

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

FRÉDÉRIC MATHÉUS

**Rigidité des empilements infinis immergés proprement
dans le plan et dans le disque**

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 69-85

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__69_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RIGIDITÉ DES EMPILEMENTS INFINIS IMMERGÉS PROPREMENT DANS LE PLAN ET DANS LE DISQUE

Frédéric MATHÉUS

I. Introduction

En 1987, Burt Rodin et Dennis Sullivan publient le premier résultat de rigidité d'empilement de cercles ([R-S]) : sous certaines hypothèses, il n'est pas possible de déformer l'empilement hexagonal standard. Ce théorème a reçu depuis lors des généralisations dans plusieurs directions. Zheng-Xu He, d'abord seul, puis associé à Peter Doyle et Burt Rodin, obtient des estimations de plus en plus précises du comportement asymptotique de la constante s_n (voir [He] et [D-H-R]) qui mesure le défaut maximal de n générations d'un empilement hexagonal plongé à être régulières (voir VI pour la définition). Parallèlement, He et Rodin simplifient la preuve initiale tout en généralisant le théorème à des empilements non hexagonaux de valence bornée (voir [R]). Enfin, par des méthodes entièrement différentes, Oded Schramm parvient à s'affranchir de l'hypothèse de valence bornée (voir [Sch]).

L'objet de ce travail est de replacer le théorème de rigidité de l'empilement hexagonal standard dans le contexte des empilements hexagonaux immergés et d'obtenir comme corollaire un théorème de rigidité des empilements immergés proprement dans le plan.

La section II est une présentation des empilements hexagonaux infinis immergés.

Classification A.M.S. : 05B40, 30C60, 30E10, 51M15, 52A45, 60J15.

Outre la définition, nous citons les seuls exemples connus, les empilements dits de type exponentiels, puis la conjecture de Doyle. Nous énonçons alors le seul résultat connu sur ce type d'empilements, résultat dû à Kevin Callahan et Burt Rodin ([Cn-R]) et qui est un analogue du petit théorème de Picard. La section III est consacrée à la preuve de He et Rodin du théorème de rigidité de l'empilement hexagonal standard. Le corollaire sur les empilements immergés proprement est exposé dans la section IV. Nous poursuivons (sect. V) par un tour d'horizon des résultats et des méthodes concernant les empilements infinis immergés proprement dans le disque. Enfin, nous terminons cet exposé (section VI) par quelques rappels sur la constante s_n . Outre la définition, nous montrons qu'elle tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ et énonçons des résultats plus récents concernant son comportement asymptotique.

II. Présentation des empilements infinis immergés

Soit \mathcal{T} la triangulation du plan euclidien par des triangles équilatéraux dont l'ensemble des sommets est $S = \mathbb{Z} + e^{\frac{i\pi}{3}}\mathbb{Z}$, et \mathcal{T}^1 le 1-squelette de \mathcal{T} . Pour $s \in S$ on note C_s^0 le cercle du plan de centre s et de rayon $\frac{1}{2}$. Enfin, \mathcal{E}_0 désigne la famille $\{C_s^0\}_{s \in S}$: \mathcal{E}_0 s'appelle l'empilement hexagonal standard.

Soit $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On définit une métrique riemannienne g_r sur \mathbb{R}^2 de la façon suivante : on munit chaque triangle $T \in \mathcal{T}$ de la métrique euclidienne plate qui au côté uv associe la longueur $r(u) + r(v)$. La métrique g_r ainsi obtenue sur \mathbb{R}^2 est plate et à singularités coniques (voir [Tr]).

Dans la variété (\mathbb{R}^2, g_r) on considère, pour $s \in S$, le cercle C_s de centre s et de rayon $r(s)$. On constate que $(u, v) \in \mathcal{T}^1$ si et seulement si les cercles C_u et C_v sont tangents. On dit alors que la famille $\mathcal{E} = \{C_s\}_{s \in S}$ est un empilement de cercles dans la variété (\mathbb{R}^2, g_r) de combinatoire \mathcal{T}^1 .

On va construire un homéomorphisme $\varphi : (\mathbb{R}^2, \text{eucl}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g_r)$ tel que $\forall s \in S$, $\varphi(C_s^0) = C_s$. Nous apportons un peu de soin à cette construction, en vue de la preuve du théorème de rigidité que nous détaillons dans III. Tout d'abord, pour tout $s \in S$, on pose $\varphi(s) = s$. Appelons interstice circulaire d'un empilement de cercles toute composante connexe du complémentaire de la réunion des disques fermés bordés par les cercles de l'empilement. On définit alors φ sur l'adhérence de chaque interstice circulaire de \mathcal{E}_0 comme étant l'unique transformation de Möbius envoyant cet interstice sur l'interstice correspondant de \mathcal{E} . Enfin, on étend φ radialement à l'intérieur de chaque cercle de \mathcal{E}_0 .

Venons-en maintenant à la notion d'empilement hexagonal immergé. La courbure

en tout sommet $s \in S$ dans (\mathbb{R}^2, g_r) est égale à

$$K_r(s) = 2\pi - \sum_{T \ni s} \alpha_r(s, T)$$

où $\alpha_r(s, T)$ est l'angle en s dans le triangle T pour la métrique g_r . Lorsque $\forall s \in S$, $K_r(s) = 0$, il existe une immersion isométrique ψ de (\mathbb{R}^2, g_r) dans $(\mathbb{R}^2, \text{eucl})$. On dit alors que \mathcal{E} est un empilement de cercles hexagonal immergé dans le plan euclidien.

Considérons l'application $\Phi = \psi \circ \varphi$: c'est un homéomorphisme local de \mathbb{R}^2 , a priori non injectif, tel que $\forall s \in S$, $\Phi|_{\bigcup_{T \ni s} T}$ soit injectif, et qui envoie chaque cercle de \mathcal{E}_0 sur un cercle du plan euclidien.

Par exemple, lorsque la fonction $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est constante, Φ est une similitude. À la question de savoir quand est-ce que Φ est un plongement, Burt Rodin et Dennis Sullivan ont apporté une réponse spectaculaire (cf. [R-S], App. 1) :

THÉORÈME. — *Si Φ est un plongement alors Φ est une similitude.*

Nous exposons la preuve de ce théorème dans la section suivante.

