Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES CARRON

Inégalités de Sobolev et L^2-cohomologie

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 171-176
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__171_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (171–176)

INÉGALITÉS DE SOBOLEV ET L^2-COHOMOLOGIE

Gilles CARRON

Mon exposé commencera par un résultat que je viens de trouver à propos de l'espace des solutions à l'équation de Schrödinger :

$$(\Delta + V)u = 0\,;\ \ u \in L^2(M)$$

lorsque (M, g) est une variété riemannienne non-compacte (cf. [C]). Puis, j'exposerai la L^2-cohomologie et les "conséquences" de ce résultat. Dans tout mon exposé, (M^n, g) est une variété riemannienne complète. Un opérateur de Schrödinger sur M^n est un opérateur de la forme

$$L = \Delta^g + V$$

où

i) Δ^g est le Laplacien associé à la métrique g, il peut être défini à partir de la forme quadratique $u \mapsto \int_M |du|_g^2(x)dv_g(x)$ par la formule

$$\int_M (\Delta u)(x)u(x) = \int_M |du|^2,\ \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Par exemple dans $\mathbf{R}^n$; $\Delta^{\text{eucl}} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

ii) V est une fonction lisse.

Ces opérateurs apparaissent dans de nombreux domaines :

- d'abord en mécanique quantique (d'où leur nom) ;
- en topologie différentielle où certains invariants topologiques de la variété s'expriment grâce à des espaces de nullités de tels opérateurs (théorème d'indice, L^2-cohomologie).

Classification math. : 35J30, 35P99, 47N20, 53C21, 53C42, 58C42, 58G05, 58C40.

Lorsque la variété est compacte, l'espace $\mathcal{H}(V) = \{u \in L^2(M)\,;\ (\Delta+V)u = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $C^\infty(M)$. Si M^n n'est plus compacte, ce n'est généralement plus le cas.

Remarques.

i) Il reste cependant les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{H}(V) \subset C^\infty(M) \cap L^2(M)$ par régularité elliptique.

2) $\mathcal{H}(V)$ est un sous-espace fermé de $L^2(M)$.

ii) La condition $u \in L^2$ peut être interprétée comme "une" condition de nullité à l'infini de (M^n, g).

J'ai obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 0. — *Si (M^n, g) vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_n \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}(x)\, dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2,\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,.$$

alors lorsque $n \geq 5$ et $\int_M V_-(x)^{\frac{n}{2}}\, dx < \infty$, $\mathcal{H}(V)$ est de dimension finie.

Commentaires.

1) Lorsque $n \leq 4$, $\mathcal{H}(V)$ est de dimension finie sous l'hypothèse supplémentaire que $\int_M V_-(x)^{\frac{n}{2}+\varepsilon} dx < \infty$ pour (au moins) un $\varepsilon > 0$.

2) L'inégalité de Sobolev est une propriété de l'opérateur Laplacien. Ce théorème dit donc que certaines propriétés de Δ permettent de déterminer une classe de potentiel V pour lequel $\mathcal{H}(V)$ est de dimension finie.

J'ai obtenu d'autres résultats sur $\mathcal{H}(V)$ mais je n'en ai pas besoin pour mon propos.

Maintenant, je vais définir (rapidement) la L^2-cohomologie : je vais commencer par rappeler la formule de Gauß-Bonnet : si (M^2, g) est une surface compacte orientée (sans bord) alors

$$\int_M \frac{K dA}{2\pi} = 2 - 2g = \chi(M) \ \text{(où } g \text{ est le genre de } M^2\text{)}.$$

Cette formule exprime un invariant métrique $\int_M \frac{K dA}{2\pi}$ en fonction d'un invariant topologique $\chi(M)$. En dimension supérieure, il existe une formule analogue

$$\int_M \Omega = \chi(M)$$

où Ω est la n-forme d'Euler de (M, g) qui s'exprime à l'aide de l'opérateur de courbure de (M, g) et on a ponctuellement

$$|\Omega|(x) \leq c(n) K(x)^{\frac{n}{2}}$$

où $K(x) = \text{Max}\,\{\text{courbure sectionnelle } (P)|;\ P\ \text{2-plan} \subset T_x M\}$.

Je vais rappeler ce qu'est la caractéristique d'Euler de M, $\chi(M)$.

Cohomologie de de Rham. — Elle est définie à partir de l'opérateur différentiation extérieur $d : C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$.

