites $\{\theta_s v\}$ et $\{\theta_s w\}$ se (T,ε)-pistent l'une l'autre ; on a

$$\left| \int_0^T \big(F(\theta_s v) - F(\theta_s w)\big)ds \right| \leq C\varepsilon^\alpha ,$$

où C et α ne dépendent pas de T. L'autre propriété est la spécification : pour ε fixé, il existe R tel que toute orbite de longueur T est (T,ε)-pistée par une orbite périodique de période inférieure à $T+R$. Ces deux propriétés sont dues à Bowen [6], [7]. Soit $v \in T^1M$; la variété stable de v est l'ensemble des vecteurs w tels qu'il existe un nombre $b(v,w)$ avec $d(\theta_t v, \theta_{t+b(v,w)} w) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. L'homéomorphisme quotient de τ que nous utilisons identifie le feuilletage $\{\widetilde{M} \times \{\xi\}/\pi_1(M)\}$ au feuilletage stable du flot géodésique sur T^1M. Une fonction f sur T^1M sera dite de classe C^k_s si sa relevée $\pi_1(M)$ invariante $\widetilde{f}$ sur $T^1\widetilde{M}$ est de classe C^k_s. Une fonction f est donc de classe C^k_s si et seulement si la fonction f est de classe C^k le long des variétés stables et que les j-jets de la fonction f le long des variétés stables, $j \leq k$, sont globalement des fonctions Höldériennes sur T^1M. De même, une 1-forme fermée stable de classe C^k est représentée par une section $v \longrightarrow \alpha_v$, où α_v est une forme linéaire sur l'espace tangent à la variété stable de v, telle que le long de chaque variété stable $v \longrightarrow \alpha_v$ définit une 1-forme fermée de classe C^k et que les j-jets stables de $v \longrightarrow \alpha_v$, $j \leq k$, sont globalement des fonctions Höldériennes sur T^1M. Rappelons également que pour $\gamma \in \Gamma$, il existe une unique géodésique fermée dont l'homotopie libre est la classe de conjugaison γ. Pour F une fonction continue sur T^1M et $\gamma \in \Gamma$, on note $\int_\gamma F$ l'intégrale de la fonction F pour la mesure longueur d'arc sur la géodésique fermée associée à γ. On appelle périodes de F la famille des $\{\int_\gamma F,\ \gamma \in F\}$. Deux fonctions Höldériennes F et F' sont dites cohomologues au sens de Livtchits s'il existe une fonction Höldérienne U, C^1 dans le sens du flot, telle que $F - F' = XU$. D'après le théorème de Livtchits [26] deux fonctions Höldériennes sont cohomologues si, et seulement si, elles ont mêmes périodes. Les théorèmes 1.a et 1.b suivent alors facilement du théorème de Livtchits et du théorème 3.

THÉORÈME 3. — *Il y a correspondance biunivoque entre*

- *les classes de cohomologie de cocycles Höldériens,*
- *les classes de cohomologie de 1-formes fermées stables,*
- *les classes de cohomologie de Livtchits de fonctions de classes C^2_s sur T^1M.*

Les classes en correspondance ont les mêmes périodes.

Preuve du théorème 3. — Soit F une fonction de classe C^2_s. On lui associe une 1-forme fermée stable α par la formule $\alpha = dA$ où

$$A(v,w) = \lim_{s\to+\infty} \int_0^{s+b(v,w)} F(\theta_u w)du - \int_0^s F(\theta_u v)du \tag{8}$$

(cf. [23]). Des fonctions cohomologues donnent des 1-formes cohomologues et les périodes sont conservées. Pour voir que toute classe de 1-formes fermées stables est obtenue par la construction précédente, rappelons ([23], th. 1) que dans toute classe de 1-formes fermées stables, il existe au moins un représentant $\overline{\alpha}$ de classe C^2_s. La fonction $F(v) = -\overline{\alpha}_v(X)$ est de classe C^2_s et convient.

À une 1-forme fermée stable, on associe un cocycle Höldérien par la formule (4). Des formes cohomologues donnent des cocycles cohomologues et par définition, les périodes sont conservées. Pour voir que toute classe de cocycles Höldériens est obtenue, nous construisons pour un cocycle Höldérien donné c une 1-forme stable telle que la formule (4) donne un cocycle cohomologue à c. On choisit une fonction positive à support compact de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, ρ telle que $\rho(0) = 1$, $\rho'(0) = \rho''(0) = 0$, $\rho(t) > \frac{1}{2}$ si $|t| < 2 \sup_{x\in\widetilde{M}} d(x, \pi_1(M)\cdot p)$ et on pose

$$A(x,\xi) = \sum_{\gamma\in\pi_1(M)} \rho(d(x,\gamma p))e^{-c(\gamma^{-1},\xi)}\ . \tag{9}$$

La fonction A est strictement positive et de classe C^2_s sur $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$. De plus pour tout γ_0 de $\pi_1(M)$, nous avons :

$$A(\gamma_0 x, \gamma_0\xi) = A(x,\xi)e^{c(\gamma_0,\xi)}\ .$$

La 1-forme $\alpha_\xi = -d\log A(\cdot\,,\xi)$ est fermée, de classes C^1_s et vérifie donc :

$$\gamma_0^*\alpha_{\gamma_0\xi} = \alpha_\xi\ ;$$

de plus, en posant $c'(\gamma,\xi) = \int_p^{\gamma^{-1}p} \alpha_\xi$, on trouve :

$$\begin{aligned} c'(\gamma,\xi) &= \log A(p,\xi) - \log A(\gamma^{-1}p,\xi) \\ &= \log A(p,\xi) - \log A(p,\gamma\xi) + c(\gamma,\xi)\ . \end{aligned}$$

Le cocycle c' est bien cohomologue au cocycle c de départ. ∎

Pour $\gamma \in \Gamma$, on note $|\gamma|$ la longueur de la géodésique fermée associée à γ dans la métrique de référence g_0. Rappelons que pour une fonction continue F la pression de F est donnée par :

$$(10) \qquad P(F) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\gamma\in\Gamma |\gamma| \le T} e^{\int_\gamma F} \quad ([7], [8]).$$

Corollaire 1. — *Soient c un cocycle Höldérien, g_0 une métrique de référence. Il existe une fonction $F : T^1M \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2_s qui a les mêmes périodes que c. La fonction F a les propriétés suivantes: le cocycle est normalisé si, et seulement si, $\ell(\gamma) \ge 0$ pour tout γ et $P(-F) = 0$. Le cocycle est pair si, et seulement si, les fonctions $v \longrightarrow F(v)$ et $v \longrightarrow F(-v)$ sont cohomologues au sens de Livtchits.*

En effet la fonction $F(v) = -\overline{\alpha}_v(X)$ de la preuve du théorème 3 est de classe C^2_s. Les périodes du cocycle c sont données par $\ell(\gamma) = \int_\gamma F$. Supposons $\ell(\gamma) \ge 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et définissons $s_0 \in \mathbf{R}_+ \cup \{\pm\infty\}$

$$(11) \qquad s_0 = \limsup_n \frac{1}{n} \log \#\{\gamma \in \Gamma;\ n-1 \le \ell(\gamma) < n\}.$$

Lemme 1. — *Nous avons $s_0 \in \mathbf{R}_+$ si, et seulement si, la fonction $t \longrightarrow P(-tF)$ s'annule en s_0 et les $\{\ell(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$ sont tous strictement positifs. On a même alors*

$$\inf_\gamma \frac{\ell(\gamma)}{|\gamma|} = m > 0.$$

Preuve du lemme 1. — Nous avons $s_0 = -\infty$ si, et seulement si, ℓ est borné sur Γ. Comme $\ell(\gamma^n) = n\ell(\gamma)$, alors $\ell(\gamma)$ est nul pour tout γ de Γ. D'après le théorème de Livtchits, cela a lieu si, et seulement si, la fonction F est cohomologue à la constante 0. Dans ce cas, $P(-F) > 0$.