Il est naturel de se demander s'il existe des empilements hexagonaux immergés non plongés. La réponse est affirmative : il existe, à similitude près, une famille à deux paramètres $\{\mathcal{E}(a, b)\}_{(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2}$ d'empilements hexagonaux immergés non plongés (sauf si $a = b = 1$). Cet exemple est le seul connu. Il a été découvert indépendamment par Peter Doyle ([Cr-R]) et par Yves Colin de Verdière et Laurent Guillopé (voir [CV-M], section III). En voici la description : la fonction des rayons $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de l'empilement $\mathcal{E}(a, b)$ est définie par :

$$r(s) = a^x b^y \quad \text{où } s = x + iy.$$

Montrons que la courbure vérifie $K_r(s) = 0$ pour tout s : les rayons des six cercles tangents à C_s sont $ar(s)$, $a^{1/2}b^{\sqrt{3}/2}r(s)$, $a^{-1/2}b^{\sqrt{3}/2}r(s)$, $a^{-1}r(s)$, $a^{-1/2}b^{-\sqrt{3}/2}r(s)$ et $a^{1/2}b^{-\sqrt{3}/2}r(s)$, soit, en posant $\alpha = a^{1/2}$ et $\beta = b^{\sqrt{3}/2}$, et en supposant que $r(s) = 1$:

$$\alpha^2, \alpha\beta, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha\beta}, \frac{\alpha}{\beta}.$$

Le calcul de la courbure repose alors sur l'existence de triangles semblables dans la figure constituée des six cercles tangents à C_s , et est détaillé dans [CV-M], section III.

Signalons la

CONJECTURE DE DOYLE. — *Soit \mathcal{E} un empilement hexagonal immergé. Alors il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que \mathcal{E} soit semblable à $\mathcal{E}(a, b)$. (voir fig. 1)*

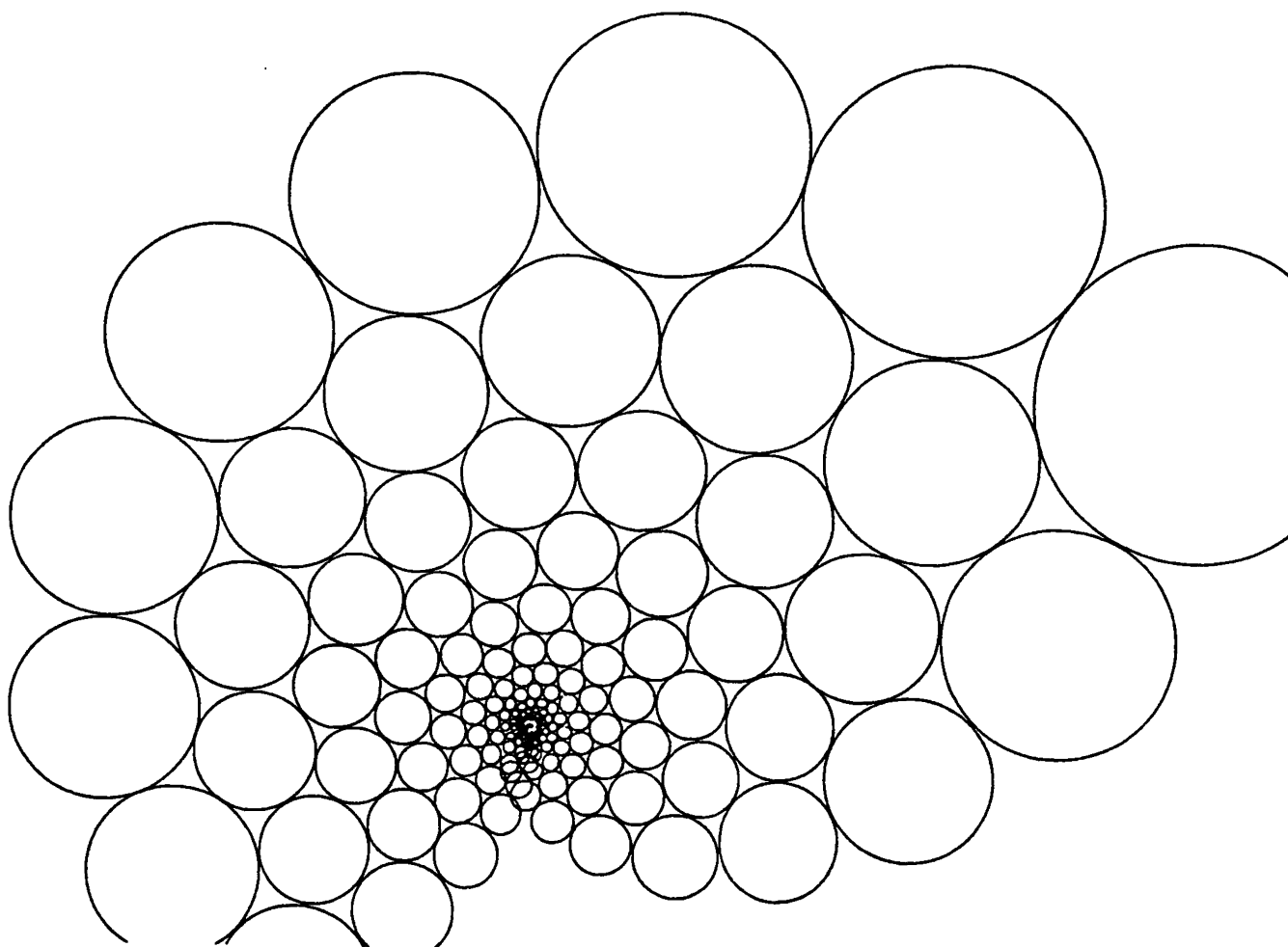


Fig. 1 (extraite de [Cr-R]) : un empilement $\mathcal{E}(a, b)$.

On ne sait pas grand'chose sur les empilements immergés généraux, hormis un analogue du petit théorème de Picard, obtenu par Kevin Callahan et Burt Rodin ([Cn-R]):

THÉORÈME DE PICARD POUR LES EMPILEMENTS IMMERGÉS. — Si \mathcal{E} est un empilement de cercles hexagonal immergé, alors $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ évite au plus un point.

Voyons ce qu'il en est pour les empilements $\mathcal{E}(a, b)$. Il est prouvé, dans [CV-M], qu'il existe, a et b étant fixés, deux similitudes σ_1 et σ_2 de \mathbb{R}^2 , qui commutent, et

telles que le groupe $\{\sigma_1^p \sigma_2^q / (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ qu'elles engendrent opère transitivement sur la famille $\mathcal{E}(a, b)$. Ainsi, si Ω désigne le centre commun aux deux similitudes σ_1 et σ_2 , alors on a :

$$\Phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{\Omega\}.$$

Nous terminons cette section en mentionnant un

PROBLÈME OUVERT. — Si \mathcal{E} est un empilement hexagonal immergé, existe-t-il une constante K telle que $\forall (u, v) \in \mathcal{T}^1$, $\frac{1}{K} \leq \frac{r(u)}{r(v)} \leq K$?

