Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Jean-Marc Schlenker

Un analogue du théorème d'Efimov en courbure variable

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 67-79
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__67_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (67–79)

UN ANALOGUE DU THÉORÈME D'EFIMOV EN COURBURE VARIABLE

Jean-Marc SCHLENKER

Résumé

On donne une démonstration directe d'un théorème sur l'impossibilité d'immerger isométriquement une surface complète dans une variété de dimension 3 à courbure plus grande.

Abstract

We give a direct proof of a theorem about the impossibility of isometrically immerging a complete surface in a 3-manifold with higher curvature.

1. Résultat

En 1901, Hilbert [HIL01] montrait qu'il n'existe pas d'immersion isométrique régulière du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Ce résultat était ensuite amélioré par Efimov qui prouvait qu'il n'existe pas de surface complète C^2-immergée dans $\mathbb{R}^3$ à courbure uniformément négative. On pourra trouver dans [MIL72], [BS92], [ROZ92] ou [EFI68] d'intéressantes présentations de ce résultat.

Nous allons donner ici un analogue de ce théorème en courbure variable. Plus précisément, le résultat est le suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit (M, μ) une variété riemannienne de dimension 3 dont la courbure sectionnelle est comprise entre K_2 et K_3, et (Σ, σ) une surface riemannienne complète à courbure inférieure à K_1, avec $K_1 < 0$, $K_1 < K_2 \leq K_3$, et*

– *soit* $K_3 \geq 0$ *et* $(K_3 - K_2)^2 < 16|K_1|(K_2 - K_1)$

Classification math. : 35L70, 58G15, 53C42, 54A05, 53C50.

- *soit* $K_3 \leq 0$ *et* $(K_3 - K_2)^2 < 16(K_3 - K_1)(K_2 - K_1)$

Supposons enfin que les gradients des courbures sectionnelles de (M, μ) et de (Σ, σ) sont bornés. Alors il n'existe pas d'immersion isométrique C^3 de (Σ, σ) dans (M, μ).

La démonstration de ce résultat sera aussi élémentaire que possible. En particulier, on ne donnera aucun détail sur la dualité qui intervient dans ce problème, et qui est en fait un cas particulier d'un phénomène général pour les équations de Monge-Ampère (voir [SCH95a]). On n'abordera pas non plus les relations entre le résultat qu'on démontre et les propagations des dégénérescences pour les équations de Monge-Ampère hyperboliques (cf. [SCH95a], [SCH95b]). De plus, on donnera sans démonstration un lemme simple mais important dans le cas où la courbure de l'espace M est variable, si bien que la preuve ne sera complète que dans le cas où cette courbure est constante, ce qui est quand même un résultat nouveau. La démonstration de ce lemme se trouve dans [SCH95b].

Par ailleurs, on pourra trouver dans [SCH95b] divers raffinements ou variantes de ce résultat, ainsi que des considérations sur l'optimalité du théorème (en ce qui concerne les bornes de courbure) et plus de détails dans les démonstration de certaines assertions de la section 2. Par contre, [SCH95a] replace les constructions données ici dans un cadre plus général.

Les résultats que nous décrivons ont été obtenus essentiellement lors de la préparation d'une thèse sous la direction de François Labourie, que je tiens à remercier pour ses remarques.

2. Dualité

Nous allons montrer dans cette section que la donnée d'une immersion isométrique permet de définir des objets sur la surface induite, et qu'ils ont des propriétés particulières.

On se donnera dans la suite une surface complète (Σ, σ) et une variéte de dimension 3 (M, μ) respectant les conditions du théorème 1.1, et on supposera qu'il existe une immersion isométrique ϕ de l'une dans l'autre. On notera ∇^M la connexion de Levi-Civita de (M, μ), et ∇^Σ celle de (Σ, σ). On rappelle qu'on dispose alors sur Σ d'une métrique, la "troisième forme fondamentale" de ϕ, définie par :

$$\forall s \in \Sigma,\ \forall u, v \in T_s\Sigma,\ I\!I\!I(u, v) := \mu(\nabla^M_{\phi_* u} N, \nabla^M_{\phi_* v} N)$$

où on a noté N le vecteur normal à la surface immergée obtenue de ϕ. On peut donc introduire la "matrice de changement de métrique" entre σ et $I\!I\!I$, qui est le morphisme de fibrés $B : T_s\Sigma \to T_s\Sigma$ symétrique (pour σ) tel que

$$\forall s \in \Sigma,\ \forall u, v \in T_s\Sigma,\ I\!I\!I(u, v) = \sigma(Bu, Bv)$$