Nous avons $s_0 = +\infty$ si, et seulement si, $P(-tF) > 0$ pour tout t de $\mathbf{R}_+$. En particulier $P(-F) > 0$. De même, si $\inf_\gamma \frac{\ell(\gamma)}{|\gamma|} = 0$, alors $\inf\{\int F\,dm,\ m$ probabilité θ invariante$\} = 0$ et d'après le principe variationnel, $P(-tF) \ge 0$ pour tout t de $\mathbf{R}_+$. Si ℓ n'est pas identiquement nul, la fonction F n'est pas cohomologue à une constante et la fonction $t \longrightarrow P(-tF)$ est strictement convexe ([32], prop. 4.12). Nous avons donc $P(-tF) > 0$ pour tout t, $s_0 = +\infty$ et $P(-F) > 0$.

Reste donc que $s_0 \in \mathbf{R}_+$ si, et seulement si, la fonction $t \longrightarrow P(-tF)$ s'annule en s_0. On doit alors avoir $\inf_\gamma \frac{\ell(\gamma)}{|\gamma|} > 0$. ∎

Le lemme 1 entraîne que si un cocycle c est normalisé, la fonction F associée vérifie $P(-F) = 0$. Inversement, si une fonction F Höldérienne vérifie $\ell(\gamma) \ge 0$ pour tout γ et $P(-F) = 0$, alors $\ell(\gamma) > 0$ pour tout γ et le nombre s_0 défini par (11) vaut 1.

Remarquons alors que à cause de la propriété de spécification la suite de nombres

$$\log\#\left\{\gamma \in \Gamma,\ \int_\gamma F \leq n\right\}$$

est sous-additive à une constante près et donc que le nombre s_0 est aussi donné par

$$s_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\#\{\gamma \in \Gamma,\ \ell(\gamma) \leq T\}\,.$$

Les périodes $\{\int_\gamma F,\ \ \gamma \in F\}$ sont bien les périodes d'un cocycle normalisé.

La dernière affirmation du corollaire 1 suit du fait que les périodes de la fonction $v \longrightarrow F(-v)$ sont par définition les $\ell(\gamma^{-1})$.

La dernière partie du corollaire 1 s'exprime sans utiliser de métrique de référence :

COROLLAIRE 2. — *Soit c un cocycle Höldérien de périodes* $\{\ell(\gamma),\ \ \gamma \in \Gamma\}$. *Il existe une unique classe de cohomologie de cocycles Höldériens* $\check{c}$ *dont les périodes* $\check{\ell}$ *sont données par* $\check{\ell}(\gamma) = \ell(\gamma^{-1})$. *Un cocycle c est pair si, et seulement si, les cocycles c et* $\check{c}$ *sont cohomologues.*

Remarquons en effet que bien que la fonction $\check{F}\,:\,\check{F}(v) = F(-v)$ ne soit pas de classe C_s^2 en général ([19], [27] lemma 2.3), les formules (8) et (4) sous la forme

$$\check{c}(\gamma,\xi) = \check{A}(\tau_p^{-1}\xi, \tau_{\gamma^{-1}p}^{-1}\xi) \tag{12}$$

définissent un cocycle Höldérien.

III. Mesures quasi-invariantes, mesures transverses et mesures de Gibbs

Dans cette partie, nous montrons les théorèmes 1.c, 2.c, 1.d et 2.d.

a) Mesures quasi-invariantes et familles équivariantes.

PROPOSITION 1. — *Il y a une correspondance biunivoque entre les classes de familles équivariantes de mesures au bord et les classes de mesures quasi-invariantes de mêmes périodes.*

Preuve de la proposition 1. — À la famille $x \to \mu_x$ on associe la mesure μ_p. Pour tout γ de $\pi_1(M)$, $\gamma_*\mu_p = \mu_{\gamma p}$ et la mesure μ_p est quasi-invariante. La classe de la mesure obtenue ne dépend pas de p et des familles équivalentes donnent des mesures de la même classe. Les périodes sont conservées. Inversement, si μ est une mesure quasi-invariante au bord, on choisit une fonction positive réelle sur $\mathbf{R}$, ρ comme dans la preuve du théorème 3, et on pose pour tout x de $\widetilde{M}$

$$\mu_x = \sum_{\gamma \in \pi_1(M)} \rho\big(d(x, \gamma p)\big)\gamma_* \mu \,. \tag{13}$$

On a bien pour tout γ_0 de $\pi_1(M)$:

$$\begin{aligned}
\mu_{\gamma_0 x} &= \sum_\gamma \rho\big(d(\gamma_0 x, \gamma p)\big)\gamma_* \mu \\
&= \sum_\gamma \rho\big(d(\gamma_0^{-1} x, \gamma p)\big)\gamma_* \mu \\
&= \gamma_{0*}\Big(\sum_\gamma \rho\big(d(\gamma_0^{-1} x, \gamma p)\big)\gamma_{0*}^{-1}\gamma_* \mu\Big) \\
&= \gamma_{0*}\mu_x \,.
\end{aligned}$$

De plus, la fonction $A(x,\xi)$ donnée par (9) vérifie $\frac{d\mu_x}{d\mu}(\xi) = A(x,\xi)\mu_x$ p.p. La famille μ_x donnée par (13) est bien une famille équivariante de mesures au bord. La formule (6) donne alors pour le cocycle Höldérien associé à cette famille

$$-\log \frac{d\mu_{\gamma^{-1}p}}{d\mu_p}(\xi) = \log A(p,\xi) - \log A(\gamma^{-1}p,\xi)$$

et les vérifications de la preuve du théorème 3 montrent que ce cocycle est cohomologue au cocycle $-\log \frac{d\gamma_*^{-1}\mu}{d\mu}(\xi)$ associé à la mesure quasi-invariante μ. Les autres vérifications sont immédiates. ∎

Notons de plus que deux mesures quasi-invariantes ont les mêmes ensembles négligeables si, et seulement si, les familles équivariantes associées ont les mêmes ensembles négligeables. La proposition 1, cette remarque, les théorèmes 1.d et 2.d entraînent immédiatement les théorème 1.c et 2.c.

b) Mesures transverses au feuilletage stable.