Autrement dit, si ε est un empilement hexagonal immergé, l'application Φ est-elle quasiconforme ?

Remarquons qu'il n'existe pas de telle constante K valable pour tous les empilements immergés, puisque dans le cas de l'empilement $\mathcal{E}(a, b)$ on a $\frac{r(s+1)}{r(s)} = a$ qui peut être rendu arbitrairement grand. Toujours dans ce cas, on notera que la première génération de cercles autour de C_s peut ne pas être plongée.

III. Le théorème de rigidité de l'empilement hexagonal standard

L'objet de cette section est d'exposer la preuve de Z.X. He et B. Rodin ([R]) du théorème de rigidité de l'empilement hexagonal standard que nous rappelons ici :

THÉORÈME. — Tout empilement de cercles de combinatoire \mathcal{T}^1 et plongé dans le plan euclidien est semblable à l'empilement hexagonal standard \mathcal{E}_0 .

Preuve du théorème. — Il s'agit donc de montrer que si Φ est un plongement, Φ est en fait une similitude.

LEMME 1. — Si Φ est un plongement, alors il existe $K \geq 1$ tel que Φ soit K -quasi-conforme sur C .

Preuve du lemme 1. — Comme Φ est injective, le ring lemmade [R-S] s'applique : il existe une constante τ telle que $\forall (u, v) \in \mathcal{T}^1$, $\frac{1}{\tau} \geq \frac{r(u)}{r(v)} \geq \tau$. La conclusion du lemme résulte alors de la définition de l'application φ . ■

L'application Φ est holomorphe sur la réunion \mathcal{U}_0 des interstices de l'empilement \mathcal{E}_0 et échange les cercles de \mathcal{E}_0 et de \mathcal{E} . On va le modifier de façon à la rendre

holomorphe sur un ouvert plus grand. Pour tout cercle C on note I_C l'inversion par rapport à C .

On définit une application Φ_1 de la façon suivante : $\Phi_1 = \Phi$ sur chaque interstice de \mathcal{E}_0 , et $\Phi_1 = I_C \circ \Phi \circ I_{C_0}$ à l'intérieur de tout disque bordé par un cercle C_s^0 de \mathcal{E}_0 . Soit \mathcal{U}_1 l'ouvert défini par $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0 \cup \bigcup_{C \in \mathcal{E}_0} I_C(\mathcal{U}_0)$ et $\mathcal{E}_0^{(1)}$ la collection de cercles définie

par $\mathcal{E}_0^{(1)} = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{E}_0} I_C(\mathcal{E}_0) \right) \setminus \mathcal{E}_0$. On a le

LEMME 2. — L'application Φ_1 vérifie les propriétés suivantes :

- i) Φ_1 est un plongement K -quasiconforme de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ;
- ii) Φ_1 est holomorphe sur \mathcal{U}_1 ;
- iii) $\forall s \in S, \Phi_1(C_s^0) = C_s$.

Preuve du lemme 2. — La propriété i) résulte du fait que la composée d'une application K -quasiconforme et d'une application conforme est elle-même K -quasiconforme (voir [Ahl], p. 9) ; la propriété ii) résulte de l'holomorphie de Φ sur \mathcal{U}_0 ; enfin iii) est clair. ■

Par récurrence, on construit une collection de cercles $\mathcal{E}_0^{(n)}$ en posant

$$\mathcal{E}_0^{(n)} = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{E}_0^{(n-1)}} I_C(\mathcal{E}_0^{(n-1)}) \right) \setminus \mathcal{E}_0^{(n-1)},$$

un ouvert \mathcal{U}_n en posant

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_{n-1} \cup \left(\bigcup_{C \in \mathcal{E}_0^{(n-1)}} I_C(\mathcal{U}_{n-1}) \right),$$

et une application Φ_n égale à Φ_{n-1} sur \mathcal{U}_{n-1} et à $I_C \circ \Phi_{n-1} \circ I_{C_0}$ à l'intérieur de tout disque bordé par un cercle $C_0 \in \mathcal{E}_0^{(n-1)}$ avec $C = \Phi_{n-1}(C_0)$. Cette application Φ_n vérifie :

- i) Φ_n est un plongement K -quasiconforme de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ;
- ii) Φ_n est holomorphe sur \mathcal{U}_n ;
- iii) $\forall s \in S, \Phi_n(C_s^0) = C_s$.

Considérons l'ouvert $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ de \mathbb{C} et examinons son complémentaire : $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U} = \mathcal{F}_1 \amalg \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{C \in \mathcal{E}_0^{(n)}} C \right)$ et $\mathcal{F}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} / \exists (D_n)_{n \in \mathbb{N}}, D_n \text{ disque} \right\}$

$\supset D_{n+1}$, $\partial D_n \in \mathcal{E}_0^{(n)}$ et $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Soit $\tilde{\Phi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie de la manière suivante : on pose $\tilde{\Phi} = \Phi_n$ sur $\overline{U}_n \setminus U_{n-1}$, ce qui définit $\tilde{\Phi}$ sur $\mathcal{U} \coprod \mathcal{F}_1$. Si $z \in \mathcal{F}_2$ est tel que $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ où $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de disques telle que $\partial D_n \in \mathcal{E}_0^{(n)}$, on observe que

$$\text{rayon}(D_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \text{rayon}(D_n)$$

puisque le centre de D_n n'appartient pas à D_{n+1} , de sorte que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{z\}.$$

On pose alors $\{\tilde{\Phi}(z)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{D}_n$ où \tilde{D}_n est le disque bordé par $\tilde{\Phi}(\partial D_n)$.

L'application $\tilde{\Phi}$ vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\tilde{\Phi}$ est un plongement K -quasiconforme de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ;
- ii) $\tilde{\Phi}$ est holomorphe sur \mathcal{U} ;
- iii) $\forall s \in S$, $\tilde{\Phi}(C_s^0) = C_s$.

