

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

AHMED INTISSAR

MOHAMED VALL OULD MOUSTAPHA

**Formule intégrale & développement asymptotique du nombre
de points d'un réseau dans l'espace hyperbolique**

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 37-39

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__37_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULE INTÉGRALE & DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE POINTS D'UN RÉSEAU DANS L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Ahmed INTISSAR & Mohamed Vall OULD MOUSTAPHA

RÉSUMÉ . — Dans cet article on donne une formule intégrale pour le nombre de points d'un réseau dans un espace symétrique de type non compact de rang 1 ainsi que le comportement asymptotique de ce nombre avec une estimée fine du reste.

ABSTRACT . — In this paper an integral formula for the number of lattice points in non compact type symmetric space of rank one and its asymptotic behaviour with a sharp estimate for the remainder term are given.

Soit (Σ, ds) un espace symétrique de type non compact de rang 1. Rappelons que Σ est un espace hyperbolique KH^n où K est l'un des corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{C}_\alpha$ (on notera $d = \dim_{\mathbb{R}} K$).

Soit Γ un sous-groupe discret du groupe des déplacements G de Σ . Pour deux points x, y de Σ , on considère la fonction de comptage

$$N(T, x, y) = \#\{\gamma \in \Gamma; d(x, \gamma y) < T\},$$

où $d(x, y)$ est la distance géodésique sur Σ et T un grand paramètre.

Soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami de la variété (Σ, ds) . Si on pose :

$$L = -\Delta - \sigma^2$$

avec $\sigma = \frac{d(n+1)-2}{2}$, on montre que l'opérateur L est G -invariant elliptique autoadjoint non négatif et qu'il admet un spectre continu représenté par le demi-axe des réels positifs.

Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion du groupe G des déplacements de Σ tel que le Laplacien L_Γ de la variété Σ/Γ admette exactement N valeurs propres négatives dans l'intervalle $[-\sigma^2, 0]$ et que son spectre continu éventuel soit positif. Un tel groupe sera dit "spectralement fini" d'ordre N .

Soit $\mathcal{O}_\Gamma(\lambda, x, y)$ la fonction spectrale du Laplacien L_Γ associée à ses fonctions propres $\varphi(\lambda, x)$ pour λ dans $sp(L_\Gamma)$ voir [1].

Ici le spectre de L_Γ est considéré dans le sens $L^2(\Sigma/\Gamma)$ où le spectre est partagé en sa partie continue et sa partie discrète "finie". Nous donnons les deux résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Si Γ est un sous-groupe discret sans torsion du groupe des déplacements G de Σ , alors on a :*

$$N(T, x, y) = c_\sigma sh^{2\sigma-d+2} T \int_{-\sigma^2}^{+\infty} F\left(1 + \frac{\sigma-d}{2} - \frac{i\sqrt{\lambda}}{2}, 1 + \frac{\sigma-d}{2} + \frac{i\sqrt{\lambda}}{2}, \sigma - \frac{d}{2} + 2, -sh^2 T\right) d\lambda \mathcal{O}_\Gamma(\lambda; x, y)$$

avec $c_\sigma = \frac{\pi^{\sigma-\frac{d}{2}+1}}{\Gamma(\sigma-\frac{d}{2}+2)}$; $\sigma = \frac{d(n+1)-2}{2}$ et $F(a, b, c, z)$ est la fonction hypergéométrique ${}_2F_1(a, b, c, z)$.

THÉORÈME 2. — *Les hypothèses sont celles du théorème 1, on suppose de plus que Γ est "spectralement fini" d'ordre $N > 0$. Alors on a :*

$$N(T, x, y) = A(T, x, y) + \begin{cases} O\left(e^{(2\sigma-\frac{d}{2}-4)T}\right) & \text{si } \sigma > 0 \\ O\left(e^{(2\sigma-1-\frac{2\sigma-2}{2\sigma-4})T}\right) & \text{si } \sigma > 1 \\ O\left(e^{(2\sigma-2-\frac{2\sigma-4}{2\sigma-4})T}\right) & \text{si } \sigma > 2 \end{cases}$$

avec

$$A(T, x, y) = 2^{-\sigma} \pi^{\sigma-\frac{d}{2}+1} \sum_{j=1}^N \frac{2^{-\mu_j} \Gamma(\mu_j) e^{(\sigma+\mu_j)T}}{\Gamma\left(1 + \frac{\sigma-d}{2} + \frac{\mu_j}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\sigma+\mu_j}{2}\right)} \varphi_j(x) \varphi_j(y)$$

où $\mu_j = \sqrt{|\lambda_j|}$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres de L_Γ dans l'intervalle $[-\sigma^2, 0]$ et $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont les fonctions propres correspondantes.

Pour la preuve des théorèmes 1 et 2 voir [3].

La formule du théorème 1 généralise la formule (0.1) de [6] et celle du théorème 1 de [9] au cas de l'espace hyperbolique. Le théorème 2 généralise et améliore considérablement les résultats de Lax et Phillips [5], Levitan [6] et Ould Moustapha [9]. Notons enfin que le théorème 2 donne une réponse positive à la conjecture (0.5) de Miatello et Wallach [8] pour les groupes de covolumes finis. En effet si $\text{vol}(F) < +\infty$ avec $F = \Sigma/\Gamma$ alors $-\sigma^2$ est une valeur propre de L_Γ associée à la fonction propre constante normalisée $[\text{vol}(F)]^{-\frac{1}{2}}$. En d'autres termes, Γ est "spectralement fini" d'ordre

$N \geq 1$ et, en appliquant le théorème 2, on obtient un résultat beaucoup plus précis que la dite conjecture.

Remarque. — Dans le cas de l'espace hyperbolique sur les nombres de Cayley (i.e. $d = 8$) on a $n = 1$ ou 2 avec $CaH^1 \simeq HH^2$.

Bibliographie

- [1] BEREZANSKII Y.U. — *M expansions in eigenfunctions of self-adjoints operator, translations of monographs*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. ; 17, 1968.
- [2] HORMANDER L. — *The spectral functions of an elliptic operator*, Acta Math. 121 (1968), 193–218.
- [3] INTISSAR A. & OULD MOUSTAPHA M.V. — *Formule intégrale et développement asymptotique du nombre de points du réseau dans l'espace symétrique de type non compact de rang 1*, À paraître.
- [4] KROONWINDER T. — *A new proof of Paley-Wiener theorem for the Jacobi transform*, Ark. Mat. 13 (1975), 145–159.
- [5] LAX P.D. & PHILLIPS R.S. — *The asymptotic distribution of lattice points in euclidean and non euclidean spaces*, J. Func. Anal. 46 (1982), 280–350.
- [6] LEVITAN B.M. — *Asymptotic formula for the number of lattice points in euclidean and lobachevskii space*, Russian Math. Surveys 42:3 (1987), 13–42.
- [7] MAGNUS W., OBERHETTINGER F. & SONI R.P. — *Formulas and theorem for the special functions of mathematical physics*, Therd enlarged edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1966.
- [8] MIATELLO R. & WALLACH N.R. — *The resolvent of the laplacian on locally symmetric spaces*, J. Diff. Geometry 36 (1992), 663–698.
- [9] OULD MOUSTAPHA M.V. — *Formule intégrale et développement asymptotique du nombre de point du réseau dans l'espace hyperbolique complexe*, À paraître.
- [10] SELBERG A. — *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47–87.

A. INTISSAR
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
B.P. 1014
RABAT
(Maroc)

M.V. OULD MOUSTAPHA
UNIVERSITÉ DE NOUAKCHOTT
B.P. 798
NOUAKCHOTT
(Mauritanie)
Fax : 2222 587-09
Tél : 2222 587-10