Yves Colin de Verdière

Champs magnétiques classiques et quantiques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 15-22
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__15_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (15–22)

CHAMPS MAGNÉTIQUES CLASSIQUES ET QUANTIQUES

Yves COLIN DE VERDIÈRE

Séminaire semi-classique des 18 octobre et 6 décembre 1994

Le but de cet exposé est de décrire quelques phénomènes liés aux grands champs magnétiques.

Nous ne reviendrons pas sur les phénomènes de *bouteilles magnétiques* ([A-H-S], [CV1] et [CV2]).

L'introduction de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique est complémentaire de celle de [CV-TO].

Nous nous intéressons d'abord au cas classique où nous décrivons la méthode de moyennisation pour les champs constants en dimension 2 (pour un traitement de la moyennisation, voir [AR] et [L-M]). Il y a dans ce secteur de nombreuses questions à clarifier : champs non constants en dimension 2, dimension > 2.

Puis nous nous intéressons au cas quantique et montrons comment l'étude des grands champs magnétiques conduit à un exemple naturel d'opérateur de Toeplitz.

1. Euler-Lagrange et invariance de jauge.

Soit (X, g) une variété riemannienne, $V \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ le potentiel électrique et $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$ une 1-forme sur X (le potentiel magnétique).

On considère le lagrangien

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g(\dot{x}) + \alpha(x, \dot{x}) - V(x) \, ,$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ est la notation classique des mécaniciens.

On lui associe les équations d'Euler-Lagrange, équations des extrémales de l'intégrale de L le long d'une courbe.

Les solutions de ces équations décrivent le mouvement d'une particule électrique de charge 1 dans les champs électriques et magnétiques considérés.

Classification math. : 35P20, 35Q60, 34C29, 35J10.

De même que les trajectoires ne dépendent de V qu'à une constante additive près, elles ne dépendent de α qu'à l'addition près d'une différentielle exacte df.

Si on introduit le champ $B = d\alpha$, les trajectoires ne dépendent que de B. En fait, il est facile de voir que l'on peut étendre les équations du mouvement au cas d'une 2-forme fermée B (pas nécessairement exacte).

Dans le cas où $B = d\alpha$, on peut grâce à la transformée de Legendre donner une formulation Hamiltonienne des équations du mouvement.

L'Hamiltonien H est donné par :

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p - \alpha(x)\|^2 + V ,$$

où $\|.\|$ est la norme riemannienne dans le cotangent.

Exemples.

1) Champs constants dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $B = B_o dx \wedge dy$ ($B_o \neq 0$) et supposons $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$.

Les trajectoires sont alors des cercles : la fréquence du mouvement est indépendante des conditions initiales et vaut

$$\omega = B_o$$

alors que le rayon augmente avec la vitesse initiale :

$$R = v_0.B_o .$$

Plusieurs potentiels sont possibles.

$$\alpha_1 = B_o x dy;\ \alpha_1 = -B_o y dx;\ \alpha_2 = \frac{B_o}{2}(xdy - ydx) .$$

2) Monopole magnétique.

$B = B_o.\Omega$, où Ω est l'angle solide dans $\mathbb{R}^3$). Bien sûr dans ce cas B n'est pas exacte. Le flux total du champ à travers une sphère de centre 0 est $4\pi B_o$; on peut l'appeler *masse* du monopole par analogie avec le champ de gravitation.

Les équations du mouvement s'intègre grâce à la symétrie sphérique et les trajectoires portées par des cônes de révolution. de centre O. Les trajectoires qui ne se confondent pas avec un rayon ont 2 asymptotes qui sont des génératrices du cône, elles restent à une distance minorée > 0 su sommet du cône. Le mouvement obéit à une loi des aires en projection sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône.

3) Dipôles magnétiques.

Soit V un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et Ω_t le monopôle magnétique de charge $4\pi B_o$ centré en tV.

On considère le champ magnétique sur $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ défini comme la dérivée en $t = 0$ de Ω_t.

Ce champ est exact, mais n'est pas intégrable : il possède seulement une symétrie de révolution autour de la droite engendrée par V.

Les lignes de champs sont calculables : ce sont des courbes fermées contenues dans un plan passant par l'axe engendré par V ou l'axe lui-même. Elles sont toutes tangentes à l'origine.