Rappelons que grâce à la métrique de référence g_0, nous avons identifié l'espace quotient $\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}/\pi_1(M)$ au fibré unitaire T^1M et les feuilles $\widetilde{M} \times \{\xi\}/\pi_1(M)$ aux variétés stables du flot géodésique sur T^1M. Considérons $x \longrightarrow \mu_x$ une famille équivariante de mesures au bord (définition 1.d). La famille $x \longrightarrow \nu_x = \tau_x^{-1}\mu_x$ est une famille de mesures sur les sphères $T_x^1\widetilde{M}$ telles que $\nu_{\gamma x} = \gamma_*\nu_x$ et satisfaisant une certaine condition de régularité. Elle définit donc une famille de mesures $x \to \nu_x$ sur les sphères $T_x^1 M$; la régularité porte sur comment varie la mesure d'une sphère à une autre aux points dont les relevés dans $T^1\widetilde{M}$ se projettent par τ sur le même point à l'infini, c'est-à-dire aux points qui se correspondent par l'holonomie du feuilletage stable. Nous formalisons cette régularité dans la définition suivante :

DÉFINITION 2. — *On appelle mesure transverse au feuilletage stable de classe C^k_s une famille de mesures de Radon μ_T sur les sous-variétés transverses T au feuilletage stable telle que pour tout ouvert de carte feuilletée, il existe une fonction h de classe C^k_s sur l'ouvert avec la propriété suivante : notons $\phi : \left(B^{n-1}(1) \times B^n(1)\right) \longrightarrow T^1M$ la carte feuilletée, l'ensemble $\phi\left(\{x\} \times B^n(1)\right)$ étant un ouvert de la variété stable de $\phi(x,0)$ et soit t une fonction continue de $B^{n-1}(1)$ dans $B^n(1)$ telle que $T = \phi\left(\{(x,t(x))\}\right)$ est une sous-variété transverse ; alors la mesure $\phi^{-1}\mu_T$ se projette sur $B^{n-1}(1)$ en la mesure $h\left(\phi(x,t(x))\right)\phi^{-1}\mu_0$.*

On remarque que pour définir une mesure transverse, il suffit de la connaître sur une famille de transversales qui passe par tout point, puisque cela suffit pour déterminer localement la densité h et donc écrire la mesure sur les autres transversales. Il suffit même de vérifier la propriété de la définition sur cette famille particulière de transversales. Par exemple les mesures ν_x sur les sphères T^1_xM définissent une famille de mesures transverses de classe C^2_s. La fonction h dépend de la carte feuilletée, mais par le rapport $\frac{h(x)}{h(y)}$ entre les valeurs de h en deux points voisins d'une même variété stable. Autrement dit la 1-forme fermée stable $d\log h$ est bien définie. Les périodes d'une mesure transverse sont les périodes de la famille équivariante de mesures au bord obtenue en considérant les mesures $x \longrightarrow \tau_x\widetilde{\mu}_{T^1_xM}$, où $\widetilde{\mu}_{T^1_xM}$ est le relevé à $T^1_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ de la mesure $\mu_{T^1_xM}$ sur T^1_xM. Avec nos conventions (voir (6) et (4)), ce sont les périodes de la 1-forme stable $d\log h$. Deux mesures transverses au feuilletage stable de classe C^2_s sont dites équivalentes s'il existe une fonction U de classe C^2_s sur T^1M telle que pour toute transversale T, $\mu'_T = e^{-U}\mu_T$.

Soit $v \in T^1M$. On appelle variété instable forte de v l'ensemble

$$W^{su}(v) = \left\{w;\ w \in T^1M, d(\phi_{-t}v, \phi_{-t}w) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty\right\}.$$

L'ensemble des variétés instables fortes forme un feuilletage de variétés transverses au feuilletage stable. Une famille de mesures transverses définit donc une famille de mesures sur les variétés instables fortes.

c) Normalisation.

Le résultat central de la partie III est le

THÉORÈME 4. — *Il y a correspondance biunivoque entre*

- *les classes de familles équivariantes de mesures au bord,*
- *les classes d'équivalence de mesures transverses de classe C^2_s,*
- *les classes de cohomologie de Livtchits des fonctions F de classe C^2_s telles que $P(-F) = 0$ et $\int_\gamma F \geq 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

- *les classes de cohomologie de cocycles Höldériens normalisés.*

Les classes en correspondance ont mêmes périodes.

Preuve du théorème 4. — La première correspondance est le sujet du paragraphe III, b) ci-dessus; la dernière correspondance vient du théorème 3 et du corollaire 1. Dans ce paragraphe, nous associons à une mesure transverse μ la fonction $F = X \log h$. D'après le corollaire 1, il existe une fonction de classe C_s^2 cohomologue à F. De plus, si μ et μ' sont deux mesures transverses équivalentes les fonctions associées $X \log h$ et $X \log h'$ sont cohomologues. Les périodes sont les périodes d'une classe de mesures quasi-invariantes, ce sont donc des nombres positifs. Reste à établir :

PROPOSITION 2. — *Soit μ une mesure transverse, alors $P(-X \log h) = 0$.*

Preuve de la proposition 2. — Nous utiliserons les définitions habituelles de la pression d'une fonction continue f [36]. On se donne ε, S positifs. Un ensemble E est dit (S,ε)-dense si

$$\bigcup_{x\in E} \{y : d(\theta_s x, \theta_s y) < \varepsilon, \forall s, 0 \le s \le S\} = T^1 M \;;$$

un ensemble E est dit (S,ε)-séparé si pour x, x' distincts dans E, $\max\limits_{0\le s\le S} d(\theta_s x, \theta_s x') > \varepsilon$. La pression de la fonction continue f, $P(f)$, est donnée, si ε est assez petit, par :

$$\begin{aligned} P(f) &= \overline{\lim_{S\to\infty}} \frac{1}{S} \log \max_{E(S,\varepsilon)-\text{séparé}} \sum_{x\in E} e^{\int_0^S f(\theta_s x)ds} \\ &= \overline{\lim_{S\to\infty}} \frac{1}{S} \log \min_{E(S,\varepsilon)-\text{dense}} \sum_{x\in E} e^{\int_0^S f(\theta_s x)ds} . \end{aligned}$$

Fixons-nous ε assez petit et choisissons un ensemble fini de transversales $\{T_i, i \in E\}$ avec les propriétés suivantes : chaque T_i est un compact de variété instable forte de frontière μ_T négligeable et $\bigcup\limits_i (W^s \cap T_i)$ est, pour chaque variété stable W^s, un ensemble discret de points de W^s à la fois $\varepsilon/2$-séparé et 2ε dense dans W^s pour la métrique Riemannienne induite.

Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver ρ assez petit pour que $\mu_{T_i}(\{x;\ d(x, \partial T_i) < \rho\}) \le \delta < \frac{1}{2}\mu_{T_i}(T_i)$. Rappelons aussi que par compacité, on peut trouver deux fonctions $A(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon)$ strictement positives telles que pour tout v de $T^1 M$,

$$A(\varepsilon) < \mu_{W^{uu}}(B^{uu}(v,\varepsilon)) < B(\varepsilon).$$

Pour tout S réel $\theta_S T$ est une réunion de sous-ensembles de variétés instables fortes, et on sait que pour S assez grand, tout v de $T^1 M$, le diamètre de $\theta_{-S} B^{uu}(v,\varepsilon)$ est plus petit que ρ. Pour S grand, on choisit un ensemble F ε-séparé maximal dans $\theta_S T$ pour la métrique induite sur les variétés instables fortes. L'ensemble F est aussi ε-dense dans $\theta_S T$.

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1. pour tout y dans F

$$A(\varepsilon/4) < \mu_{\theta_S T} B^{uu}(y,\varepsilon/4) \leq \mu_{\theta_S T} B^{uu}(y,2\varepsilon) < B(2\varepsilon),$$

2. il existe deux constantes géométriques K_1, K_2 telles que l'ensemble $E = \theta_{-S}F$ est $(S, \varepsilon/K_1)$-séparé et $(S, K_2\varepsilon)$-dense,

3. il existe une constante K, qui ne dépend que de la régularité de la fonction F telle que si x, x' sont sur une même variété instable à distance $\leq 4\varepsilon$, alors

$$\left| \int_0^S F(\theta_{-s}x)\, ds - \int_0^S F(\theta_{-s}x')\, ds \right| \leq K\,,$$

4. pour y dans $\theta_S T$, $B(y)$ un voisinage de y sur la variété instable forte :

$$\begin{aligned} \mu_T(\theta_{-S}B_y) &= \int_{B_y} \frac{h(\theta_{-S}z)}{h(z)} d\mu_{\theta_S T}(z) \\ &= \int_{B_y} e^{-\int_0^S X \log h(\theta_{s-S}z)\, ds} d\mu_{\theta_S T}(z). \end{aligned}$$

On utilise la divergence exponentielle des géodésiques pour 2 et 3, la définition de la mesure transverse pour 4.

Pour estimer la pression, on choisit une partition de $\theta_S T$ en ensembles $\{B(y),\ y \in F\}$ tels que pour tout y de F.

$$B(y,\varepsilon/4) \subset B(y) \subset B(y,2\varepsilon)\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{x\in E} e^{-\int_0^S X \log h(\theta_s X)\, ds} &= \sum_{y\in F} e^{-\int_0^S X \log h(\theta_{-s}y)\, ds} \\ &\leq \frac{e^K}{A(\varepsilon/4)} \sum_{y\in F} \mu_T(\theta_{-S}B_y) \\ &\leq \frac{e^K}{A(\varepsilon/4)} (\mu_T(T) + \delta) \end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{x\in E} e^{-\int_0^S X \log h(\theta_s x)\, ds} \geq \frac{e^{-K}}{B(2\varepsilon)} (\mu_T(T) - \delta)\,.$$

L'estimation de la pression suit.

d) Mesures de Gibbs.

Soit F une fonction de classe C_s^2 sur T^1M telle que $P(-F) = 0$ et $\int_\gamma F \geq 0$ pour tout γ de Γ. Nous continuons la démonstration du théorème 4 en associant à une fonction F avec ces propriétés une famille de mesures transverses μ telle que $X \log h = F$, la *mesure de Gibbs* associée à $-F$. Nous allons utiliser la construction de Patterson d'une famille équivariante de mesures au bord.

Soit F une fonction de classe C_s^2, x, y des points de $\widetilde{M}$, $\gamma \in \pi_1(M)$. On note $\int_x^{\gamma y} F$ l'intégrale de la fonction F sur la géodésique de $\widetilde{M}$, $\sigma_{x,\gamma y}$ allant de x à γy. Pour $s > 0$, on appelle série de Poincaré la série $P_s(x,y) = \sum_{\gamma \in \pi_1(M)} e^{-s\int_x^{\gamma y} F}$.

LEMME 2. — *Soient F telle que $P(-F) = 0$ et $\int_\gamma F \geq 0$ pour tout γ de Γ. Alors la série de Poincaré $P_s(x,y)$ converge pour $s > 1$, diverge pour $s < 1$.*

Preuve du lemme 2. — Rappelons que d'après le lemme 1, $\inf_{\gamma \in \Gamma} \dfrac{\ell(\gamma)}{|\gamma|} = m > 0$. D'autre part d'après la propriété de spécification pour chaque segment géodésique $[x, \gamma y]$ obtenu en projetant $\sigma_{x,\gamma y}$, il existe une géodésique périodique $\overline{\gamma}$ de longueur plus petite que $d(x,\gamma y) + R$ qui piste le segment $[x, \gamma y]$. De plus $\int_x^{\gamma y} F - \ell(\overline{\gamma})$ est borné. Enfin le nombre de segments géodésiques qui peuvent être associés de la sorte à un même $\overline{\gamma}$ est majoré par $K|\overline{\gamma}| \leq K\frac{\ell(\gamma)}{m}$, pour une certaine constante K. Il s'ensuit que les taux de croissance exponentielle sont les mêmes :

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \frac{1}{n} \log \#\Big\{\gamma \in \pi_1(M),\ n-1 < \int_x^{\gamma y} F \leq n\Big\} \\
&\qquad = \limsup_n \frac{1}{n} \log \#\{\gamma \in \Gamma,\ n-1 < \ell(\overline{\gamma}) \leq n\} \\
&\qquad = 1 \ \text{(cf. Lemme 1).}
\end{aligned}$$

Le comportement de la série de Poincaré suit. ■

On suit alors la construction de Patterson ([33], [35]). On peut supposer que la série $P_1(p,p)$ diverge. Sinon on remplace $P_s(x,y)$ par $\overline{P}_s(x,y)$

$$\overline{P}_s(x,y) = \sum_{\gamma \in \pi_1(M)} \lambda\Big(\int_x^{\gamma y} F\Big) e^{-s\int_x^{\gamma y} F}$$

pour une fonction réelle λ telle que $\frac{\lambda(t+a)}{\lambda(t)} \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow \infty$ et que $\overline{P}_1(p,p) = +\infty$. On définit alors, pour $s > 1$, la mesure μ_x^s sur $\widetilde{M}$ par :

$$\mu_x^s = \frac{\sum_{\gamma \in \pi_1(M)} e^{-s\int_x^{\gamma p} F} \delta_{\gamma p}}{P_s(p,p)},$$

où δ_z est la mesure de Dirac en z. On choisit une suite $\{s_i\}$, $s_i \searrow 1$ telle que les mesures de probabilité $\mu_p^{s_i}$ convergent faiblement sur $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ vers une mesure de probabilité μ_p. Alors, le long de la même sous-suite $\{s_i\}$, les mesures $\mu_x^{s_i}$ convergent vers une mesure μ_x et la famille $x \to \mu_x$ est une famille équivariante de mesures. En effet quand $s_i \searrow 1$, les mesures $\mu_p^{s_i}$ se concentrent vers $\partial\widetilde{M}$ et la mesure μ_p est portée par $\partial\widetilde{M}$. Remarquons que $\mu_s^{s_i}$ admet la densité $\rho_x^{s_i}$ par rapport à la mesure $\mu_p^{s_i}$, avec $\rho_x^{s_i}(\gamma p) = e^{-s_i\left(\int_x^{\gamma p} F - \int_p^{\gamma p} F\right)}$. Quand le point γp se rapproche d'un point ξ du bord, les différences $\int_x^{\gamma p} F - \int_p^{\gamma p} F$ convergent uniformément vers $-\log \rho_x(\xi) = \int_p^x \alpha_\xi$ où α_ξ est la 1-forme stable définie par la formule (8). Si $x \in \widetilde{M}$, les mesures $\pi_x^{s_i} = \rho_x^{s_i}\mu_p^{s_i}$ convergent donc vers la mesure $\mu_x = \rho_x\pi_p$. On a bien obtenu une famille équivariante $x \to \mu_x$ de mesures sur le bord ; le cocycle Höldérien associé est bien le cocycle associé à F par (8) et (4).

Reste à montrer l'unicité de la famille obtenue. Cela suivra de l'ergodicité et du mélange du flot géodésique discutés dans le prochain paragraphe.

e) Ergodicité.

Au paragraphe précédent, nous avons associé à une fonction F de classe C_s^2 et telle que $P(-F) = 0$, $\int_\gamma F \geq 0, \forall\gamma \in \Gamma$ une famille de mesures transverses au feuilletage stable qui vérifie en particulier

$$\frac{d\theta_t\mu_{\theta_{-t}T}}{d\mu_T}(v) = e^{-\int_{-t}^0 F(\theta_s v)\,ds} \tag{14}$$

pour toute transversale T.

La fonction $v \longrightarrow F(-v)$ n'est en général pas de classe C_s^2, mais il existe une fonction G de classe C_s^2 et une fonction U de classe C_s^0, différentiable le long du flot telles que

$$G(v) = F(-v) + XU(v)$$

(la fonction G est associée au cocycle $\check{c}$ du corollaire 2). La même construction donne une famille de mesures transverses au feuilletage stable ν qui vérifie

$$\frac{d\theta_{-t}\nu_{\theta_t T}}{d\nu_T}(v) = e^{\int_0^t G(\theta_s v)\,ds}. \tag{15}$$

L'image $\overline{\mu}$ par antipodie $(w \to -w)$ de la famille de mesures $e^{-U}\nu$ est donc une famille de mesures transverses au feuilletage *instable* qui vérifie en particulier :

$$\frac{d\theta_t\overline{\mu}_{\theta_{-t}T}}{d\overline{\mu}_T}(v) = e^{\int_{-t}^0 F(\theta_s v)\,ds} \tag{16}$$

pour toute transversale T.

Considérons un disque D transverse au flot. Il existe un ouvert O de D où $W^u \cap D$ et $W^s \cap D$ forment deux feuilletages Höldériens transverses. Les feuilles de $W^u \cap D$

(respectivement $W^s \cap D$) sont transverses au feuilletage stable (respectivement instable) et le produit des mesures $\mu_{W^u \cap D}$ et $\overline{\mu}_{W^s \cap D}$ (voir [24], page 356) définit une mesure sur O. Il suit de (14) et (16) que la mesure ainsi définie sur les transversales au flot est invariante par le flot géodésique. Nous avons donc construit une mesure m invariante par le flot géodésique, pour laquelle les feuilletages stable et instable sont absolument continus (*i.e.* la mesure est localement équivalente à une mesure produit). La mesure m est finie par compacité. L'argument d'Anosov ([1], [8]) s'applique et montre que le flot est ergodique et mélangeant pour cette mesure.

L'unicité de la famille de mesures transverses satisfaisant (14) suit de cette construction. En effet supposons que nous avons une autre famille de mesures transverses vérifiant (14). Alors la construction précédente associe à $\overline{\mu}$ et μ' une autre mesure invariant m', qui est également finie et ergodique.

LEMME 3. — *Les mesures m et m' sont proportionnelles.*

Preuve du lemme 3. — Soit en effet f une fonction continue sur SM et posons

$$\bar{f} = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{-t}^{0} f(\theta_s v)\, ds.$$

La fonction $\bar{f}$ est mesurable et constante sur les feuilles instables. Par ergodicité le nombre $\int f dm$ (respectivement $\int f dm'$) est le seul nombre a (respectivement a') tel que $\bar{f} = a/m(SM)$ (respectivement $a'/m'(SM)$) m-presque partout (respectivement m'-presque partout). Mais m et m' ont les mêmes ensembles de feuilles instables négligeables, à savoir les ensembles qui rencontrent les transversales au feuilletage instable en un ensemble $\overline{\mu}$-négligeable. Il vient donc $\frac{1}{m(SM)} \int f dm = \frac{1}{m'(SM)} \int f dm'$. Cette égalité étant vraie pour toute fonction continue f les deux probabilités $m/m(SM)$ et $m'/m'(SM)$ coïncident.

Nous pouvons terminer la démonstration du théorème 4.

D'après le paragraphe **d)**, il existe une famille de mesures transverses associée à un cocycle Höldérien normalisé et d'après le lemme 3, cette famille est unique. ∎

Les constructions ci-dessus donnent aussi la preuve du théorème 2..

Les propriétés *ii), iii), iv)* du théorème 1.d sont équivalentes par le théorème 4 et entraînement bien sûr la propriété *i)*. Supposons alors que deux familles de mesures transverses μ et μ' aient les mêmes ensembles négligeables. L'argument du lemme 3 (appliqué maintenant au feuilletage stable !) montre que les mesures transverses au feuilletage instable associées $\overline{\mu}$ et $\overline{\mu}'$ ont aussi les mêmes ensembles négligeables et que de plus $\mu \times \overline{\mu} \times dt = \mu' \times \overline{\mu}' \times dt$ est la même mesure invariante m. Examinons une troisième famille de mesures sur les feuilles instables fortes : les mesures conditionnelles μ'' de m, définies à une constante près. Il suit de l'argument de [25], Corollary 6.1.4 que les fonctions $\log \frac{d\mu''}{d\mu}$ et $\log \frac{d\mu''}{d\mu'}$ sont Höldériennes. Alors $\log \frac{d\mu'}{d\mu}$ est une fonction continue et les familles μ et μ' ont les mêmes périodes. Ceci achève la démonstration du théorème 1.d.

IV. Métriques conformes et birapport

Les théorèmes 2.e et 2.g sont dus à Hamenstädt (voir [18] pour les preuves complètes). Pour le confort du lecteur, nous rappelons les principales constructions qui interviennent dans ces preuves avec les notations de ce texte.

a) Métrique conforme.

Soit c un cocycle Höldérien pair normalisé. Fixons de nouveau une métrique de référence g_0 et un point p de $\widetilde{M}$.

D'après le corollaire 1, il existe une fonction Höldérienne F sur T^1M avec les propriétés suivantes :

$$\int_\gamma F = \ell(\gamma) \qquad \text{pour tout } \gamma \text{ de } \Gamma$$

$$P(-F) = 0, \; F(v) = F(-v) \qquad \text{pour tout } v \text{ de } T^1M$$

et il existe des constantes > 0, A et B telle que pour tout f de $\mathbf{R}$, tout v de T^1M

$$\int_0^t F(\theta_s v)\, ds \geq A|t| - B\,. \tag{17}$$

Pour établir la dernière propriété, on remarque que d'après le lemme 1, $\inf\left\{ \int F dm;\, m \right.$: probabilité θ invariante$\left.\right\} > 0$ et donc que

$$\lim_t \frac{1}{t}\Big(\inf_v \int_0^t F(\theta_s v)\, ds\Big) > 0\,.$$

Soient alors $\xi_1, \xi_2 \in \partial\widetilde{M}$. On note γ_i, $i = 1, 2$, la géodésique partant de p et telle que $\gamma_i(+\infty) = \xi_i$. On pose alors :

$$\beta(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2} \lim_{t_1,t_2\to\infty} \int_0^{t_1} F(\dot\gamma_1(s))\, ds + \int_0^{t_2} F(\dot\gamma_2(s))\, ds - \int_a^b F(\dot\gamma_{t_1,t_2}(s))\, ds\,.$$

où γ_{t_1,t_2} est la géodésique telle que $\gamma_{t_1,t_2}(a) = \gamma_1(t_1)$, $\gamma_{t_1,t_2}(b) = \gamma_2(t_2)$. Rappelons que la métrique de référence est construite à partir du produit de Gromov $(\xi,\eta)_p$:

$$(\xi_1,\xi_2)_p = \frac{1}{2} \lim_{t_1,t_2\to\infty} \big(t_1 + t_2 - d(\gamma_1(t_1),\gamma_2(t_2))\big)\,.$$

De (17) suit alors qu'il existe des constantes A', A'', B', B'' telles que :

$$A'(\xi,\eta)_p - B' \leq \beta(\xi,\eta) \leq A''(\xi,\eta)_p + B''\,. \tag{18}$$

On remarque qu'il existe une constante δ telle que pour tous ξ_1, ξ_2, ξ_3 de $\partial\widetilde{M}$, $\beta(\xi_1,\xi_2) \geq \inf\left(\beta(\xi_1,\xi_3), \beta(\xi_2,\xi_3)\right) - \delta$. On montre alors, comme par exemple dans [11], chap. 7 qu'il existe $\kappa > 0, \varepsilon_0, C$ et une distance d' sur $\partial\widetilde{M}$ tels que quand

$$d'(\xi_1,\xi_2) \leq \varepsilon_0, \quad |\log d'(\xi_1,\xi_2) + \kappa\beta(\xi_1,\xi_2)| \leq C\,.$$

D'après (18) la métrique d' est quasi-conforme à la métrique de référence. De plus, on a pour tous γ de $\pi_1(M)$, ξ_1, ξ_2 de $\partial\widetilde{M}$ tels que $d(\xi_1,\xi_2) \leq \varepsilon_0$, $d(\gamma\xi_1,\gamma\xi_2) \leq \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}\beta(\gamma\xi_1,\gamma\xi_2) &- \beta(\xi_1,\xi_2)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^{t+b_{p,\xi_i}(\gamma^{-1}p)} F\big(\dot\gamma_{\gamma^{-1}p,\xi_i}(s)\big)\,ds - \int_0^t F\big(\dot\gamma_i(s)\big)\,ds\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(\overline{c}(\gamma,\xi_1) + \overline{c}(\gamma,\xi_2)\big)\end{aligned}$$

où $\overline{c}(\gamma,\xi)$ est le cocycle Höldérien cohomologue à c associé à F par la formule (12). La métrique d' est donc conforme de cocycle $\kappa\overline{c}(\gamma,\xi)$. Nous avons bien associé à un cocycle Höldérien normalisé pair une métrique conforme avec les périodes proportionnelles. De plus à des cocycles cohomologues sont associées des métriques équivalentes.

b) Mesure de Hausdorff.

Considérons maintenant une métrique conforme d et son cocycle Höldérien pair c. Du fait que la métrique est quasi-conforme à la métrique de référence, on déduit que les périodes $\{\ell(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$ vérifient $0 < \inf_\gamma \frac{\ell(\gamma)}{|\gamma|} \leq \sup_\gamma \frac{\ell(\gamma)}{|\gamma|} < +\infty$. En particulier, il existe $\kappa > 0$ tel que le cocycle κc est normalisé. Soit alors ω_p la mesure de Patterson construite au paragraphe III, d). La mesure ω_p est comparable à la mesure de Hausdorff sphérique de dimension κ définie par la métrique d. Plus précisément :

LEMME 4. — *Il existe $\varepsilon_1 \geq 0$, M tels que pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$:*

$$\big|\log \varepsilon^{-\kappa}\omega_p(B(\xi,\varepsilon)\big| \leq M\,.$$

Démonstration du lemme 4. — Soient $\xi \subset \partial\widetilde{M}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, et on choisit F Höldérienne paire dans la classe de Livtchits représentant le cocycle c. Par quasi-conformité entre d' et la métrique de référence, il existe K et $T(\xi,\varepsilon)$ tels que

$$\{\eta; (\eta|\xi)_p \leq T(\xi,\varepsilon) + K\} \subset B(\xi,\varepsilon) \subset \{\eta : (\eta|\xi)_p \leq T(\xi,\varepsilon)\}\,. \tag{19}$$

Soit $v_\xi = \tau_p^{-1}\xi$; on choisit une orbite périodique qui piste la projection sur T^1M de $\{\theta_s v_\xi,\ L \leq s \leq T(\xi,\varepsilon)\}$, où L est un nombre indépendant de ε choisi plus loin. L'orbite périodique se relève en une orbite qui piste $\{\theta_s v_\xi,\ L \leq s \leq T(\xi,\varepsilon)\}$ et on choisit γ

l'élément de $\pi_1(M)$ dont l'axe est ce relevé. On trouve alors deux constantes L_0, L_1 qui ne dépendent que de L et de la géométrie de g_0 telles que

$$(20) \qquad \begin{cases} \{\eta : (\eta|\gamma^{-1}\xi)_p \leq L_1\} \subset \gamma^{-1}\{\eta : (\eta|\xi)_p \leq T(\xi,\varepsilon) +.K\} \\ \text{et} \\ \gamma^{-1}\{\eta : (\eta|\xi)_p \leq T(\xi,\varepsilon)\} \subset \{\eta : (\eta|\gamma^{-1}\xi)_p \leq L_2\}. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs choisir L pour que $L_1 \geq \log 1/\varepsilon_0$. De (19) et (20) suit que les quantités $|\log \text{diamètre}\, \gamma^{-1}B(\xi,\varepsilon)|$ et $|\log \omega_p \gamma^{-1}B(\xi,\varepsilon)|$ sont bornées indépendamment de ε. Remarquons alors que par définition de la mesure conforme, on a également une borne indépendante de ε pour :

$$(21) \qquad |\log \text{diamètre}\, \gamma^{-1}B(\xi,\varepsilon) - \log \varepsilon - c(\gamma^{-1},\xi)|\,.$$

De même par la propriété de quasi-invariante de ω_p, la quantité

$$(22) \qquad |\log \omega_p \gamma^{-1}B(\xi,\varepsilon) - \kappa c(\gamma^{-1},\xi) - \log \omega_p B(\xi,\varepsilon)|$$

est également bornée indépendamment de ε. Le lemme 4 suit en éliminant $\kappa c(\gamma^{-1},\xi)$ entre (21) et (22). ∎

Il suit du lemme 4 que la dimension de Hausdorff de $\partial\widetilde{M}$ pour la métrique d est κ et que la κ-mesure de Hausdorff est positive et finie. De plus la κ-mesure de Hausdorff μ satisfait $\frac{d\gamma^{-1}\mu}{d\mu}(\xi) = e^{-\kappa c(\gamma,\xi)}$. D'après la section III, e) la κ-mesure de Hausdorff est proportionnelle à la mesure ω_p.

Rappelons qu'à la section III, e) nous avons associé à la mesure ω_p une mesure m invariante par le flot qui transversalement aux géodésiques est de la forme $\check{\omega}_p \times \omega_p$ où $\check{\omega}_p$ et ω_p sont les mesures transverses au feuilletage instable et stable respectivement associées à $v \to F(-v)$ et à $v \to F(v)$. En relevant la mesure m à $T^1\widetilde{M}$, et en identifiant $T^1\widetilde{M}$ à $(\partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \Delta) \times \mathbf{R}$ de sorte que le flot géodésique soit la translation sur la composante $\mathbf{R}$, on obtient une mesure $\pi_1(M)$-invariante sur $(\partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}) \setminus \Delta)$, ergodique, de la forme $e^{-G}\mu \times \mu$ où μ est la κ-mesure de Hausdorff de $(\partial\widetilde{M}, d)$. De plus, par ergodicité la mesure est symétrique.

La conclusion de ce paragraphe est qu'à une métrique conforme d on associe la dimension de Hausdorff κ de $(\partial\widetilde{M}, d)$ et un courant de Gibbs symétrique de mesure marginale la κ-mesure de Hausdorff de $(\partial\widetilde{M}, d)$. À deux métriques équivalentes est associé le même courant de Gibbs, bien sûr à une éventuelle constante de proportionnalité près.

c) Birapport.

Soit m un courant de Gibbs symétrique m. Dans cette section, nous associons à m un birapport. Considérons les deux mesures M_1, et M_2 sur $\partial\widetilde{M}^4$ définies de la manière suivante : $M_1(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_1', d\xi_2')$ est la mesure produit des mesures $m(d\xi_1, d\xi_1')$ et

$m(d\xi_2, d\xi_2')$; $M_2(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_1', d\xi_2')$ est la mesure produit des mesures $m(d\xi_1, d\xi_2')$ et $m(d\xi_2, d\xi_1')$. Les deux mesures M_1 et M_2 sont toutes deux $\pi_1(M)$-invariantes et ont des densités par rapport à la même mesure $\mu \times \mu \times \mu \times \mu$. La dérivée de Radon-Nykodym $\frac{dM_1}{dM_2}$ est une fonction $\pi_1(M)$-invariante, Höldérienne sur $\partial \widetilde{M}^4 \setminus \{(\xi_1, \xi_2) \cap (\xi_1', \xi_2') \neq \emptyset\}$ et qui satisfait les propriétés de la définition 1.f). C'est le birapport associé à m. Vérifions que les périodes de ce birapport sont bien les périodes de μ. Nous avons, si $m = e^{-G}\mu \times \mu$,

$$\log \frac{dM_1}{dM_2}(\gamma\xi, \xi, \gamma^-, \gamma^+) = -G(\gamma\xi, \gamma^-) - G(\xi, \gamma^+) + G(\xi, \gamma^-) + G(\gamma\xi, \gamma^+) .$$

L'invariance de la mesure $m = e^{-G}\mu \times \mu$ s'écrit :

$$G(\gamma\xi, \gamma\eta) - G(\xi, \eta) = \log \frac{d\gamma^{-1}\mu^t}{d\mu^t}(\xi) - \log \frac{d\gamma^{-1}\mu^t}{d\mu^t}(\eta).$$

D'où :

$$G(\xi, \gamma^-) - G(\gamma\xi, \gamma^-) = \ell(\gamma) + \log \frac{d\gamma^{-1}\mu}{d\mu}(\xi)$$

$$G(\gamma\xi, \gamma^+) - G(\xi, \gamma^+) = \ell(\gamma) - \log \frac{d\gamma^{-1}\mu}{d\mu}(\xi) .$$

Les périodes du birapport associé à m sont bien $\{\ell(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$. En particulier, le birapport est normalisé.

d) Cocycle.

Nous achevons la preuve du théorème 2.g en associant à un birapport Höldérien un cocycle Höldérien pair de mêmes périodes. En particulier, le cocycle est normalisé si, et seulement si, le birapport est normalisé. Nous suivons [18]. Notons pour tout v de $T^1\widetilde{M}$, $S_v(\widetilde{M})$ l'ensemble des vecteurs de $P^1\widetilde{M}$ orthogonaux à v et λ_v la mesure de Lebesgue sur S_v. Pour tout t réel, le transport parallèle Θ_t le long de la géodésique γ_v définit une isométrie de $S_v(\widetilde{M})$ dans $S_{\theta_t v}(\widetilde{M})$. En particulier $\Theta_t\lambda_v = \lambda_{\theta_t v}$.

Posons

$$C_t(v) = \frac{1}{2}\int_{S_v(\widetilde{M})} B\big(\gamma_w(+\infty), \gamma_{\Theta_t w}(+\infty), \gamma_v(-\infty), \gamma_v(+\infty)\big)d\lambda_v(w) .$$

L'intégrale est bien définie car comme w est orthogonale à v, $\gamma_w(+\infty)$ et $\gamma_{\Theta_t w}(+\infty)$ sont à un distance bornée inférieurement de $\gamma_v(-\infty)$ et de $\gamma_v(+\infty)$. On vérifie facilement que C_t est Höldérienne, $\pi_1(M)$-invariante et est un "cocycle" du flot θ_t

$$C_{t+s}(v) = C_s(v) + C_t(\theta_s v) .$$

On pose alors

$$c(\gamma, \xi) = \lim_{t\to\infty} C_{t+b_{(p,\xi)}(\gamma^{-1}p)}(\gamma^{-1}v) - C_t(v) .$$

On vérifie que c est un cocycle Höldérien. Ses périodes sont données par

$$c(\gamma,\gamma^+) = \lim_{t\to\infty} C_{t+|\gamma|}(\gamma^{-1}p,\gamma^+) - C_t(p,\gamma^+)\,.$$

Notons alors q le point de l'axe de γ tel que $b_{p,\gamma+}(q) = 0$. Puisque C_t est un cocycle Höldérien $\pi_1(M)$-invariant, il existe une constante K telle que pour tout $t \geq 0$, $n \in \mathbf{Z}$

$$|C_t(p,\gamma^+) - C_t(q,\gamma^+)| \leq K$$
$$|C_t(\gamma^n p,\gamma^+) - C_t(\gamma^n q,\gamma^+)| \leq K\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
c(\gamma,\gamma^+) &= \frac{1}{n}c(\gamma^n,\gamma^+)\\
&= \lim_n \frac{1}{n}\lim_{t\to\infty}\left(-C_{t+|\gamma^n|}(\gamma^{-n}q,\gamma^+)+C_t(q,\gamma^+)\right)\\
&= \lim_n -\frac{1}{n}C_{|\gamma^n|}(\gamma^{-n}q,\gamma^+)\\
&= \lim_n -\frac{1}{n}\frac{1}{2}\int_{S_{(\gamma^{-n}q,\gamma^+)}\widetilde{M}} B\left(\gamma_w(+\infty),\gamma_{\Theta_{|\gamma^n|}w}(+\infty),\gamma^-,\gamma^+\right)d\lambda_{(\gamma^{-n}q,\gamma^+)}(w)\\
&= \ell(\gamma)+\lim_n \frac{1}{n}\frac{1}{2}\int_{S_{q,\gamma^+}\widetilde{M}} B\left(\gamma_{\Theta_{|\gamma^n|}w}(+\infty),\gamma^n\gamma_w(+\infty),\gamma^-,\gamma^+\right)d\lambda_{q,\gamma^+}(w)\\
&= \ell(\gamma)
\end{aligned}$$

car l'intégrale est bornée indépendamment de n par $\sup_{v,w\in S_{q,\gamma^+}(\widetilde{M})} B\big(\gamma_v(+\infty),\gamma_w(+\infty),$ $\gamma^-,\gamma^+\big)$. On vérifie de même que le birapport associé au cocycle c que nous venons de construire par a), b) et c) est bien le même birapport (ce qui démontre aussi le théorème 1.f d'Otal).

V. Applications

Grâce à ses multiples représentations, la notion de classe de cocycle Höldérien fournit un cadre naturel pour reformuler plusieurs questions. Notons $\mathcal{C}$ l'espace des classes de cocycles Höldériens pairs normalisés.

Par le théorème 2.g, l'ensemble $\mathcal{C}$ est mis en bijection avec un sous-ensemble d'un espace de fonctions sur $\partial\widetilde{M}^4 \setminus \Delta$ et par le théorème 1.a avec un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^{+\Gamma})$.

L'espace des métriques de courbure strictement négative à isométrie près se plonge de plusieurs manières dans $\mathcal{C}$. Le cocycle naturel de Busemann évoqué dans l'introduction à des périodes proportionnelles aux longueurs des géodésiques fermées.

On conjecture qu'en dimension 2 cette application est surjective (cf. [9]). Savoir si elle est injective est le problème de savoir si le spectre marqué des longueurs détermine la métrique, fait connu seulement en dimension 2 ([10], [28]) ou si une des métriques est hyperbolique ([15]). Un autre cocycle est associé à la mesure de Lebesgue sur les variétés instables fortes : la mesure de Lebesgue définit bien une mesure transverse au sens de la définition 2, c'est la signification de la propriété de *continuité absolue* du feuilletage stable [2]. Savoir si ces deux cocycles sont cohomologues uniquement pour les espaces localement symétriques est le problème de rigidité entropique, résolu seulement en dimension 2 ([21]). Les périodes du cocycle de Lebesgue sont les Jacobiens instables des applications de Poincaré des orbites périodiques et sont déterminées aussi par le cocycle de Busemann ([15]). Le cocycle associé à la famille des mesures harmoniques est pair. En dimension 2, il est caractérisé par une relation supplémentaire satisfaite par le birapport ([3], théorème 13).

On peut étendre à ce cadre la notion de dimension conforme ([31]). Pour toute métrique conforme d, il existe κ_d tel que le cocycle $\kappa_d c_d$ est normalisé. Le nombre κ_d est la dimension de Hausdorff de $\partial\widetilde{M}$, en particulier $\kappa_d \geq n-1$. La dimension conforme de $\partial\widetilde{M}$ est définie par

$$\text{Dim conf} = \inf\{\kappa_d,\ d \text{ métrique conforme}\}.$$

Une question est de savoir si Dim conf est réalisé par une métrique conforme d_0, comme c'est le cas si M est un espace localement symétrique ([30]) ou pour certains espaces singuliers ([5]).

Enfin, à une suite de périodes $\{\ell(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$ d'un cocycle pair normalisé est associée une fonction zeta dynamique

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma \in \Gamma'} (1 - e^{-s\ell(\gamma)})^{-1} \tag{23}$$

où Γ' désigne l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments primitifs de $\pi_1(M)$. La série (23) définit une fonction méromorphe sur Re $s \geq 1-\varepsilon$ et a un pôle simple en 1 (voir [32]). Une question est de savoir lire des invariants sur cette fonction zeta dynamique.

Références

[1] D.V. ANOSOV. — *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. of Math. **90**, 1967.

[2] D.V. ANOSOV & Ya. SINAI. — *Some smooth ergodic systems*, Russian Math. Surveys **22-5** (1967), 103–167.

[3] F. BONAHON. — *The geometry of Teichmüller spaces via geodesic currents*, Invent. Math. **92** (1988), 139–162.

[4] M. BOURDON. — *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*, L'Enseignement Mathématique **41** (1995), 63–102.

[5] M. BOURDON. — *Au bord de certains polyèdres hyperboliques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), 119–141.

[6] R. BOWEN. — *The equidistribution of closed geodesics*, Amer. J. Math. **94** (1972), 413–423.

[7] R. BOWEN. — *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **94** (1972), 1–30.

[8] R. BOWEN & D. RUELLE. — *The ergodic theory for axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), 181–202.

[9] E. CAWLEY. — *Geometry of deformations of an Anosov flow on a 3-manifold*, Publications du CIRM, Résumés des colloques **5** (1993), 73.

[10] C. CROKE. — *Rigidity for surfaces of non positive curvature*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 150–169.

[11] E. GHYS & P. de la HARPE. — *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhäuser, 1990.

[12] M. GROMOV. — *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group*, unpublished.

[13] U. HAMENSTÄDT. — *A new description of the Bowen-Margulis measure*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **9** (1989), 455–464.

[14] U. HAMENSTÄDT. — *Entropy rigidity of locally symmetric spaces of negative curvature*, Ann. of Math. **131** (1990), 35–51.

[15] U. HAMENSTÄDT. — *Time preserving conjugacies of geodesic flows*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12** (1992), 67–74.

[16] U. HAMENSTÄDT. — *Regularity at infinity of compact negatively curved manifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **14** (1994), 493–514.

[17] U. HAMENSTÄDT. — *Harmonic measures realized as Hausdorff measures*, preprint Bonn, 1995.

[18] U. HAMENSTÄDT. — *Cocycles, Hausdorff measures and cross ratios*, preprint Bonn, 1995.

[19] J.-L. JOURNÉ. — *On a regularity problem occuring in connection with Anosov diffeomorphisms*, Comm. Math. Phys. **106** (1986), 345–351.

[20] V. KAIMANOVICH. — *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **53** (1990), 361–393.

[21] A. KATOK. — *Entropy and closed geodesics*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), 339–365.

[22] F. LEDRAPPIER. — *Harmonic measures and Bowen-Margulis measures*, Israel J. Math. **71** (1990), 275–287.

[23] F. LEDRAPPIER. — *Harmonic 1-forms on the stable foliation*, Bol. Soc. Brasil Mat. **25** (1994), 121–138.

[24] F. LEDRAPPIER. — *A renewal theorem for the distance in negative curvature*, Proc. Symp. Pure Math. **57** (1995), 351–360.

[25] F. LEDRAPPIER & L.-S. YOUNG. — *The metric entropy of diffeomorphisms, part. I*, Ann. of Math. **122** (1985), 509–539.

[26] A. LIVSIC. — *Homology properties of Y-systems*, Math. Notes **10** (1971), 754–757.

[27] R. de la LLAVE, J.-M. MARCO & R. MORIYON. — *Canonical perturbation theory of Anosov systems and*

regularity results for Livsic cohomology equation, Ann. of Math. **123** (1986), 536–611.

[28] J.-P. OTAL. — *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. Math. **131** (1990), 151–162.

[29] J.-P. OTAL. — *Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative*, Rev. Math. Jberoam **8** (1992), 441–456.

[30] P. PANSU. — *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. **129** (1989), 1–60.

[31] P. PANSU. — *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative*, Annales Acad. Sci. Fennicae, Series A I Mathematica **14** (1989), 177–212.

[32] W. PARRY & M. POLLICOTT. — *Zeta functions and the periodic orbits structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque **187–188** (1990), .

[33] S. PATTERSON. — *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), 241–273.

[34] D. SULLIVAN. — *The ergodic theory at infinity of a discrete group of hyperbolic isometries*, Ann. of Math. Stud. **97** (1981), 465–497.

[35] D. SULLIVAN. — *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Pub. Math. IHES **50** (1979), 171–209.

[36] P. WALTERS. — *An introduction to ergodic theory*, G.T.M. 79 Springer Berlin, 1982.

[37] C.-B. YUE. — *Rigidity and dynamics around manifolds of negative curvature*, Math. Research Letters **1** (1994), 123–147.

François LEDRAPPIER
URA 169
Centre de Mathématiques
École Polytechnique
91128 PALAISEAU