L'étape suivante de la preuve est le

LEMME 3. — *Le complémentaire de \mathcal{U} dans \mathbb{C} est de mesure de Lebesgue nulle.*

Preuve du lemme 3. — Comme $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U} = \mathcal{F}_1 \coprod \mathcal{F}_2$ et que \mathcal{F}_1 est négligeable (comme réunion dénombrable de cercles), il reste à prouver que \mathcal{F}_2 est négligeable. Pour cela, on utilise le théorème de densité de Lebesgue selon lequel presque tout point de \mathcal{F}_2 est un point de densité, c'est-à-dire, pour presque tout $z \in \mathcal{F}_2$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(B(z, \varepsilon) \cap \mathcal{F}_2)}{m(B(z, \varepsilon))} = 1.$$

Ici, m désigne la mesure de Lebesgue et $B(z, \varepsilon)$ la boule de centre z et de rayon ε . Nous allons démontrer que \mathcal{F}_2 ne possède pas de point de densité, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathcal{F}_2$, il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ et un réel $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{m(B(z, \varepsilon_n) \cap \mathcal{F}_2)}{m(B(z, \varepsilon_n))} \leq 1 - \eta.$$

Ceci, joint au théorème de densité de Lebesgue, assurera que $m(\mathcal{F}_2) = 0$.

Soit donc $z \in \mathcal{F}_2$. Il existe une suite décroissante $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de disque telle que $\partial D_n = C_n^0 \in \mathcal{E}_0^{(n)}$ et $\{z\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Notons C_n^1, \dots, C_n^6 les six cercles de $\mathcal{E}_0^{(n)}$ tangents à C_n^0 , et $\delta_n^1, \dots, \delta_n^6$ les cercles circonscrits aux six interstices formés par cette

configuration. Ces six cercles sont orthogonaux à C_n^0 . On observe que, pour $1 \leq k \leq 6$, le disque bordé par δ_n^k ne contient aucun point de \mathcal{F}_2 , car il est possible de paver δ_n^k avec les images de l'interstice circonscrit par δ_n^k par certaines inversions I_C , $C \in \bigcup_{p \geq n} \mathcal{E}_0^{(p)}$.

Considérons maintenant un cercle unité C_0 et un cercle δ orthogonal à C_0 et vu du centre de C_0 sous un angle de $\frac{2\pi}{6}$. Posons $r = \frac{m(\text{Int}(\delta) \cap \text{Int}(C_0))}{m(\text{Int}(C_0))}$ où $\text{Int}(C_0)$ désigne l'intérieur du disque bordé par C_0 . Des six cercles $\delta_n^1, \dots, \delta_n^6$, l'un au moins δ_n^k est vu sous un angle de $\frac{2\pi}{6}$ du centre de C_n^0 de sorte que

$$\frac{m(\text{Int}(\delta_n^K) \cap \text{Int}(C_n^0))}{m(\text{Int}(C_n^0))} \geq r.$$

Par suite, $\frac{m(\mathcal{F}_2 \cap D_n)}{m(D_n)} \leq 1 - r$. On choisit ε_n égal au rayon du plus petit disque fermé de centre z et contenant le disque D_n . De $\text{rayon}(D_n) \leq \varepsilon_n \leq 2 \text{rayon}(D_n)$ on déduit d'une part que $\varepsilon_n \downarrow 0$, et d'autre part qu'il existe une constante η ne dépendant que de r , telle que

$$\frac{m(\mathcal{F}_2 \cap B(z, \varepsilon_n))}{m(B(z, \varepsilon_n))} \leq 1 - \eta$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

Fin de la preuve du théorème. — L'application $\tilde{\Phi}$ est donc K -quasiconforme sur C et holomorphe sur un ouvert de complémentaire négligeable, à savoir \mathcal{U} . On en déduit (voir [Ahl], corollaire 2, p. 33) que $\tilde{\Phi}$ est holomorphe sur C tout entier. Comme $\tilde{\Phi}$ est injective, on a nécessairement $\tilde{\Phi}(z) = az + b$, ($a, b \in C$) de sorte que $\mathcal{E} = \tilde{\Phi}(\mathcal{E}_0)$ est semblable à \mathcal{E}_0 . ■

Remarque. — Cette preuve n'a en fait rien de spécifique à la structure hexagonale de la combinatoire de \mathcal{E}_0 . Nous pouvons généraliser le théorème de rigidité comme suit. Soit \mathcal{T} une triangulation infinie sans bord du plan, \mathcal{T}^1 le 1-squelette de \mathcal{T} et S l'ensemble des sommets de \mathcal{T} . À toute fonction $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ on associe la variété riemannienne \mathcal{T}_r plate à singularités conique et l'empilement de cercle $\mathcal{E}(r)$ construits dans [CV-M], section II. On suppose qu'il existe $r_0 : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que la variété \mathcal{T}_{r_0} soit isométrique au plan euclidien. Si r est une fonction sur S telle que \mathcal{T}_r soit immergée dans le plan, on note $\varphi : \mathcal{T}_{r_0} \rightarrow \mathcal{T}_r$ l'application construite au début de la section II et $\Phi = \psi \circ \varphi$ où ψ est l'immersion de \mathcal{T}_r dans le plan. On a le

THÉORÈME ([R]). — Si Φ est un plongement et si \mathcal{T}^1 est de valence bornée, alors Φ est une similitude et l'empilement de cercles $\mathcal{E}(r)$ de \mathcal{T}_r est semblable à l'empilement $\mathcal{E}(r_0)$ de \mathcal{T}_{r_0} .

Preuve. — Supposons que chaque sommet de T^1 ait au plus N voisins, et indiquons les deux endroits de la preuve du théorème précédent à modifier : le lemme 1 et sa preuve sont identiques, à ceci près que, ici, K dépend de N . L'autre point se trouve dans la preuve du lemme 3 : la définition de r est la même, mais il faut prendre un cercle δ orthogonal à C_0 et vu du centre de celui-ci sous un angle de $\frac{2\pi}{N}$ (et non $\frac{2\pi}{6}$). Le reste est inchangé. ■

IV. Empilements immergés proprement dans le plan

Pour $(a, b) \neq (1, 1)$, l'empilement $\mathcal{E}(a, b)$ construit à la section II est un exemple d'empilement immergé non proprement dans le plan puisqu'il s'accumule sur Ω qui est le centre commun aux deux similitudes qui engendrent $\mathcal{E}(a, b)$. Il est naturel de se demander si l'empilement hexagonal standard \mathcal{E}_0 est le seul qui soit immergé proprement. La réponse est affirmative (à similitude près) :

THÉORÈME. — *Si Φ est une immersion propre de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 alors c'est une similitude.*

En d'autres termes, tout empilement de cercles qui a même combinatoire que l'empilement hexagonal standard, et qui est immergé proprement dans \mathbb{R}^2 , est semblable à \mathcal{E}_0 .

Preuve. — Il s'agit d'observer le

LEMME. — *Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme local propre, alors f est un homéomorphisme global de \mathbb{R}^2 .*

Preuve du lemme. — Tout d'abord, f est surjective, car l'image de f est ouverte, fermée, et non vide. Par connexité de \mathbb{R}^2 , on a donc $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. On montre ensuite que f est un revêtement de \mathbb{R}^2 : la préimage d'un point y est compacte et faite de points isolés, donc est finie : $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Par connexité, le cardinal de $f^{-1}(y)$ ne dépend pas de y . On choisit alors k voisinages V_1, \dots, V_k de x_1, \dots, x_k et U voisinage de y tels que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^k V_i$ ce qui prouve que f est un revêtement. Enfin, puisque \mathbb{R}^2 est simplement connexe, f est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 . ■

Prouvons le théorème : si Φ est une immersion propre, c'est un homéomorphisme local propre de \mathbb{R}^2 , donc c'est un homéomorphisme, d'après le lemme, donc c'est une

similitude d'après le théorème de rigidité des empilements plongés. ■

Commentaires.

1) Ce théorème admet naturellement une généralisation analogue à celle développée à la fin de la section précédente, dont on reprend ici les notations pour énoncer :

THÉORÈME. — *Si Φ est une immersion propre du plan euclidien et si T^1 est de valence bornée, alors Φ est une similitude et l'empilement de cercles $\mathcal{E}(r)$ de T_r est semblable à l'empilement $\mathcal{E}(r_0)$ de T_{r_0} .*

2) La question suivante est encore sans réponse : si l'immersion Φ est surjective, est-elle nécessairement une similitude ?

Autrement dit, l'empilement hexagonal standard est-il, à similitude près, le seul empilement hexagonal immergé surjectif ?

V. Empilements infinis immergés proprement dans le disque

L'objet de cette section est tout d'abord de généraliser les résultats de rigidité que l'on vient de décrire aux empilements infinis immergés dans le disque unité ouvert D de \mathbb{R}^2 . Nous examinons ensuite, à la lumière de [B-St], le cas des empilements de valence constante.

Soit T une triangulation infinie sans bord de D , T^1 le 1-squelette de T et S l'ensemble des sommets de T . À toute fonction $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ on associe la variété riemannienne T_r plate à singularités coniques et l'empilement de cercles $\mathcal{E}(r)$ construits dans [CV-M], section II. On suppose qu'il existe r_0 telle que la variété T_{r_0} soit isométrique à D muni de la métrique euclidienne. Si r est une fonction sur S telle que T_r soit immergée dans D on note $\varphi : T_{r_0} \rightarrow T_r$ l'application construite au début de la section II et $\Phi = \psi \circ \varphi$ où ψ est l'immersion de T_r dans D . On a deux théorèmes :

THÉORÈME 1 ([R]). — *Si Φ est un homéomorphisme sur D et si T^1 est de valence bornée, alors Φ est une transformation de Möbius de D qui envoie $\mathcal{E}(r_0)$ sur $\mathcal{E}(r)$.*

THÉORÈME 2. — *Si Φ est une immersion propre de D dans D et si T^1 est de valence bornée alors Φ est une transformation de Möbius qui envoie $\mathcal{E}(r_0)$ sur $\mathcal{E}(r)$.*

Preuve du théorème 1. — De la même manière que dans la section III, on construit un homéomorphisme K -quasiconforme $\tilde{\Phi}$ de D sur D qui envoie $\mathcal{E}(r_0)$ sur $\mathcal{E}(s)$ et qui est holomorphe sur un ouvert de complémentaire négligeable. On conclut que $\tilde{\Phi}$ est une bijection holomorphe de D , c'est-à-dire une transformation de Möbius. ■

Preuve du théorème 2. — On se ramène au théorème 1 en observant, comme dans la section IV, qu'un homéomorphisme local propre de D est un homéomorphisme de D . ■

Remarque. — On prendra garde au fait que, dans le théorème 1, il ne suffit pas de supposer que Φ est un plongement pour pouvoir conclure. Il n'y a qu'à considérer par exemple un homothétique euclidien de $\mathcal{E}(r_0)$ dans D .

Lorsque le 1-squelette T^1 de T est de degré (valence) constant $d \geq 7$, Alan Beardon et Kenneth Stephenson ont donné une preuve élémentaire du théorème 1 (voir [B-St]). Nous terminons cette section en exposant cette preuve.

Notons D_{hyp} le disque D muni de la métrique riemannienne hyperbolique à courbure -1 . On fixe pour toute la suite un entier $d \geq 7$. Notons T la triangulation de D associée au pavage de D par des triangles hyperboliques équilatéraux dont chaque angle vaut $\frac{2\pi}{d}$. Chaque sommet de T est de degré d et toutes les arêtes de T ont la même longueur notée $2R_d$. Pour tout sommet s de T on considère le cercle hyperbolique C_s^0 de centre s et de rayon R_d . La collection $\{C_s^0\}_{s \in S} = \mathcal{E}^0$ est un empilement de cercles hyperboliques de combinatoire T^1 (S et T^1 désignant l'ensemble des sommets de T et son 1-squelette). (voir fig. 2)

Soit $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On munit chaque triangle de T de la métrique hyperbolique à courbure -1 qui au côté ss' affecte la longueur $r(s) + r(s')$. On obtient ainsi une variété riemannienne à courbure -1 à singularités coniques notée $\mathcal{T}_r^{\text{hyp}}$. Enfin, on note $\mathcal{E}(r) = \{C_s\}_{s \in S}$ où C_s est le cercle de $\mathcal{T}_r^{\text{hyp}}$ de centre s et de rayon $r(s)$. Avec ces notations, le théorème 1 se réécrit ainsi :

THÉORÈME 1 bis ([B-St]). — Si la variété $\mathcal{T}_r^{\text{hyp}}$ est isométrique au disque de Poincaré D_{hyp} alors $\forall s \in S, r(s) = R_d$ et l'empilement $\mathcal{E}(r)$ est isométrique à l'empilement \mathcal{E}^0 .

Comme les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens et que les isométries de D_{hyp} sont exactement les transformations de Möbius de D , on a bien le théorème 1 dans le cas du degré constant.

Preuve du théorème 1 bis. — Elle est élémentaire et repose sur la géométrie

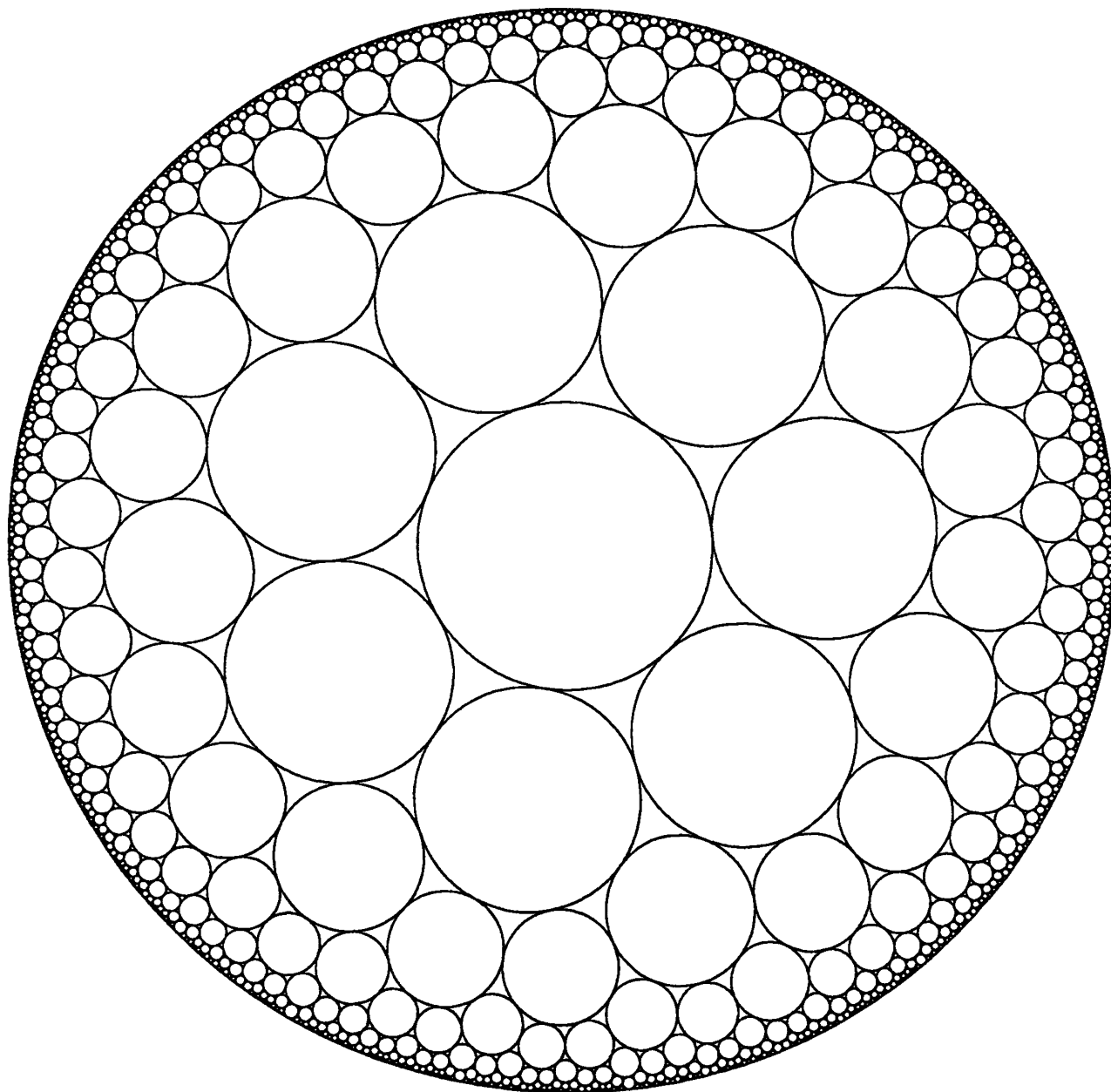


Fig. 2 : un empilement de degré 7 dans le disque hyperbolique.

hyperbolique.

Commençons par calculer R_d . En considérant un triangle de \mathbf{D}_{hyp} dont les angles

sont $\frac{\pi}{d}$, $\frac{2\pi}{d}$, $\frac{\pi}{2}$ on obtient (voir [B] p. 148) $\frac{\sinh(R_d)}{\sinh(2R_d)} = \sin \frac{\pi}{d}$, d'où :

$$\sin \frac{\pi}{d} = \frac{1}{2 \cosh R_d}.$$

Considérons maintenant un cercle C de rayon r dans D_{hyp} et d cercles C_1, \dots, C_d tangents extérieurement à C , et tels que C_i soit tangent à C_{i+1} et C_d à C_1 . Supposons que C_1, \dots, C_d aient même rayon $f(r)$. On a alors

$$\frac{\sinh[f(r)]}{\sinh[f(r) + r]} = \sin \frac{\pi}{d}$$

soit

$$(*) \quad \exp[2f(r)] = \frac{1 - \lambda e^{-r}}{1 - \lambda e^r} \quad \text{où } \lambda = \sin \frac{\pi}{d} < \frac{1}{2}.$$

Nous allons utiliser la dynamique des itérés de f pour étudier la géométrie des empilements de cercles hyperboliques de degré d .

LEMME 1. — *La fonction f possède les propriétés suivantes :*

- i) f est un difféomorphisme strictement croissant de $[0, -\text{Log } \lambda[$ sur $[0, +\infty[$;
- ii) f admet deux points fixes : 0 et R_d ; $f'(0) < 1$ et $f'(R_d) > 1$;
- iii) $f(r) < r$ si et seulement si $r \in]0, R_d[$.

Preuve du lemme 1.

i) Par dérivation de (*) il vient $2e^{2f(r)} \cdot f'(r) = \frac{2\lambda[\cosh(r) - \lambda]}{(1 - \lambda e^r)^2}$, et de $r \in [0, -\text{Log } \lambda[$ on déduit $\cosh(r) > \frac{1+\lambda}{2} > \lambda$ car $\lambda < \frac{1}{2}$, d'où $f'(r) > 0$.

ii) On a si $r > 0$, $f(r) = r \iff \frac{\sinh(r)}{\sinh(2r)} = \lambda \iff \cosh(r) = \frac{1}{2\lambda} = \cosh(R_d) \iff r = R_d$. Comme $e^{2f(R_d)} \cdot (1 - \lambda e^{R_d})^2 = (1 - \lambda e^{-R_d})(1 - \lambda e^{R_d}) = 1 - 2\lambda \cosh(R_d) + \lambda^2 = \lambda^2$, on a $f'(R_d) = \frac{2\lambda[\cosh(R_d) - \lambda]}{2e^{2f(R_d)}(1 - \lambda e^{R_d})^2} = \frac{1 - 2\lambda^2}{2\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2} - 1 > 1$ car $\lambda = \sin \frac{\pi}{d} < \frac{1}{2}$. Par ailleurs, $f'(0) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} < 1$ toujours car $\lambda < \frac{1}{2}$.

Enfin, iii) résulte aussitôt de ii).

Le lemme suivant est le lemme 5, p. 34 de [B-St] :

LEMME 2. — *Soit C_0 un cercle dans D_{hyp} de rayon r_0 et C_1, \dots, C_d , d cercles tangents extérieurement à C_0 de rayons respectifs r_1, \dots, r_d et tels que C_i soit tangent à C_{i+1} et C_d à C_1 . Alors on a :*

- i) $r_0 < -\text{Log } \lambda$, de sorte que $f(r_0)$ est défini ;
- ii) $\min\{r_1, \dots, r_d\} \leq f(r_0) \leq \max\{r_1, \dots, r_d\}$.

Preuve du lemme 2. — Prouvons *i*). Il faut voir que $\sin \frac{\pi}{d} = \lambda < e^{-r_0}$. Notons, pour $1 \leq i \leq d$, α_i le demi-angle sous lequel C_i est vu du centre de C_0 . On a $\sin \alpha_i = \frac{\sinh(r_i)}{\sinh(r_i + r_0)} < e^{-r_0}$, de sorte que $2\pi = \sum_{i=1}^d 2\alpha_i < 2d \arcsin(e^{-r_0})$ ce qui donne $\frac{\pi}{d} < \arcsin e^{-r_0}$ d'où $\sin \frac{\pi}{d} < e^{-r_0}$.

Prouvons *ii*). Ceci résulte aussitôt du fait que d cercles autour de C_0 qui ont même rayon ont pour rayon $f(r_0)$. ■

Achevons la preuve du théorème 1 bis. Soit C_0 un cercle de $\mathcal{E}(r)$ de rayon ρ_0 . Nous distinguons deux cas :

1^{er} cas : $\rho_0 < R_d$. — On construit une suite de cercles $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : C_{n+1} est un cercle de rayon minimal parmi les d cercles tangents à C_n . Notons ρ_n le rayon de C_n . D'après le lemme 2, on a $\rho_n \leq f^n(\rho_0)$, et comme $\rho_0 < R_d$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(\rho_0) = 0$. Il existe un voisinage I de 0 tel que $\tau = \sup_{r \in I} |f'(r)| < 1$. Pour n assez grand, $f^n(\rho_0) \in I$ donc $f^n(\rho_0) = O(\tau^n)$ donc $\rho_n = O(\tau^n)$ de sorte que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n$ converge. Mais alors la suite $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s'accumule dans D_{hyp} , ce qui n'est pas possible, donc $\rho_0 \geq R_d$.

2^e cas : $\rho_0 > R_d$. — On construit une suite de cercles $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de cette façon ; C_{n+1} est un cercle de rayon maximal parmi les d cercles tangents à C_n . Notons toujours ρ_n le rayon de C_n . On a alors $\rho_n \geq f^n(\rho_0)$ de sorte qu'à partir d'un certain rang, $\rho_n \geq -\log \lambda$ ce qui contredit le point *i*) du lemme 2, donc $\rho_0 \leq R_d$.

On en déduit que $\rho_0 = R_d$ et ce pour tout cercle C_0 de l'empilement $\mathcal{E}(r)$, ce qui prouve le théorème 1 bis. ■

VI. La constante s_n

Dans [R-S], Rodin et Sullivan introduisent une constante qu'ils nomment s_n , et qui mesure le défaut maximal de n générations d'un empilement hexagonal plongé dans le plan euclidien à être régulières. Plus précisément, notons \mathcal{T}_n la triangulation d'un hexagone régulier de côté n par des triangles équilatéraux unités et \mathcal{H}_n un empilement de cercles dans le plan euclidien de combinatoire \mathcal{T}_n . On note $C_0^{(n)}$ le cercle central de \mathcal{H}_n et $C_1^{(n)}, \dots, C_6^{(n)}$ les six cercles qui lui sont tangents. On pose

$$s_n = \sup_{\mathcal{H}_n} \left(\max_{1 \leq i \leq 6} \left| \frac{\text{rayon}(C_i^{(n)})}{\text{rayon}(C_0^{(n)})} - 1 \right| \right),$$

la borne supérieure étant prise sur tous les empilements \mathcal{H}_n plongés de combinatoire \mathcal{T}_n (voir fig. 3).

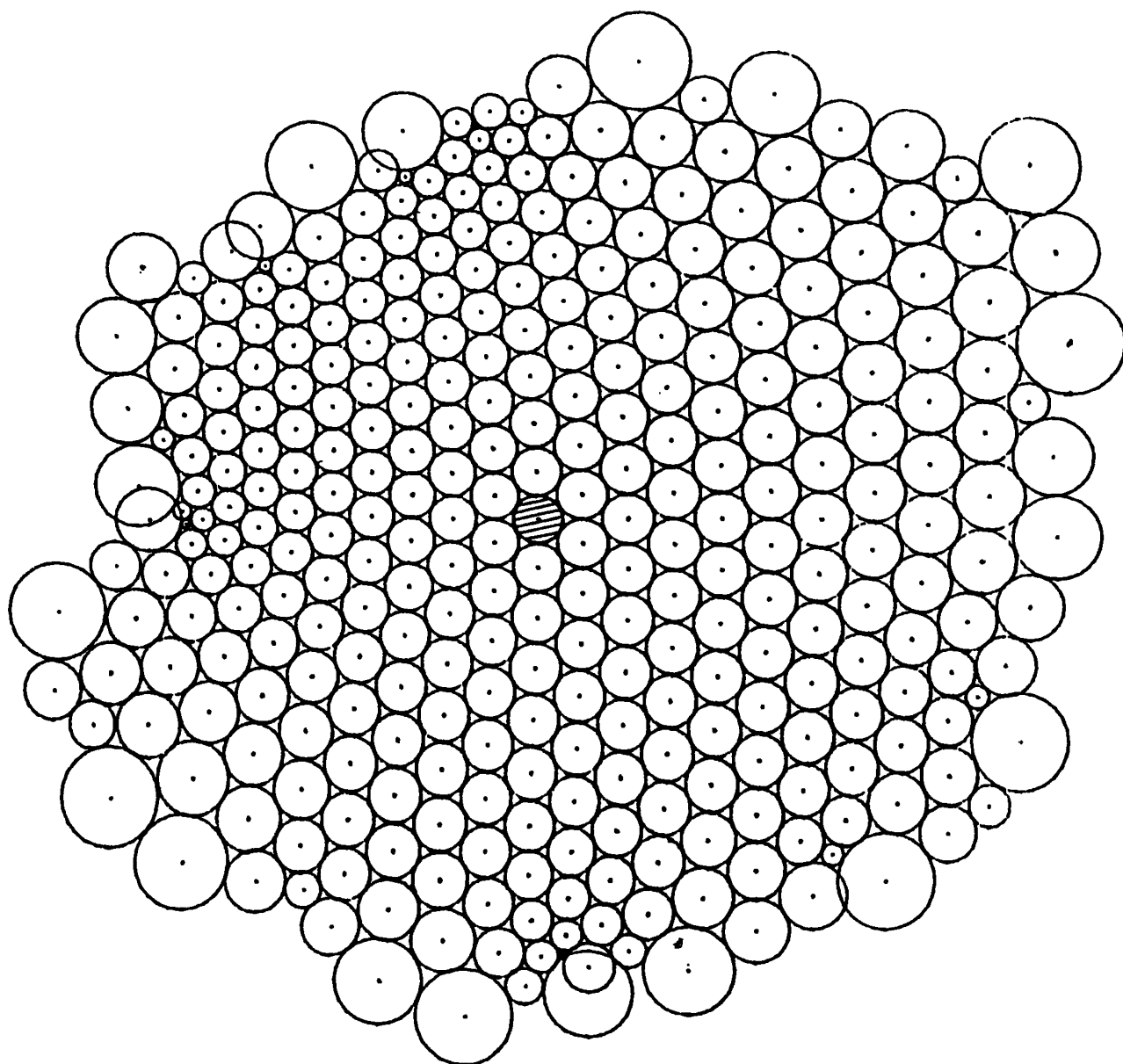


Fig. 3 : autour du cercle central, neuf générations plongées, mais la dixième ne l'est pas.

On a alors le

THÉORÈME 1 ("Hexagonal Packing Lemma" de [R-S]). — *La constante s_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.*

Preuve du théorème. — Considérons une suite $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'empilement plongés tels que, pour tout n , la combinatoire de \mathcal{H}_n soit \mathcal{T}_n et dont le cercle central $C_0^{(n)}$ est fixe et a pour rayon 1. Le *ring lemma* de [R-S] fournit une constante $\tau > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i = 1, \dots, 6$ on ait $\tau \leq \text{rayon}(C_i^{(n)}) \leq \frac{1}{\tau}$. Par conséquent, on peut extraire de la suite $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite telle que la première génération de cercles autour de $C_0^{(n)}$ converge. De la même manière, on peut extraire de cette sous-suite une nouvelle suite telle que la deuxième génération de cercles autour de $C_0^{(n)}$ converge. En continuant ainsi et en utilisant le procédé diagonal d'extraction, on obtient un empilement limite \mathcal{H}_∞ infini, hexagonal et plongé (puisque tous les \mathcal{H}_n le sont) dans le plan.

Si le théorème était faux, on pourrait choisir une suite (\mathcal{H}_n) et en extraire une sous-suite telle que, dans l'empilement limite \mathcal{H}_∞ , un des six cercles autour du cercle central ait un rayon différent de 1, et ceci contredirait l'unicité (à similitude près) de l'empilement hexagonal standard parmi les empilements infinis plongés dans le plan. ■

Z.X. He, P. Doyle et B. Rodin, ainsi que D. Aharonov, ont déterminé le comportement asymptotique de s_n :

THÉORÈME 2 ([He], [Aha1], [Aha2]). — *Il existe deux constantes α et β telles que*

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < \frac{\alpha}{n} \leq s_n \leq \frac{\beta}{n}.$$

THÉORÈME 3 ([D-H-R]).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n s_n = \frac{2\sqrt[3]{2}\Gamma^2(\frac{1}{3})}{3\Gamma^2(\frac{2}{3})} = 4,45165\dots$$

Commentaire. — Le théorème 1 est l'ingrédient essentiel de la discrétisation de l'uniformisation de Riemann d'un ouvert simplement connexe borné de \mathbb{C} . Voir [R-S], [He-R], ainsi que [M] pour une généralisation au cas d'ouverts non simplement connexes.

Bibliographie

- [Aha1] AHARONOV D. — *The hexagonal packing lemma and discrete potential theory*, Canad. Math. Bull. **33** (1990), 252–277.
- [Aha2] AHARONOV D. — *The hexagonal packing lemma and the Rodin-Sullivan conjecture*, Trans. of the A.M.S. **343** (n°1) (1994), 157–167.
- [Ahl] AHLFORS L. — *Lectures on quasi-conformal mappings*, Van Nostrand, 1982.
- [B] BEARDON A. — *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, 1983.
- [B-D-St] BEARDON A.-F., DUBEJKO T., STEPHENSON K. — *Spiral hexagonal circle packings in the plane*, Geometriae Dedicata **49** (1994), 39–70.
- [B-St] BEARDON A.-F., STEPHENSON K. — *Circle packings in different geometries*, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 27–36.
- [Cn-R] CALLAHAN K., RODIN B. — *Circle packings immersions form regularly exhaustible surfaces*, Complex variables **21** (1993), 171–177.
- [Cr-R] CARTER I., RODIN B. — *An inverse problem for circle packings and conformal mappings*, Trans. AMS **334** (n°2) (1992), 861–875.
- [CV-M] COLIN DE VERDIÈRE Y., MATHÉUS F. — *Empilements de cercles et approximations conformes*, à paraître dans les Actes de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'honneur de Marcel Berger, Arthur L. Besse (éditeur) Collection SMF Séminaires et Congrès n°1, 1994.
- [D-H-R] DOYLE P.-G., HE Z.X., RODIN B. — *The asymptotic value of the circle packing constant s_n* , Discrete and Computational Geometry **12** (1994), 105–116.
- [He] HE Z.-X. — *An estimate for hexagonal circle packings*, J. of Differential Geom. **33** (1991), 395–412.
- [He-R] HE Z.X., RODIN B. — *Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mapping*, Communications in Analysis and Geometry **1** (1) (1993), 31–41.
- [M] MATHÉUS F. — *Empilements de cercles : rigidité, discrétisation d'applications conformes*, Thèse de Doctorat de l'Université de Grenoble I, 1994.
- [R] RODIN B. — *On a problem of A. Beardon and K. Stephenson*, Indiana Univ. Math. Journal **40** (n°1) (1991), 271–275.
- [R-S] RODIN B., SULLIVAN D. — *The convergence of circle packings to the Riemann mapping*, J. of Diff. Geometry **26** (1987), 349–360.
- [Sch] SCHRAMM O. — *Rigidity of infinite (circle) packings*, Journal of the AMS **4** (n°1) (1991), 127–149.

Frédéric MATHÉUS
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 URA188 du CNRS
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
 E-mail: matheus@fourier.grenet.fr