Ce cas est important en particulier car il approche bien le champ terrestre si on considère la terre comme un point.

4) Bouteilles magnétiques.

Il s'agit d'un terme générique pour désigner le confinement d'une particule chargée (par exemple, les électrons à l'intérieur du synchrotron) dans une boite.

Pour cela, on introduit un champ dont le module tend vers l'infini au bord de la boite.

Si la boite est $\mathbb{R}^3$, un exemple fascinant (et non intégrable) est donné par un champ linéaire :

$$B(x,y,z) = M(x,y,z)$$

où M est une matrice non singulière de trace nulle.

Les trajectoires typiques lorsqu'elles vont assez loin de l'origine spiralent autour d'une ligne de champ. Puis elles reviennent autour de la même ligne de champ.

Bien sûr, il y a des trajectoires exceptionnelles qui vont facilement à l'infini : celles sont portées par une droite invariante par M.

5) Champs constants dans le demi-plan de Poincaré.

Ce cas est intéressant, car pour un même champ on obtient 3 types de trajectoires suivant la vitesse. Dans le modèle du demi-plan de Poincaré les trajectoires sont les intersections de cercles euclidiens avec le demi-plan : elles sont fermés si le cercle est contenu dans le demi-plan (vitesse faible), ce sont des horocycles si le cercle est tangent à l'axe des x (vitesse critique), et des hypercycles avec 2 points à l'infini si le cercle coupe l'axe des x (vitesse forte).

2. Hamiltoniens quantiques.

Si on cherche dans $\mathbb{R}^n$ l'opérateur de Schrödinger associé à l'hamiltonien $\frac{1}{2}\|p - a(x)\|^2 + V$, un choix possible est :

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\sum_j \left(\frac{h}{i}\partial_j - a_j\right)^2 + V\,.$$

On peut réinterpréter cette écriture de façon plus géométrique en utilisant le langage des connections : sur le fibré trivial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$ au-dessus de $\mathbb{R}^n$, on introduit la connection donnée par

$$\nabla_Z f = df(Z) - \frac{i}{h}\alpha(Z)\,.$$

Cette connection est Hermitienne et de courbure

$$i[\nabla_j, \nabla_k] = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)$$

qui sont précisément les composantes de $\frac{1}{h}B$.

Si on se place sur une variété riemannienne (X, g) munie d'une 2-forme fermée réelle B, la condition d'existence d'un fibré en droites hermitien L de courbure $\frac{1}{h}B$ est une condition de quantification sur B. Il faut que la classe $[B]$ de cohomologie de de Rham soit dans le sous-réseau $H^2(X, 2\pi h\mathbb{Z})$ de $H^2(X, \mathbb{R})$: remarquons qu'à la limite classique ce sous-réseau est dense dans $H^2(X, \mathbb{R})$; comme remarqué plus haut, il n'y a pas de condition de quantification du champ magnétique en mécanique classique.

Dans ce cas, le fibré L n'est unique qu'au produit tensoriel par un fibré plat P près : ces derniers sont paramétrés par $Hom(\pi_1(X), U(1))$.

A chaque donnée d'un tel fibré L avec connection est associé un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique que l'on peut décrire comme extension de Friedrichs de la forme quadratique définie sur les sections C^∞ de L par

$$q(s) = \frac{1}{2} \int_X \|\nabla s(x)\|^2 |dx| ,$$

où $\nabla s(x)$ est vu comme une forme linéaire sur $T_x X$.

Exemple 1 : les champs constants sur les tores et les fonctions Θ.

Exemple 2 : les champs constants sur les surfaces de Riemann.

3. Forts champs et espace des phases réduit : le cas classique.

3.1. La méthode de moyennisation.

On considère un Hamiltonien H_0 sur une variété symplectique (X_{2n}, ω) ayant pour une valeur E_0 de l'énergie toutes ses trajectoires dans la couche d'énergie E_0 simplement périodiques de période $T_0 > 0$.

Il existe de nombreux exemples : le problème à 2 corps dans un potentiel Coulombien avec $E_0 < 0$; les trajectoires sont alors des ellipses ayant pour un des foyers le centre de gravité du système et dont le grand axe est de longueur fonction de E_0. C'est bien sûr l'exemple historique étudié par Lagrange qui découvre à son propos la géométrie symplectique.