Rappel: les éléments de $C^\infty(\Lambda^k T^*M)$ sont des applications $x \mapsto \sigma(x) \in \Lambda^k T_x^*M$ (l'espace de k-formes linéaires alternées sur T_xM) telles que $\forall X_1, \ldots, X_k$ champ de vecteur lisse sur M, $x \mapsto \sigma(x)(X_1(x), \ldots, X_k(x))$ est une fonction C^∞.

d vérifie $d \circ d = 0$ et le k-ième groupe de cohomologie de de Rham est défini par :

$$H^k_{dR}(M) = \operatorname{Ker}\left(d : C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\right) / dC^\infty(\Lambda^{K-1}T^*M)\,.$$

Le théorème de de Rham dit que ces espaces sont isomorphes aux groupes de cohomologie réelle de M : $H^k_{dR}(M) \approx H^k(M, \mathbf{R})$ alors dans le cas compact, ils sont de dimension finie et $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{dR}(M)$.

L^2-cohomologie. — On peut aussi définir un espace $L^2(\Lambda^k T^*M)$, par exemple en complétant $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ pour la norme pré-hilbertienne

$$\|\sigma\|^2_{L^2} = \int_{M^n} \|\sigma(x)\|^2_{\Lambda^k T_x^*M} dx$$

et à l'opérateur différentiel d, on associe un opérateur différentiel adjoint δ par la formule

$$\langle \alpha, d\beta \rangle_{L^2} = \langle \delta\alpha, \beta \rangle_{L^2}, \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M),\ \beta \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)\,.$$

Nous avons alors la décomposition de Hodge-de Rham suivante :

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \operatorname{Ker}(d \cap \delta) \overset{\perp}{\oplus} \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)}\,.$$

On note alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) = \operatorname{Ker}(d \cap \delta) &= \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)\,;\ d\alpha = \delta\alpha = 0\right\} \\ &= \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)\,;\ (d\delta + \delta d)\alpha = 0\right\}\,. \end{aligned}$$

le k-ième espace de L^2-cohomologie de (M^n, g) ; cette dénomination car nous avons le résultat suivant :

Si M^n est compacte alors $\operatorname{Ker} d = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ et donc $\mathcal{H}^k(M) \approx H^k_{dR}(M) \approx H^k(M, R)$.

Notamment, si la variété est compacte, les espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie.

Cependant, lorsque la variété n'est plus compacte, ce n'est pas, en général le cas.

Essentiellement, on a étudié la L^2-cohomologie dans 3 directions :

1) Lorsque la variété M est un revêtement infini d'une variété compacte de volume fini ([At],[C-G1], [C-G2], [Do])
2) Lorsque la variété a une géométrie à l'infini particulière ("Warped-product") ([M], [R1], [R2], [Br],...)
3) On cherche des résultats d'annulation.

Les résultats que j'ai obtenu sont des résultats de finitude du type du théorème 0. Cela repose sur la décomposition de Bochner-Weitzenbock de l'opérateur de Hodge

$$d\delta + \delta d = \Delta^k = \overline{\Delta} + R^k$$

où

1) $\overline{\Delta}$ est le Laplacien brut associé au fibré Riemannien $\Lambda^k T^*M \to M$ ou encore il peut être défini à partir de la forme quadratique $\alpha \mapsto \int_M |D\alpha|^2$ (où D est la connexion de ce fibré) par la formule :

$$\int_M |D\alpha|^2(x)\, dx = \int_M \langle \overline{\Delta}^k \alpha, \alpha \rangle\,,\ \ \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)\,.$$

2) R^k est un champ d'endomorphisme, *i.e.* :

$(R^k\alpha)(x) = R^k(x) \cdot \alpha(x)$ où $R^k(x) \in \mathrm{End}(\Lambda^k T_x^*M)$ et $\alpha(x) \in \Lambda^k T_x^* M$

et R^k s'exprime à partir de l'opérateur de courbure par exemple :

- $R^0 = R^n = 0$
- $R^1 =$ ricci et on a $|R^k|(x) \le C(n,k) K(x)$.

Le théorème 0 s'adapte aux sections de fibrés et on a le :

THÉORÈME A. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev : $\mu_n \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \le \int_M |du|^2$, $\forall u \in C_0^\infty(M)$ et donc la courbure vérifie*

$$\int_M K^{\frac{n}{2}}(x)\, dx < \infty \text{ lorsque } n \ge 5 \text{ et } K \in L^{\frac{n}{2}} \cap L^{\frac{n}{2}+\epsilon} \text{ lorsque } n \le 4$$

alors les espaces de L^2 cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

En reprenant la preuve nous pouvons aussi obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME B. — *Si $M^n \hookrightarrow \mathbf{R}^N$ est une sous-variété isométriquement immergée dont la seconde forme fondamentale de l'immersion II vérifie*

$$\int_M ||II|^n(x)\, dx < \infty \text{ lorsque } n \ge 5$$

et

$$\int_M |II|^n(x)\, dx < \infty \text{ et } \int_M (II)^{n+\epsilon}(x)\, dx < \infty \text{ lorsque } n \le 4$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de M^n sont de dimension finie.

Nous pouvons maintenant nous poser des questions sur les variétés qui satisfont aux hypothèses du théorème A ou B.

1) Sont-elles de topologie finie ? Et si oui, quel est le lien entre cette topologie et les espaces de L^2-cohomologie.

2) Les hypothèses des théorèmes permettent de définir une caractéristique d'Euler L^2, $X_{L^2}(M) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \dim \mathcal{H}^\ell(M)$ et ces hypothèses assurent que $\int_M \Omega$ converge

puisque dans le cadre du théorème A, on a $|\Omega|(x) \leq C(n)K^{\frac{n}{2}}(x)$ et du théorème B, on a $|\Omega|(x) \leq C(n)|II|^n(x)$.

Comment comparer $\int_M \Omega$ et $X_{L^2}(M)$? J'ai répondu à ces questions lorsque $M^n \hookrightarrow \mathbf{R}^N$ est minimale et satisfait aux hypothèses du théorème B, on a entre autre

$$\int_M \Omega = X_{L^2}(M).$$

3) En toutes généralités, si les espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie, si $\int_M \Omega$ converge alors comment interpréter $X_{L^2}(M) - \int_M \Omega$?

Cette quantité ne dépend que de la métrique au voisinage de l'infini. Pour 2 métriques sur M^n isométrique dans un voisinage de l'infini, ces quantités sont égales.

Conjecture. — Cette quantité ne change pas si la topologie change sur un compact : *i.e.* si M_0, M_1 sont 2 variétés riemanniennes isométriques sur un voisinage de l'infini alors

$$X_{L^2}(M_0) - \int_{M_0} \Omega = X_{L^2}(M_1) - \int_{M_1} \Omega .$$

Ce résultat a été montré dans certains cas par Gromov-Lawson et Donnelly.

4.Bibliographie

[At] M.F. ATIYAH. — *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque 32,33 (1976), 43–72.

[Br] J. BRÜNING. — *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry 32 (1990), 491–532.

[C] G. CARRON. — *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 306, Grenoble, 1995.

[C-G 1] J. CHEEGER, M.GROMOV. — *On the characteristics numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume*, Rauch memorial volume, Differential Geometry and Complex analysis, I. Chavel and H.M. Farkas,Springer, Berlin, p.115,154, 1985.

[C-G 2] J. CHEEGER, M.GROMOV. — *Bounds of the Von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, J. Differential Geometry 21 (1985), 1–34.

[Do] J.DODZIUK. — *De Rham-Hodge theory for L^2cohomology of infinite covering*, Topology 16 (1977), 157–165.

[D-X] H. DONNELY, F. XAVIER. — *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifold*, Amer. J. Math. 106 (1984), 169–185.

[E-R] K. D. ELWORTHY, S. ROSENBERG. — *Manifofds with wells of negative curvature*, Invent. Math. 103 (1991), 471–495.

[E-F] J.S. ESCOBAR, A. FREIRE. — *The differential form spectrum of manifold of positive curvature*, Duke J. Math. 69 (1993), 1–42.

[G-W] R.GREENE, H.H. WU. — *Harmonics forms on noncompact Riemannian and Kähler manifolds*, Michigan Math. J. 28 (1981), 63–81.

[M] W. MÜLLER. — *Manifold with cusps of ranh one, Spectral theory and L^2 index theorem*, L.N. in Math ną 1244, Springer-Verlag, 1987.

[R1] J. ROE. — *An index theorem on open manifolds I, II*, J. Differential Geometry 27 (1988), 87-113, 115-136.

[R2] J. ROE. — *Coarse cohomology and index theory on complete Manifolds*, Memoirs of the A.M.S. vol 104, n° 497, 1993.

Gilles CARRON
Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)