On note que les équations de Codazzi-Mainardi peuvent se ré-interpréter sous la forme :

$$d^{\nabla}B(u,v) = -R(u,v)N \tag{1}$$

où on a assimilé deux vecteurs $u, v \in T_s\Sigma$ à leurs images dans TM par ϕ_*. De même, l'équation de Gauss s'exprime comme :

$$\det(B(s)) = K^{\Sigma} - K^{M}(\mathrm{Im}(\phi_*(s))) \tag{2}$$

On définit maintenant une connexion sur Σ de la façon suivante : si u, v sont deux champs de vecteurs sur Σ, on décide que

$$\tilde{\nabla}_u v := B^{-1}\nabla_u(Bv)$$

Il est aisé de vérifier que $\tilde{\nabla}$ est compatible avec $I\!I\!I$. Par contre, sa torsion est en général non nulle et on a seulement le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. — *Soit $s \in \Sigma$. La torsion de $\tilde{\nabla}$ en s est majorée par :*

$$\|\tilde{\tau}\|_{I\!I\!I} \leq \tau_0(\phi(s)) = \frac{K_M - K_m}{2\sqrt{(K_m - K_1)(K_M - K_1)}}$$

K_M et K_m étant respectivement le maximum et le minimum des courbures sectionnelles des 2-plans tangents à M en $\phi(s)$.

Démonstration . — On déduit de la définition de $\tilde{\nabla}$ que :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(X,Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y] \\ &= B^{-1}\nabla_X(BY) - B^{-1}\nabla_Y(BX) - [X,Y] \\ &= B^{-1}(d^{\nabla}B)(X,Y) \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\tau}\|^2_{I\!I\!I} &= I\!I\!I(B^{-1}(d^{\nabla}B)(X,Y), B^{-1}(d^{\nabla}B)(X,Y)) \\ &= I((d^{\nabla}B)(X,Y),(d^{\nabla}B)(X,Y)) \\ &= \|(d^{\nabla}B)(X,Y)\|^2_I \end{aligned}$$

Notons (e_1, e_2) la base orthonormée de $T_s\Sigma$ qui diagonalise B, et k_1, k_2 les valeurs propres associées. Il suffit de montrer la majoration qui se trouve plus haut en remplaçant $\|\tilde{\tau}\|_{I\!I\!I}$ par $\tilde{\tau}(e_1,e_2)/(k_1k_2)$, car $\tilde{\tau}$ est antisymétrique dans ses deux arguments, et $((1/k_1)e_1, (1/k_2)e_2)$ est une base orthonormée de $T_s\Sigma$ pour $I\!I\!I$.

Or par la formule de Gauss, $\tilde{\tau}(e_1,e_2) = -B^{-1}R(e_1,e_2)n$, donc il nous suffit pour conclure de montrer que, sous les hypothèses de courbures qu'on s'est fixées, on a pour tout $m \in M$ et pour toute base orthonormée (x,y,n) de T_mM que

$$\frac{\|R(x,y)n\|_{\sigma}}{K(x,y) - K_1} \leq \tau_0$$

$K(x,y)$ étant la courbure sectionnelle du 2-plan engendré par x et y. En notant $\check{R}$: $\Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ l'opérateur de courbure et μ la métrique sur $\Lambda^2 M$ déduite de la métrique sur M, il nous suffit donc de montrer que si pour $m \in M$ et pour $v, w \in \Lambda^2_m M$ unitaires orthogonaux on a $K_2 \leq \mu(\check{R}v, w) \leq K_3$, alors on a dans les mêmes conditions sur v et w que

$$\left| \frac{\mu(\check{R}v, w)}{\mu(\check{R}v, v) - K_1} \right| \leq \tau_0(m)$$

Or choisissons un 2-plan $P \subset \Lambda^2_m M$. Notons Q la restriction de $\check{R}$ à P suivie de la projection orthogonale sur P, p_1, p_2 ses vecteurs propres et q_1, q_2 ses valeurs propres. Si maintenant $v, w \in P$ sont normés et orthogonaux, il s'écrivent $v = \cos(t)p_1 + \sin(t)p_2$ et $w = \sin(t)p_1 - \cos(t)p_2$, donc

$$\frac{\mu(Qv, w)}{\mu(Qv, v) - K_1} = \frac{(q_1 - q_2)\cos(\theta)\sin(\theta)}{q_1 \cos^2(\theta) + q_2 \sin^2(\theta) - K_1}$$

donc en posant $\alpha = \cos^2(\theta)$ on trouve que

$$\left| \frac{\mu(Qv, w)}{\mu(Qv, v) - K_1} \right|^2 = \frac{(q_1 - q_2)^2 \alpha(1 - \alpha)}{((q_1 - q_2)\alpha + q_2 - K_1)^2} \tag{3}$$

et est donc maximale quand

$$\alpha = \frac{K_1 - q_2}{2K_1 - q_1 - q_2}$$

En remplaçant α par cette valeur dans (3) puis en remarquant que le maximum est atteint pour $\{q_1, q_2\} = \{K_m, K_M\}$ on obtient la majoration annoncée de $\mu(Qv, w)/\mu(Qv, v) - K_1$ et donc de $I\!I\!I(\bar{\tau}, \bar{\tau})$. ■

On a aussi, sous les hypothèses du théorème 1.1, des informations précises sur la courbure $\tilde{K}$ de $\tilde{\nabla}$:

PROPOSITION 2.2. — *$\tilde{K}$ vérifie toujours: $0 < K_4 \leq \tilde{K} \leq K_5$ avec $K_4 = 1$ si $K_3 \leq 0$, $K_4 = K_1/(K_1 - K_3)$ si $K_3 \geq 0$.*

Démonstration . — Notons dv_σ et $dv_{I\!I\!I}$ les éléments d'aire associés aux métriques σ et $I\!I\!I$ sur Σ. D'après la formule de Gauss (2), on a $dv_{I\!I\!I} = K_e dv_\sigma$.

Choisissons un repère mobile (e_1, e_2) pour σ, et notons ω sa 1-forme de connexion. Alors (Be_1, Be_2) est un repère mobile pour $I\!I\!I$, et sa 1-forme de connexion pour $\tilde{\nabla}$ est encore ω. Les 2-formes de courbures coïncident donc aussi, et donc

$$K dv_\sigma = \Omega = \tilde{K} dv_{I\!I\!I} = \tilde{K} K_e dv_\sigma$$

Les inégalités sur $\tilde{K}$ découlent directement de cette formule ; en effet,

$$\tilde{K} = \frac{K_\sigma}{K_e} \geq \frac{K_\sigma}{K_\sigma - K_3}$$

La borne inférieure de $\tilde{K}$ est approchée :

- si $K_3 \geq 0$, quand $K_\sigma \to K_1$ et c'est $K_1/(K_1 - K_3)$;
- si $K_2 \leq 0$, quand $K_\sigma \to \infty$ et c'est 1

On obtient de même une majoration de $\tilde{K}$, avec K_3 remplacé par K_2. ■

On trouve comme conséquence directe des deux résultats précédents le

Corollaire 1.— *Dans les conditions du théorème 1.1, $(\Sigma, I\!I\!I, \tilde{\nabla})$ est une surface à courbure $\tilde{K} \in [K_4, K_5]$ et à torsion bornée par $\tilde{\tau}_0$ avec $4K_4 > \tilde{\tau}_0^2$.*

3. Boucles asymptotiques

Commençons par un résultat simple qui montre que, bien qu'une équation très similaire à celle que vérifie B sur (Σ, σ) soit vérifiée par $\tilde{B} = B^{-1}$ sur $(\Sigma, I\!I\!I)$ munie de la connexion de Levi-Civita de $I\!I\!I$, le résultat est encore plus simple avec $\tilde{\nabla}$:

Proposition 3.1.— *On a sur $(\Sigma, I\!I\!I)$:*

$$d^{\tilde{\nabla}} \tilde{B} = 0 \tag{4}$$

Démonstration .— On calcule directement que pour $s \in \Sigma$ et $X, Y \in T_s\Sigma$:

$$\begin{aligned}(d^{\tilde{\nabla}} \tilde{B})(X,Y) &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{B}Y) - \tilde{\nabla}_Y(\tilde{B}X) - B^{-1}([X,Y]) \\ &= B^{-1}\nabla_X(BB^{-1}Y) - B^{-1}\nabla_Y(BB^{-1}X) - B^{-1}[X,Y] \\ &= B^{-1}0\end{aligned}$$

car ∇ est sans torsion. ■

Comme $\det(\tilde{B}) < 0$, il existe en chaque point deux vecteurs unitaires U, V définis à orientation près et tels que

$$\begin{aligned}\tilde{B}U &= kJ_{I\!I\!I}U \\ \tilde{B}V &= -kJ_{I\!I\!I}V\end{aligned}$$

où $J_{I\!I\!I}$ est la structure complexe associée à $I\!I\!I$ et $k = |\det(\tilde{B})|^{1/2} = (K^M(\phi_*(T\Sigma)) - K^\Sigma)^{-1/2}$.

On notera dorénavant θ l'angle entre U et V pour $I\!I\!I$; on gardera les conventions choisies plus haut, c'est à dire qu'on supposera $\theta \in]0, \pi[$. On peut remarquer que θ s'approche de 0 (ou de π) quand l'immersion "dégénère" : la courbure moyenne de ϕ est égale à $\cot(\theta)(|\det(\tilde{B})|)^{-1/2}$.

La proposition suivante et son corollaire décrivent un point important du comportement de U et V sur $(\Sigma, I\!I\!I)$ sous les hypothèses du théorème 1.1 :

PROPOSITION 3.2. — *Il existe un $\tau_1 > 0$ (dépendant seulement de K_1, K_2, K_3 et des bornes c_σ, c_μ sur les gradients de K^Σ, K^M) tel que :*

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nabla}_U V\| &\leq \tau_1 |\sin(\theta)| \qquad (5) \\ \|\tilde{\nabla}_V U\| &\leq \tau_1 |\sin(\theta)| \qquad (6) \end{aligned}$$

Démonstration . — On a d'après (4):

$$(d^{\tilde{\nabla}} \tilde{B})(U, V) = 0$$

et donc en développant cette expression et en notant ω_U et ω_V les normes (pour $I\!I\!I$) de $\tilde{\nabla}_U V$ et de $\tilde{\nabla}_V U$, et parce que θ est l'angle entre V et U :

$$\tilde{\nabla}_U(\tilde{B}V) - \tilde{\nabla}_V(\tilde{B}U) - \tilde{B}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U + \sin(\theta)\tau) = 0$$

donc

$$\tilde{\nabla}_U(kJ_{I\!I\!I}V) + \tilde{\nabla}_V(kJ_{I\!I\!I}U) - \tilde{B}(\omega_U J_{I\!I\!I}V) + \tilde{B}(\omega_V J_{I\!I\!I}U) = \sin(\theta)\tilde{B}\tau$$

et en utilisant que $\sin(\theta)J_{I\!I\!I}U = \cos(\theta)U - V$ et que $\sin(\theta)J_{I\!I\!I}V = U - \cos(\theta)V$ et en regroupant les termes:

$$-\omega_V U - \omega_U V + \left((V.\kappa) + \frac{\omega_U}{\sin(\theta)} - \frac{\omega_V \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) J_{I\!I\!I}U +$$

$$+\left((U.\kappa) + \frac{\omega_U \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\omega_V}{\sin(\theta)}\right) J_{I\!I\!I}V = \sin(\theta)\tilde{B}\tau$$

avec $\kappa = \ln(k^{-1}) = -\ln(k)$. En prenant le produit scalaire (associé à $I\!I\!I$) de cette équation avec U puis avec V et en utilisant la symétrie de $\tilde{B}$ par rapport à $I\!I\!I$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_V U &= \frac{\sin(\theta)}{2}(U.\kappa - I\!I\!I(\tau, \tilde{B}V))J_{I\!I\!I}U \qquad (7) \\ \tilde{\nabla}_U V &= \frac{\sin(\theta)}{2}(-V.\kappa - I\!I\!I(\tau, \tilde{B}U))J_{I\!I\!I}V \qquad (8) \end{aligned}$$

On peut ensuite exploiter les hypothèses qu'on a faites, en particulier sur les bornes sur les gradients des courbures, et on trouve que :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nabla}_U V\| &\leq \left|\frac{\sin(\theta)}{2}\right| \left(\left|\frac{V.K_e}{2K_e}\right| + \left|\frac{\tau_0}{k}\right|\right) \\ &\leq \left|\frac{\sin(\theta)}{4}\right| \left(\left|\frac{V.K_\sigma}{K_e}\right| + \left|\frac{V.K_\mu}{K_e}\right| + \frac{2\tau_0}{k}\right) \end{aligned}$$

donc en séparant dans $V.K_\mu$ ce qui correspond à la dérivée de K_μ et ce qui correspond à la rotation du plan tangent à la surface immergée quand on se déplace dans la direction de V, on a que :

$$\|\tilde{\nabla}_U V\| \leq \left|\frac{\sin(\theta)}{4}\right| \left(\left|\frac{V.K_\sigma}{kK_e}\right| + \left|\frac{(\tilde{\nabla}_{\phi_* V} K_\mu)(\phi_*(T_s\Sigma))}{kK_e}\right| + \|V\|_{I\!I\!I} \left|\frac{K_M}{K_e}\right| + \frac{2\tau_0}{k}\right)$$

puisque l'amplitude de la rotation de $\phi_* T_s \Sigma$ quand on se déplace sur Σ est justement mesurée par $I\!I\!I$. Mais $\|V\|_{I\!I\!I} = 1$, donc :

$$\|\tilde{\nabla}_U V\| \leq \left|\frac{\sin(\theta)}{4}\right| \left(\frac{|V.K_\sigma|}{|K_\sigma|^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{-K_\sigma}}{k}\right)^3 + \frac{|(\tilde{\nabla}_{\phi_* V} K_\mu)(\phi_*(T_s\Sigma))}{k^3} + \left|\frac{K_M}{K_e}\right| + \frac{2\tau_0}{k}\right)$$

et si on note k_m la valeur minimale de k, soit $k_m = \sqrt{K_2 - K_1}$, on obtient :

$$\|\tilde{\nabla}_U V\| \leq \left|\frac{\sin(\theta)}{4}\right| \left(c_\sigma (K_5)^{3/2} + \frac{c_\mu}{k^3} + \frac{|K_3|}{k_m^2} + \frac{2\tau_0}{k_m}\right)$$

d'où le premier résultat ; le même calcul donne le résultat correspondant pour $\|\tilde{\nabla}_V U\|$. ∎

Ces assertions préliminaires vont nous être utiles pour démontrer un lemme technique qui nous permettra de controler le comportement des courbes asymptotiques sur Σ. Nous devons, avant de l'énoncer, définir une notion de propagation : on dira qu'une courbe asymptotique $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$ se propage suivant V sur une distance D avec une variation d'angle δ si il existe une famille $(\gamma_t)_{t\in[0,D]}$ de boucles asymptotiques (courbes intégrales de U) telle que:

- $\gamma_0 = \gamma$;
- pour $t \in [0, D]$, $\|d\gamma_t(0))/dt\| = 1$;
- $d(\gamma_t(0))/dt$ et $d(\gamma_t(L_{\gamma_t}))/dt$ sont parallèles à V;
- pour $t \in [0, D]$, le transporté parallèle suivant $(\gamma_s(0))_{s\in[0,t]}$ de $V_{\gamma(0)}$ fait un angle au plus δ (en valeur absolue) avec $V_{\gamma_t(0)}$, et les bornes sup et inf des angles que font avec $V(\gamma_t(0))$ les transportés parallèles en $\gamma_t(0)$ des $U(\gamma_t(s))$ sont égales à celles obtenues pour $t = 0$, à δ près au plus.

On peut alors énoncer le lemme central suivant :

Lemme 2.— *Pour tout $\delta > 0$ et pour tout $T > 0$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que si γ est une courbe intégrale de V avec $L_\gamma \leq \epsilon$ et $d(\gamma(0), \gamma(L_\gamma)) \leq \epsilon L_\gamma$, alors γ se propage selon U (et selon $-U$) avec une variation d'angle au plus δ sur une distance T ou jusqu'au bord de $\tilde{D}$.*

Démonstration . — Soit donc $\gamma : [0, L] \to \tilde{D}$ une courbe intégrale de U, et $(\gamma_t)_{t\in[0,D]}$ comme ci-dessus. On paramètrera $(\gamma_t(u))_{t\in[0,T],u\in[0,L_\gamma]}$ de manière à avoir pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $u \in [0, L_\gamma]$:

$$\frac{d}{dt}\gamma_t(u) = l_t(u)V$$

et

$$\frac{d}{du}\gamma_t(u) = v_t(u)U$$

ainsi que, pour normaliser t:

$$\left(\frac{d}{dt}\gamma_t\right)(0) = V$$

On choisit un vecteur W_0 unitaire en $\gamma_0(0)$, ce qui nous permet de définir par transport parallèle un champ de vecteurs encore noté W_0 sur $\gamma_0([0, L_\gamma])$, puis sur $\gamma_{[0,T]}([0, L_\gamma])$, par rapport auquel on pourra définir les angles θ_U (resp. θ_V) de U (resp. V).

Choisissons ϵ' assez petit pour que la solution de : $y' = 2\tau_1 y + (2\tau_1 + 1)\epsilon'$ valant ϵ' en 0 soit au plus $\delta_\theta - 2\epsilon'$ en T. C'est possible par un argument de continuité.

(t, u) forment un système de coordonnées sur un domaine de Σ, donc $[vU, lV] = 0$ et donc, en notant $\lambda = \log(l)$ et $\nu = \log(v)$:

$$\begin{aligned} 0 &= [U, V] + (U.\lambda)V - (V.\nu)U \\ &= \omega_U J_{I\!I} V - \omega_V J_{I\!I} U + (U.\lambda)V - (V.\nu)U \\ &= \frac{\omega_U}{\sin(\theta)}(U - \cos(\theta)V) - \frac{\omega_V}{\sin(\theta)}(\cos(\theta)U - V) + (U.\lambda)V - (V.\nu)U \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (U.\lambda) &= \frac{1}{\sin(\theta)}(\cos(\theta)\omega_U - \omega_V) \\ (V.\nu) &= \frac{1}{\sin(\theta)}(\omega_U - \cos(\theta)\omega_V) \end{aligned}$$

Or (5) et (6) nous montrent que $|\omega_U| \leq \tau_1|\sin(\theta)|$ et que $|\omega_V| \leq \tau_1|\sin(\theta)|$; on en déduit que

$$|U.l| \leq 2l\tau_1 \quad (9)$$

$$|V.v| \leq 2v\tau_1 \quad (10)$$

Comme v_t est la norme de $\partial\gamma_t(s)/\partial s$ le long de γ_t, on peut déduire de (9) et (10) que

$$\left|\frac{d}{dt}L_{\gamma_t}\right| \leq 2\tau_1 L_{\gamma_t} \exp(2\tau_1 L_{\gamma_t}) \quad (11)$$

et donc que, si on a choisi L_γ assez petit (inférieur à une constante qui ne dépend que de τ_1 et de T) on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$L_{\gamma_t} \leq \exp(4\tau_1 t) L_\gamma$$

et donc que, toujours quitte a prendre L_γ assez petit, on a, pour $t \in [0, T]$, $2\tau_1 L_{\gamma_t} \leq \epsilon'$ et $2K_5 L_{\gamma_t} \leq \epsilon'$.

On va maintenant noter u_1 (resp. u_2) la coordonnée du point $\gamma(u)$ tel que l'angle entre $U(\gamma(0))$ et le transporté parallèle de $V(\gamma(u))$ suivant $\gamma([0, u])$ est minimum (resp. maximum), et $\pi - \delta_\gamma$ l'angle entre les transportés parallèles en $\gamma(0)$ de $V(\gamma(u_1))$ et de $V(\gamma(u_2))$. On utilisera enfin les mêmes notations pour les quantités analogues concernant les (γ_t), avec un indice t pour les distinguer.

Alors (5) et la définition des angles par transport parallèle de W_0 montrent que :

$$|\theta_V(\gamma_t(u_1(\gamma))) - \theta_V(\gamma_t(u_2(\gamma)))| \leq \epsilon'$$

De plus, on sait que

$$\theta_V(\gamma_t(u_1(\gamma))) \in \,]\theta_U(\gamma_t(u_1(\gamma))), \theta_U(\gamma_t(u_1(\gamma))) + \pi[\tag{12}$$

$$\theta_V(\gamma_t(u_2(\gamma))) \in \,]\theta_U(\gamma_t(u_2(\gamma))), \theta_U(\gamma_t(u_2(\gamma))) + \pi[\tag{13}$$

On voit donc que

$$\theta_V(\gamma_t(u_2(\gamma))) \in]\theta_U(\gamma_t(u_1(\gamma))) - \epsilon', \theta_U(\gamma_t(u_1(\gamma))) + \pi + \epsilon'[$$

et donc (en rapprochant les deux dernières équations) que

$$\theta_V(\gamma_t(u_2(\gamma))) \in]\theta_U(\gamma_t(u_2(\gamma))), \theta_U(\gamma_t(u_1(\gamma))) + \pi + \epsilon'[$$

En particulier

$$\theta(\gamma_t(u_2(\gamma))) \leq \delta_{\gamma_t} + \epsilon'$$

et de même

$$\pi - \theta(\gamma_t(u_1(\gamma))) \leq \delta_{\gamma_t} + \epsilon'$$

On déduit de ces inégalités, de (8) et du théorème de Gauss-Bonnet que

$$\frac{\partial \delta_{\gamma_t}}{\partial t} \leq 2\tau_1 \sin(\delta_{\gamma_t} + \epsilon') + 2K_5 L_{\gamma_t}$$

et la bornes sur $K_5 L_{\gamma_t}$ montre alors que

$$\frac{\partial \delta_{\gamma_t}}{\partial t} \leq 2\tau_1(\delta_{\gamma_t} + \epsilon') + \epsilon'$$

Le choix de ϵ' permet alors de conclure que si $\delta_\gamma \leq \epsilon'$, alors $\delta_{\gamma_T} \leq \delta_\theta$. De plus, la démonstration qu'on vient de voir a permis de borner en fait les variations de $U(\gamma_t(u_1))$ et de $U(\gamma_t(u_2))$ sur $[0, T]$; comme on a vu que $\theta_V(\gamma_t(u_2(\gamma))) \in]\theta_U(\gamma_t(u_2(\gamma))), \theta_U(\gamma_t(u_1(\gamma))) + \pi + \epsilon'[$, on obtient grâce au choix de ϵ' la borne voulue sur l'angle entre

$V(\gamma_t(0))$ et le transporté parallèle en $\gamma_t(0)$ de $V(\gamma_0(0))$, ce qui conclut la démonstration du lemme 2 ; le ϵ de l'énoncé est le minimum de ϵ' et des bornes qui apparaissaient sur L_γ. ∎

Pour $\epsilon > 0$, nous dirons qu'une courbe $\gamma : [0, L] \to S$ paramétrée par son arc-longueur est une ϵ-quasi-géodésique de vecteur directeur W s'il existe un champ de vecteurs unitaire W parallèle sur γ tel que :

$$\forall s \in [0, L], \ |\angle(V(\gamma(s)), \gamma'(s))| \leq \epsilon$$

On dispose alors du corollaire immédiat du lemme précédent, qui est le résultat qui nous sera utile par la suite :

COROLLAIRE 3. — *Dans les conditions du lemme 2, il existe une courbe asymptotique pour $\tilde{B}$ qui est une $(\delta + 3\tau_1\epsilon, \tilde{\nabla})$-quasi-géodésique de longueur T (ou allant jusqu'au bord) issue d'un point de ρ sur laquelle $|\sin(\theta)| \leq 2\epsilon$.*

4. Convexité du bord

Nous allons maintenant utiliser la propagation des boucles asymptotiques de la section précédente pour montrer que le bord $\partial_{I}\Sigma$ est nécessairement convexe au sens suivant :

DÉFINITION 4. — *$(\Sigma, \tilde{\nabla})$ est convexe si il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Sigma$ avec $d_{I}(x, y) \leq \epsilon$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de géodésiques de longueur au plus $2d_{I}(x, y)$ dont les extrémités convergent vers x, y respectivement.*

Le point important est alors le lemme suivant :

LEMME 5. — *Dans les conditions du théorème 1.1, $(\Sigma, \tilde{\nabla})$ est convexe.*

Pour simplifier un peu la démonstration, on se limitera à nouveau au cas où la torsion de $\tilde{\nabla}$ est nulle ; dans le cas général, les raisonnements que nous allons faire sont essentiellement valables, mais exigent plus de précautions et utilisent des lemmes techniques de la section 3 de [SCH95b].

Nous raisonnerons par l'absurde et supposerons que $(\Sigma, \tilde{\nabla})$ n'est pas convexe. Alors il existe $x_0, y_0 \in \Sigma$ ne vérifiant pas la définition de la convexité ci-dessus. On montre alors sans difficulté qu'il existe une courbe $\gamma : [0, L] \to \overline{\Sigma} = \Sigma \cup \partial_{I}\Sigma$ minimisante entre x_0 et y_0, et qu'elle est géodésique hors de $\partial_{I}\Sigma$, et localement convexe (sa concavité étant toujours dirigée vers l'extérieur de Σ aux points du bord). Par définition de x_0 et y_0, γ n'est pas géodésique. En considérant la courbure de γ, qui est une mesure localement soit positive, soit négative, on montre alors qu'il existe un domaine $D \subset \Sigma$ tel que :

1. $\overline{D} = D \cup \{p_0\}$, où $p_0 \in \partial_{I}\Sigma$;

2. $\partial D = P([-\epsilon, \epsilon]) \cup C$, où $P : [-\epsilon, \epsilon] \to \Sigma \cup \{p_0\}$ est une courbe paramétrée par son arc-longueur, avec $P(0) = p_0$, de courbure géodésique constante ϵ dirigée vers l'extérieur de Σ en p_0 ;

3. C est une courbe compacte de Σ joignant $P(-\epsilon)$ à $P(\epsilon)$.

On va utiliser la propagation des courbes asymptotiques pour montrer que la complètude de $(|si, \sigma)$ en p_0 entraine une contradiction. On remarque d'abord qu'il n'existe pas de courbe asymptotique dans D de longueur (pour $I\!I\!I$) bornée et qui converge à une de ses extrémité vers p_0, sans quoi la longueur pour σ de cette courbe serait finie, ce qui est impossible. On a en fait mieux :

PROPOSITION 4.1. — *Il existe un voisinage Ω de p_0 dans D qui ne contient aucun segment de courbe asymptotique de longueur plus grande qu'un certain $L_0 > 0$.*

Démonstration . — Supposons le contraire. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existerait un segment de courbe asumpotique de longueur au moins L_0 dans $B_\epsilon(p_0) \cap D$. Donc pour pour $\epsilon > 0$, il existerait un segment de courbe asymptotique $a : [0, L_0] \subset \mathbb{R}^+$ tel que $d_{I\!I\!I}(a(0), a(L_0)) \leq \epsilon$. On pourrait alors appliquer le corollaire 3 pour $\epsilon = 1/n$, et obtenir une suite (γ_n) de courbes asymptotiques $\gamma_n : [-T, T] \to \Sigma$, $1/n$-quasi-géodésiques, avec $\gamma_n(0) \to p_0$. Les γ_n ne pourraient pas rencontrer $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$ (car (Σ, σ) est complète) ; donc la définition de D montre que pour n assez grand (et si on a choisi T assez grand) ils devraient rencontrer C. Mais alors la σ-distance de C à p_0 serait bornée (car C est compact et les γ_n sont asymptotiques et de longueur bornée) ce qui est impossible. ■

Quitte à restreindre D, on peut donc supposer qu'il existe un L_0 qui borne les longueurs des segments de courbes asymptotiques de D.

Considérons les courbes intégrales de U dans D qui sont issues d'un point de C. Elles forment un feuilletage d'un voisinage de C dans D. Comme ces courbes ne peuvent pas converger vers p_0, il en existe une, soit γ_0, qui joint deux points $P(\alpha), P(\beta)$ avec $\alpha < 0 < \beta$. On peut alors considérer les courbes intégrales de V issues des points de γ_0 dans la région D' de D limitée par γ_0 et $P([\alpha, \beta])$, et noter g_s celle qui est issue de $\gamma_0(s)$. Ces courbes sont disjointes car une courbe intégrale de U ne peut pas rencontrer une courbe intégrale de V en plus d'un point. De plus, on dispose de la

PROPOSITION 4.2. — *Il existe une constante $L_\cap$ (dépendant de τ_1 et des bornes sur la courbure $\tilde{K}$) telle que, si γ est une courbe intégrale de U de longueur $L_\cap$ et g la $\tilde{\nabla}$-géodésique issue de $\gamma(0)$ avec $g'(0) = V$ et de longueur $L_\cap$, alors $g \cup \gamma = \gamma(0) = g(0)$.*

Démonstration . — Considérons les géodésiques g_u issues de $\gamma(u)$ avec $g'_u(0) = V$, de longueur $L_\cap$. On utilise la borne sur $\|\tilde{\nabla}_U V\|_{I\!I\!I}$ et la borne supérieure sur la courbure et on voit (par un raisonnement classique de champs de Jacobi) que, si $L_\cap$ est assez petit, les g_u sont disjointes. Mais si $g = g_0$ rencontrait γ en $\gamma(s)$, il existerait alors nécessairement un $t \in]0, s[$ tel que γ' et g'_t soient parallèles, ce qui est impossible puisque γ' est parallèle à U et g'_t à V. ■

On en déduit que, si on a pris D assez petit, g_α et g_β sont réduites à $\gamma(\alpha), \gamma(\beta)$ respectivement. On peut donc définir une application $\phi : [0, L(\gamma_0)] \rightarrow [\alpha, \beta]$ qui envoit s sur la coordonnée sur $P([\alpha, \beta])$ de l'extrémité de g_s, et ϕ est une fonction continue avec $\phi(0) = \alpha$, $\phi(L(\gamma_0)) = \beta$. Il existe alors un $s \in [0, L(\gamma_0)]$ tel que $\phi(s) = 0$, ce qui est impossible car cela impliquerait qu'il existe une courbe asymptotique convergeant en p_0.

5. Fin de la preuve

Il suffit de regrouper les résultats des sections qui précédent. On suppose qu'il existe une telle immersion ϕ, avec Σ simplement connexe (on peut se ramener à ce cas, éventuellement en passant à un revêtement, car (Σ, σ) est à courbure négative et son revêtement universel est donc contractile).

On va utiliser la connexion $\tilde{\nabla}$ définie dans la section 2, qui est une connexion sur Σ compatible avec la métrique $I\!I\!I$. D'après la proposition 2.2, la torsion de cette connexion est majorée en $s \in \Sigma$ par τ_0, et d'après la proposition 2.1, sa courbure $\tilde{K} \in [K_4, K_5]$, avec $4K_4 \geq \tau_0$.

Le lemme 5 montre que $(\Sigma, \tilde{\nabla})$ doit être convexe. Or on pourra trouver dans [SCH95b] la preuve du lemme suivant :

LEMME 6. — *Si (S, g, D) est une surface munie d'une métrique riemannienne et d'une connexion compatible à torsion $\tau \leq \tau_0$ et à courbure $K \geq K_0$, avec $K_0 > 4\tau_0^2$, et si (S, D) est convexe, alors l'aire de (S, g) est finie.*

Les résultats de la section 2 montrent que les hypothèses du théorème 1.1 permettent d'appliquer ce lemme à $(\Sigma, I\!I\!I, \tilde{\nabla})$. Donc $(\Sigma, \tilde{\nabla})$ ne peut être convexe sans quoi l'aire de $(\Sigma, I\!I\!I)$ serait bornée et, d'après la formule de Gauss, l'aire de (Σ, σ) le serait aussi, ce qui est impossible car (Σ, σ) est une surface complète simplement connexe à courbure négative. Nous obtenons donc une contradiction qui termine la preuve du théorème 1.1.

On peut remarquer que le lemme 6 est trivial dans le cas où la torsion de D est nulle ; si on ne veut pas l'admettre, tel qu'il est énoncé, on obtient donc seulement l'équivalent du théorème 1.1 dans le cas particulier où l'espace d'arrivée est à courbure constante. Dans ce cas, l'énoncé peut d'ailleurs être amélioré, et admet un analogue quand M est remplacé par une variété lorentzienne (il est alors crucial que la courbure soit constante).

Références

[BS92] Yu. D. BURAGO and S. Z. SHEFEL'. The geometry of surfaces in euclidean spaces. In Yu. D. BURAGO and V. A. ZALGALLER, editors, *Geometry III*, chapter I, pages 1–86. Spriger, 1992. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 48).

[EFI68] N.V. EFIMOV. Differential criteria for homeomorphisms of certain mappings. *Mat. USSR Sbornik*, 5 no 4:475–488, 1968.

[HIL01] D. HILBERT. Über Fläschen von konstanter Gaußscher Krummung. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2:87–99, 1901.

[MIL72] T. KLOTZ MILNOR. Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature. *Advances in Mathematics*, 8:474–543, 1972.

[ROZ92] E. R. ROZENDORN. Surfaces of negative curvature. In Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, editors, *Geometry III*, chapter II, pages 87–178. Springer, 1992. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 48).

[SCH95a] J.-M. SCHLENKER. Hyperbolic Monge-Ampère equations over surfaces. En preparation, 1995.

[SCH95b] J.-M. SCHLENKER. Immersions isométriques hyperboliques de surfaces. Preprint, Ecole Polytechnique, February 1995.

Jean-Marc SCHLENKER
Centre de Mathématiques
URA 169 du CNRS
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex (France)