D'autres exemples sont le problème des géodésiques sur une sphère munie de la métrique riemannienne standard, le champ magnétique constant en dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$ ou dans le demi-plan de Poincaré (si E_0 est assez petit).

On peut alors introduire la variété Z_{E_0} des trajectoires contenues dans la couche d'énergie E_0. Grâce aux sections de Poincaré, on voit que Z_{E_0} est munie d'une structure symplectique canonique ω_0.

Considérons maintenant les trajectoires d'énergie E_0 d'un Hamiltonien perturbé

$$H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon K + O(\varepsilon^2) .$$

On a alors une description approchée à $O(\varepsilon)$ près de ces trajectoires pendant un temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.

Elles sont données par une dynamique sur Z_{E_0} associée à *l'Hamiltonien moyenné*

$$\varepsilon \widehat{K}(\gamma)$$

donné par la moyenne de εK sur les trajectoires. Pour des détails, voir [AR], [L-M].

Un exemple : si on considère le cas du champ constant en dimension 2 perturbé par un petit potentiel électrique

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}((\xi + B_o y)^2 + \eta^2) + \varepsilon V .$$

L'espace réduit est l'ensemble des cercles de rayon $R = \sqrt{2E_0}/B_o$ que l'on paramètre par leurs centres. On a alors $Z_{E_0} = \mathbb{R}^2$ et la structure symplectique est donnée par $B_o dx \wedge dy$.

Si on note par $\widehat{V}(x, y)$ la moyenne de V sur le cercle de centre (x, y) et de rayon R, la dynamique approchée est donnée par un déplacement des centres des cercles donné par l'Hamiltonien $\varepsilon\widehat{V}$ sur $(\mathbb{R}^2, B_o dx \wedge dy)$.

En particulier, le centre des cercles suit les lignes de niveau $\widehat{V} = c$ de $\widehat{V}$ de façon à laisser la région $\widehat{V} < c$ sur leur gauche si $B_o > 0$ et à droite si $B_o < 0$.

3.2. Trajectoires dans les grands champs magnétiques en dimension 2.

De ce qui précède on peut déduire une étude des trajectoires d'énergie fixée dans des grands champs magnétiques en dimension 2.

On s'intéresse maintenant aux trajectoires d'énergie E_0 fixée de

$$H_\lambda = \frac{1}{2}((\xi + \lambda B_o y)^2 + \eta^2) + V(x, y) .$$

Pour cela, on se ramène au cas précédent au moyen d'une renormalisation symplectique :

$$x_1 = \sqrt{\lambda}x; y_1 = \sqrt{\lambda}y; \xi_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}; \eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}} .$$

On obtient ainsi la nouvelle expression :

$$H_\lambda = \frac{\lambda}{2}((\xi_1 + B_o y)^2 + \eta_1^2) + V(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}}) .$$

Autrement dit, à un changement de temps près, il s'agit d'étudier les trajectoires de

$$K_\lambda = \frac{1}{2}((\xi_1 + B_o y_1)^2 + \eta_1^2) + \lambda^{-3/2} R(\lambda, x_1, y_1) ,$$

dans la couche dénergie $(E_0 - V(0,0))/\lambda$, avec R borné dans tout voisinage compact de O en (x, y).

La théorie précédente s'applique donc : au premier ordre, on a un déplacement de petits cercles de rayon

$$\rho = \frac{\sqrt{2(E_0 - V(x, y))}}{\sqrt{\lambda}B_o} ,$$

suivant le système Hamiltonien d'Hamiltonien $V(x, y)$ sur $(\mathbb{R}^2, \lambda B_o dx \wedge dy)$. Plus précisément le système exact suit le système approché pendant un temps de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$ à une distance $O(1/\lambda^2)$ (les petits cercles se déplaçant à une vitesse $O(\sqrt{\lambda})$).

Pour montrer ceci, on montre d'abord qu'il existe des coordonnées locales symplectiques (z_1, z_2) près de $F = (\xi + B_o y)^2 + \eta^2 = 0$ dans $T^\star R^2$ tel que l'hamiltonien F se réécrive $\frac{B_o}{2}|z_1|^2$. On peut alors reproduire la preuve de Arnold : on a désingularisé le minimum de F.

On peut généraliser à des grands champs variables.

3.3. Grands champs en dimension > 2.

Ces cas sont plus difficiles, sauf si l'hamiltonien du champ constant est à trajectoires toutes périodiques ce qui se produit de façon non générique et seulement si la dimension est paire.

4. Laplaciens holomorphes et Schrödinger avec champ magnétique.

Il existe dans le cas des variétés complexes munies d'un fibré en droites L avec connection hermitienne ∇ (et donc holomorphe) un opérateur très proche de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique : le laplacien holomorphe $\Delta_{\mathbb{C}}$ qui est défini en dimension 2 à partir de la forme quadratique

$$Q(s) = \int_X \|\nabla_{\bar{z}} s\|^2 |dx| \,.$$

Si B est la courbure de la connection ∇, on a la relation fondamentale :

$$H_B = 2\Delta_{\mathbb{C}} + \frac{B}{2}$$

et de plus $\Delta_{\mathbb{C}} \geq 0$ et a pour noyau les sections holomorphes de L.

Physiquement l'opérateur $\Delta_{\mathbb{C}}$ apparait dans la décomposition supersymétrique de l'Hamiltonien de Pauli en dimension 2 : cet Hamiltonien qui opère sur les sections d'un fibré de spineurs de rang 2 décrit la mécanique quantique d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ (électron) dans un champ magnétique. Voir [L-L], [C-F-K-S].

Nous utiliserons plus bas 2 propriétés fondamentales de $\Delta_{\mathbb{C}}$:

i) le fondamental $\mathrm{Ker}(\Delta_{\mathbb{C}})$ de $\Delta_{\mathbb{C}}$ est donné par les sections holomorphes de L.

ii) Si on suppose $B > 0$ sur X, le gap (= $\inf\{\lambda_j \in \sigma(\Delta_{\mathbb{C}}) | \lambda_j > 0\}0$) de $\Delta_{\mathbb{C}}$ est supérieur à $\inf B/2$.

5. Forts champs en dimension 2 et opérateurs de Toeplitz.

On fixe maintenant $h = 1$ et on s'intéresse aux grands champs magnétiques. Si on s'est donné le fibré L correspondant au champ $B > 0$, il est facile de faire tendre le champ vers l'infini en respectant la condition de quantification; il suffit de prendre les fibrés $L^{\otimes n}$ lorsque $n \to \infty$.

Considérons donc la suite d'opérateurs de Schrödinger

$$\widehat{H}_n = \Delta_{\mathbb{C},n} + V \,,$$

avec champ magnétique nB et potentiel électrique V fixé.

Soit $\mathcal{H}_n = H^0(X, L^{\otimes n})$ l'espace des sections holomorphes de $L^{\otimes n}$.

Soit $q_n(f) = \int V|f|^2|dx|$, suite de formes quadratiques sur $\mathcal{H}_n$.

Alors le spectre de q_n décrit l'asymptotique des *petites valeurs propres* de $\widehat{H}_n$ au sens suivant (on pose $m = \inf V$; $M = \sup V$; $b = \inf B$) :

THÉORÈME. — *Soit* $p_n = \dim(\mathcal{H}_n)$, $m \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{p_n} \leq M < nB + m \leq \lambda_{p_n+1} \leq \cdots$ *le spectre de* $\widehat{H}_n$ *et* $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_{p_n}$ *le spectre de* q_n, *on a :*

$$\forall 1 \leq j \leq p_n,\ \mu_j - O(\frac{1}{n}) \leq \lambda_j \leq \mu_j .$$

La preuve se fait en utilisant le minimax, la théorie des perturbations des valeurs propres multiples et le fait que le gap de $\Delta_{\mathbb{C},n}$ est de l'ordre de n. (voir § 6).

Maintenant les opérateurs A_n associés aux formes q_n forment une famille *semi-classique* d'opérateurs de Toeplitz sur la variété X munie de la forme symplectique B de symbole principal V. Voir [CV3]. Comparer aussi les résultats de [DY], [BOU1], [BOU2].

6. Un lemme de théorie des perturbations.

Soit $H_\varepsilon = H_0 + V_\varepsilon$ une suite d'opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert. On suppose :

i) $\sigma(H_0) \setminus 0 \subset \{z| \, |z| \geq 2C,\ C > 0\}$,

ii) $\|V_\varepsilon\| = O(\varepsilon)$.

On pose $E_0 = \mathrm{Ker}(H_0)$ et q_ε la forme quadratique $< \varphi|V_\varepsilon|\varphi >$ sur E_0.

Alors si

$$\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$$

sont les valeurs propres de q_ε et

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

celles de H_ε contenues dans le disque de rayon C, on a

$$\lambda_j = \mu_j + O(\varepsilon^2) .$$

Preuve. — Si γ est le cercle de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon C, la résolvante $R_\varepsilon(\lambda)$ de H_ε sur γ vérifie

$$R_\varepsilon(\lambda) = R_0(\lambda) + O(\varepsilon) .$$

On en déduit que les projecteurs spectraux de H_0 sur E_0 et de H_ε sur la somme E_ε des espaces propres correspondant à des valeurs propres intérieures à γ diffèrent en norme de $O(\varepsilon)$.

Si maintenant $U_\varepsilon\ :\ E_0 \to \mathcal{H}$ est une isométrie dont l'image est E_ε et que l'on pose :

$$K_\varepsilon = U_\varepsilon^\star H_\varepsilon U_\varepsilon$$

K_ε a pour valeurs propres celles de H_ε contenues dans γ.

On a :

$$U_\varepsilon = j_0 + O(\varepsilon),\ U_\varepsilon^\star = \Pi_0 + O(\varepsilon)\ ,$$

d'où l'on déduit :

$$K_\varepsilon = \Pi_0 V_\varepsilon j_0 + O(\varepsilon^2)$$

et le résultat grâce au minimax. □

On applique ceci avec $\varepsilon = 1/n$,

$$H_\varepsilon = \frac{1}{n}\Delta_{\mathbb{C},n} + \frac{1}{n}V\ .$$

Références

[A-H-S] AVRON, HERBST, SIMON. — *Schrödinger operators with magnetic fields*, Duke Math. J. **45** (1978), 847-883.

[AR] V. ARNOLD. — *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir (Moscou), 1976.

[BM-GU] L. BOUTET DE MONVEL, V. GUILLEMIN. — *Spectral theory of Toeplitz operators*, Princeton, 1981.

[BOS] J.B. BOST. — *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelians varieties*, From number theory to physics, les Houches (1989), 64-212.

[BOU1] T. BOUCHE. — *Asymptotique d'une certaine forme quadratique*, Preprint Institut Fourier (1994), 1-6.

[BOU2] T. BOUCHE. — *Asymptotic results for Hermitian line bundles over complex manifolds : the heat kernel approach*, Prépublication Institut Fourier **247** (1993), 1-14.

[C-F-K-S] CYCON, FROESE, KIRSCH, SIMON. — *Schrödinger operators*, Springer, 1986.

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Comm. Math. Phys. **105** (1986), 327-335.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques en dimension 2*, Prépublication IF 33 (1985), 1-8.

[CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Une introduction aux opérateurs de Toeplitz*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **13** (**ce volume**) (1994-1995), .

[CV-TO] Y. COLIN DE VERDIÈRE, N. TORKI. — *Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique* , Séminaire de théorie spectrale et géométrie **11** (1992-1993), 9-18.

[DY] J.P. DEMAILLY. — *Holomorphic Morse inequalities*, Proc. Symp. Pure Math. **52 (2)** (1991), 93-114.

[FA] F. FAURE. — *Mécanique quantique et dégénérescence dans le spectre*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **11** (1992-1993), 19-63.

[L-L] LANDAU-LIFCHITZ. — *Mécanique quantique*, Mir (Moscou), 1967.

[L-M] LOCHAK ET MEUSNIER. — *Averaging*,.

[No] S.P. NOVIKOV. — *Magnetic Bloch functions and vector bundles. Typical dispersion laws and their quantum numbers*, Sov. Math. Dokl. **23** (1981), 298-303.

[T-K-N2] D. THOULESS, M. KOHMOTO, M. NIGHTINGALE, M. DEN JIS. — *Quantized Hall conductance in a 2-dimensional periodic potential*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 405-408.

[TO] N. TORKI. — *Stabilité des valeurs propres et champs magnétiques sur une variété et sur un graphe*, Thèse (Université de Grenoble 1), 1989.

[VO] A. VOROS. — *WKB method in the Bargmann representation*, Phys. Rev. **A40** (1989), 6800.

Yvex COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr