Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Nabila Torki

Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 11 (1992-1993), p. 9-18

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1992-1993__11__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1992–1993 (9–18)

OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE

Yves COLIN DE VERDIÈRE et Nabila TORKI

Le but de ce texte est d'une part de présenter l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur les surfaces, d'autre part d'appliquer les méthodes déjà utilisées dans le cas sans champ magnétique ([CV1],[CV2],[CV3]) au cas avec champ magnétique.

Les résultats nouveaux sont:

1) *l'absence de majoration purement topologique* de la multiplicité des valeurs propres: la multiplicité du fondamental peut être arbitrairement grande même pour le fibré trivial sur S^2 (résultat obtenu dans [TO]);

2) *l'étude des invariants topologiques attachés aux bandes* pour un petit potentiel électrique périodique tel que le flux du champ magnétique dans un domaine fondamental est $2\pi\times$entier (effet Hall), voir [NO],[T-K-N2]. L'étude est présentée de façon à éviter au maximum les calculs explicites, en particulier de fonctions *theta* ou d'intégrales de courbure, en utilisant la théorie des fibrés en droites complexes holomorphes sur les surfaces de Riemann et de leurs diviseurs (voir par exemple [DE] ou [BO]).

1. Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur les surfaces.

1. Laplaciens.

On va considérer pour simplifier uniquement le cas des surfaces orientables, qui est très important pour la physique du solide (effet Hall, voir [CO] chapitre 4).

Soit donc (X, g) une surface riemannienne orientée complète, on considère sur X, un fibré en droites complexes C^∞, L muni d'une structure hermitienne $(.|.)$ et d'une connection ∇ compatible avec cette structure.

C'est à dire:

$$d(s|t) = (\nabla s|t) + (s|\nabla t) ,$$

pour toutes sections s, t.

On note B la courbure de cette connection, qui est la 2-forme à valeurs réelles sur X définie par

$$B(V, W) = i[\nabla_V, \nabla_W] .$$

Cette connexion munit canoniquement le fibré L d'une structure de fibré holomorphe: si la métrique g est localement de la forme $g = e^{2\varphi}(dx^2 + dy^2)$, on pose:

$$\nabla_{\partial/\partial\bar{z}} = 1/2(\nabla_{\partial/\partial x} + i\nabla_{\partial/\partial y}) \; ;$$

Il suffit maintenant de décréter holomorphes les sections s telles que $\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}s = 0$. Il est facile de voir que cela fait de L un fibré holomorphe, pour la structure complexe de X associée à la structure riemannienne. On peut du reste renverser la procédure: un fibré holomorphe muni d'une métrique hermitienne est automatiquement muni d'une connection hermitienne unique telle que les sections holomorphes s soient celles qui vérifient $\nabla_{\bar{z}}s = 0$.

A ces strutures, on peut associer 2 *laplaciens*: l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique H_B et le laplacien complexe $\Delta_{\mathbf{C}}$.

H_B est donné, dans les coordonnées locales conformes, par

$$H_B s = -e^{-2\varphi}(\nabla^2_{\partial/\partial x}s + \nabla^2_{\partial/\partial y}s) \; ,$$

formule qui généralise le laplacien usuel. Il est associé à la forme quadratique $q_B(s) = \int_X \|\nabla s\|^2 v_g$ sur l'espace de Hilbert des sections qui vérifient $\int_X |s|^2 v_g < +\infty$.

Le laplacien complexe est donné par

$$\Delta_{\mathbf{C}} s = -e^{-2\varphi}\nabla_{\partial/\partial z}\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}s \; ,$$

il est associé à la forme quadratique

$$q_{\mathbf{C}}(s) = \int_X |\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}s|^2 dxdy \; .$$

Il y a entre ces 2 laplaciens la relation fondamentale:

$$H_B = 4\Delta_{\mathbf{C}} + \bar{B} \; ,$$

où l'on a posé $B = \bar{B}v_g$ (v_g étant la forme volume associée à l'orientation de X).

En particulier si le champ magnétique $\bar{B}$ est constant ≥ 0 ces deux opérateurs ont des spectres faciles à comparer. La première valeur propre de H_B est $\bar{B}$ si le fibré L a des sections holomorphes de carré intégrable et ces sections forment l'espace propre associé. On peut donc appliquer la théorie des fibrés en droites holomorphes sur les surfaces de Riemann à ce contexte.

2. Fibrés en droites complexes.

Il y a 2 classifications importantes de ces fibrés:

1) la classification topologique

donnée par *la classe de Chern* $c_1(L) \in H^2(X, \mathbf{Z})$, qu'on peut identifier à un entier (appelé degré), grâce au générateur canonique de $H^2(X, \mathbf{Z})$, classe fondamentale de X qui est orientée.

Cette classe de Chern peut être définie et calculée de différentes façons:

a) Comme classe caractéristique:

si L est l'image réciproque du fibré en droites canonique C sur le projectif complexe de dimension N par une application f, sa classe de Chern est l'opposée de l'image réciproque par f du générateur canonique ω de $H^2(\mathbf{P}^N, \mathbf{Z})$. On peut la voir aussi comme l'opposé du nombre d'intersection de $f(X)$ avec un hyperplan de $\mathbf{P}^N$.

b) Au moyen de la courbure K d'une connection hermitienne sur L:

$$c_1(L) = \frac{1}{2\pi} \int_X K \ .$$

c) A partir du diviseur d'une section méromorphe $d = \sum_i n_i < a_i >$: $c_1(L) = \sum n_i$.

2) La classification holomorphe:

Si s est une section méromorphe de L, elle admet un diviseur $d(s) = \sum n_i < a_i >$, où les a_i sont les zéros et les pôles de s et $n_i \in \mathbf{Z}$ leur ordre. On a alors:

$$\sum n_i = c_1(L) \ .$$

2 sections méromorphes s et s' de L sont telles que $d(s') - d(s)$ est diviseur d'une fonction méromorphe sur X. On connait, pour chaque X ces diviseurs:

si X est la sphère, tout diviseur de degré 0 est diviseur d'une fonction méromorphe, i.e. une fraction rationnelle.

Si $X = \mathbf{C}/\Gamma$, les diviseurs de fonctions méromorphes sont ceux qui vérifient, si $d = \sum n_i < a_i >$, $\sum n_i a_i = 0 \bmod \Gamma$.

L'élément $\sum n_i a_i$ vu comme élément de $\mathbf{C}/\Gamma$ est donc indépendant de la section méromorphe s du fibré L holomorphe donné: en fait cette application $L \to \sum n_i a_i$ est un isomorphisme de l'ensemble des classes de fibrés holomorphes de degré donné sur $\mathbf{C}/\Gamma$. Par exemple, les fibrés de degré 0 sont paramétrés par des diviseurs $< x > - < 0 >$, $x \in \mathbf{C}/\Gamma$. Ils admettent une connection plate, mais n'admettent de section globalement constante que si c'est le fibré trivial. On peut aussi les identifier à la donnée d'un caractère de $\Gamma = \pi_1(X)$, l'holonomie du fibré: c'est sous cette forme qu'il intervienne dans la décomposition de Bloch d'un opérateur de Schrödinger périodique.

Les diviseurs sont utilisés par [L-V] pour repérer un point dans l'espace projectif de l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites. La dynamique quantique est alors lue sur la mobilité du diviseur (voir aussi [CV5]).

2. Cas de la sphère.

Dans ce cas (quitte à choisir l'orientation pour avoir des sections holomorphes), on peut supposer que le degré de L est un entier $n \geq 0$. Il n' y a alors, la métrique g étant donnée, qu'un champ $\bar{B}$ constant possible qui est donné par

$\int_X B = 2\pi n$. La connection hermitienne est alors unique à isomorphisme près (changement de jauge).

La dimension de l'espace propre associé à la plus petite valeur propre est $n+1$ d'après Riemann-Roch, et une section holomorphe est caractérisée à homothétie près par son diviseur, ensemble des n points sur S^2 où elle s'annule (avec multiplicité). On peut en particulier prescrire le polynôme de Taylor à l'ordre n en un point p fixé et on a ainsi un isomorphisme de l'espace propre $E_{\bar{B}}$ avec l'espace des polynômes complexes de degré $\leq n$.

On va maintenant étudier des perturbations de H_B par un petit potentiel *électrique*, c'est-à-dire étudier des opérateurs

$$H_{B,V} = H_B + V \ ,$$

où $V \in C^\infty(S^2, \mathbf{R})$ est petit.

Il y a dans ce contexte une notion naturelle de stabilité, analogue à celle développée dans [CV1], d'après les idées d'Arnold:

DÉFINITION. — *La valeur propre λ_0 de multiplicité m de H_B est* stable *(sous-entendu relativement aux perturbations par des potentiels scalaires) si l'application*

$$\mathcal{L} : \delta V \to \int_X \delta V(.|.) v_g \ ,$$

de l'espace tangent $T_0 C^\infty(X)$ dans les formes hermitiennes Herm(E_{λ_0}), *où E_{λ_0} est l'espace propre, est surjective.*

Cette condition est une condition de transversalité en $H_{B,0}$ entre la variété des opérateurs $H_{B,V}$ (B fixé, V variable) et la variété des opérateurs ayant λ_0 comme valeur propre isolée de multiplicité m.

THÉORÈME. — *Pour un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur une surface riemannienne compacte connexe orientée X, si $\bar{B} \geq 0$ et que $\bar{B}$ est la valeur propre fondamentale (existence de sections holomorphes), alors cette valeur propre est stable pour les perturbations par des petits potentiels électriques.*

Ce résultat est obtenu dans le cas où g est la métrique canonique sur S^2 par une méthode différente dans la thèse de N. Torki [TO].

Preuve.

Soit p un point de X et n le degré du fibré. L'application T qui à $s \in E_{\bar{B}}$ associe son polynôme de Taylor de degré n en p est injective (car une section holomorphe ne peut avoir plus que n zéros avec multiplicité).

Soit F son image. L'application $(T(\varphi), T(\psi)) \to \varphi\bar{\psi}$ de Herm(F) dans $C^\infty(X)$ est visiblement injective. Cela montre par transposition la surjectivité de l'application $\mathcal{L}$. □

On en déduit le (voir aussi [TO]):

THÉORÈME. — *Pour tout entier m, il existe un opérateur de Schrödinger avec champs magnétique et électrique, sur le fibré trivial sur S^2, ayant la première valeur propre de multiplicité m.*

Ce théorème qui contraste avec celui de Cheng [CH] pose la

question: existe-t-il une majoration en l'absence de champ électrique ou en terme de $\int_{S^2} |\bar{B}| v_g$?

Preuve. — On considère le fibré en droites complexes hermitiens L de degré $(m-1)$ au-dessus de la sphère S^2 munie de la métrique canonique, et on le munit d'une connexion ∇ hermitienne à courbure constante B. On trivialise L sur S^2 privée du pôle nord N et on note $\nabla = d + i\alpha$, où α est une 1-forme à valeurs réelles sur $S^2 \setminus \{N\}$, la connection sur ce fibré trivialisé.

On note $H_V = H_B + V$ et on sait que la première valeur propre de H_o est de multiplicité m et stable par les perturbations par les potentiels électriques.

On note $H_{\varepsilon,V}$ la restriction de H_V à $S_\varepsilon = S^2 \setminus D_\varepsilon$, où D_ε est le disque géodésique de centre N et de rayon ε de S^2, avec les conditions de Dirichlet. Alors le spectre de $H_{\varepsilon,V}$ converge vers celui de H_V ainsi que la somme des m premiers espaces propres de $H_{\varepsilon,V}$ (si V est assez petit) vers la somme des m premiers espaces propres de H_V lorsque ε tend vers 0. Cela résulte essentiellement de la densité de $C_o^\infty(S^2 \setminus \{N\}, L)$ dans $H^1(S^2, L)$ pour la topologie H^1.

Les techniques de [CV2] permettent alors de prouver que, pour $\varepsilon = r$ assez petit, il existe V_o tel que H_{ε,V_o} ait une première valeur propre de multipicité m stable par perturbation par les potentiels électriques.

On considère maintenant β une extension à S^2 de la restriction de α à S_r. On munit le fibré trivial sur S^2 de la connection $\tilde{\nabla} = d + i\beta$ et on considère l'opérateur de Schrödinger $\tilde{H}_{V,\eta} = \tilde{\nabla}^\star\tilde{\nabla} + V + \eta W$, où $W \geq 0$ admet pour support D_r.

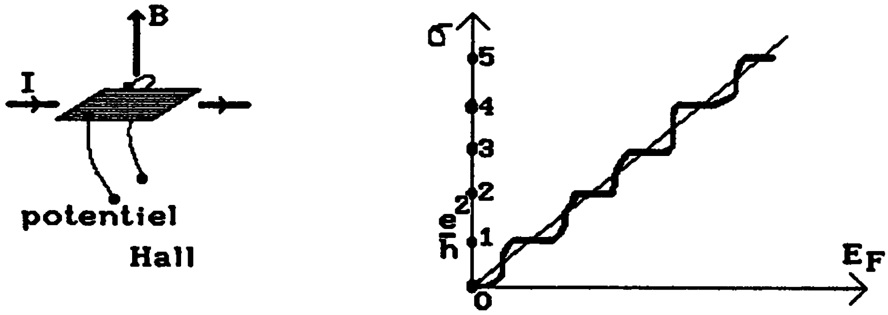
Lorsque $\eta \to +\infty$, le spectre de $\tilde{H}_{V,\eta}$ converge vers celui de $H_{r,V}$, ainsi que les sommes des m premiers espaces propres. On en déduit l'existence de V_1 et η_o tels que $\tilde{H}_{V_1,\eta_o}$ admette une première valeur propre de multiplicité m.
□

3. Cas du tore: effet Hall.

1. Introduction.

Il est apparu depuis quelques années, en particulier avec la découverte de l'effet Hall quantique, que certaines questions topologiques impliquant des fibrés vectoriels et leur classe de Chern jouent un rôle important en mécanique quantique, en particulier pour comprendre la conductivité d'un métal.

L'effet Hall classique et quantique (voir [CO], chap. 4)



L'effet Hall

L'effet Hall classique a été découvert en 1879. On considère un conducteur très mince et que l'on peut donc considérer comme bidimensionnel. On soumet ce conducteur à un champ magnétique (constant) perpendiculaire à son plan. Lors du passage du courant électrique, les porteurs de charge sont déviés perpendiculairement à leur trajectoire, ce qui donne lieu à une différence de potentiel mesurable et donc à une conductivité, quotient du courant par la différence de potentiel. Cette expérience permet de détecter le signe des porteurs de charge (électrons ou trous d'électrons).

Ces expériences ont été reprises en 1980 par k. von Klitzing, m. Pepper et g. Dorda dans des conditions de très basse température. On constate l'existence de plateaux pour l'expression de la conductivité en fonction de l'énergie de Fermi et, de plus, ces plateaux correspondent avec une approximation excellente à des multiples entiers de $\frac{e^2}{h}$. Dans le cas où le flux de champ magnétique par période du potentiel électronique est entier, la formule de Kubo exprime effectivement la conductivité comme une intégrale qui se trouve être une intégrale de courbure et donc une classe de Chern.

2. Exemple de calcul d'une classe de Chern.

soit L_o un fibré holomorphe de degré $N > 0$, soit $L_b = L_o \otimes F_{<b>-<0>}$ et H_b l'espace des sections holomorphes (de dimension N) de L_b que l'on peut considérer comme un fibré holomorphe $H : H_b \to b$ au dessus de $\mathbf{C}/\Gamma$.

LEMME. — *On a* $c_1(H) = 1$.

En effet, on peut plonger holomorphiquement H_b dans $\mathbf{C}^{N+1}$ en associant à une section son polynôme de Taylor en 0 à l'ordre N dans une trivialisation près de 0 qui est indépendante de b (trivialiser d'abord L_o, puis les fibrés plats en identifiant leurs sections à des fonctions quasi-périodiques sur $\mathbf{C}$): à

$$s(z) = \sum_{i=0}^{i=N} s_i z^i + O(z^{N+1}) ,$$

on associe le vecteur $(a_0, ..., a_N)$.

On considère alors le sous-fibré en droites H_b^o du fibré trivial $\mathbf{C}^{N+1}$ orthogonal à H_b. On a bien sûr: $c_1(H) = -c_1(H^o)$.

Soit maintenant la section de H^o qui consiste à regarder l'équation de la forme $s_N + \sum l_i(b)s_i = 0$. Cette section est holomorphe hors de $b = 0$: en effet pour $b \neq 0$, il n'y a pas de relation linéaire non triviale entre les s_i, $i \leq N-1$, car cela impliquerait l'existence d'une section ayant tous ses zéros en 0.

Près de $b = 0$, la relation peut s'écrire:

$$-(b + o(b))s_N + s_{N-1} + \sum_{i \leq N-2} l_i(b)s_i = 0 ,$$

où les $l_i(b)$ sont holomorphes près de 0: en effet si les s_i, $i \leq N-2$, sont nuls, le N-ème zéro est proche de 0 et est égal à b, de plus l'annulation de s_i, $i \leq N-2$ et de s_N implique celle de s_{N-1}. On en déduit que cette section de H^o a comme diviseur $- < 0 >$, c'est-à-dire que $c_1(H^o) = -1$.

De ce lemme, on déduit que si on a une décomposition en somme directe de fibrés en droites: $H = \oplus_{i=1}^{i=N} L_i$, alors: $\sum c_1(L_i) = 1$. C'est en particulier le cas si on a une famille d'opérateurs auto-adjoints A_b sur H_b dont les valeurs propres sont toutes simples pour toutes les valeurs de b, ce qui est la situation générique, et que les L_i sont les espaces propres.

On peut du reste interprêter géométriquement les degrés des L_i:

on considère $L_i(b)$ comme une droite de $\mathbf{C}^{N+1}$ par l'application qui, à une section de H_b , associe son développement de Taylor à l'ordre N en un point z_o de X. Soit f l'application de X dans $\mathbf{P}^N$ qui à b associe la droite de $\mathbf{P}^N$ définie précédemment. L_i est alors l'image réciproque par f du fibré canonique de $\mathbf{P}^N$. Donc sa classe de Chern est égale au nombre d'intersection de $f(X)$ avec l'hyperplan de $\mathbf{P}^N$ d'équation $P(z_o) = 0$.

La classe de Chern de L_i s'interprête donc en terme de balayage de $\mathbf{C}/\Gamma$ par les zéros des sections. C'est une bonne image de penser que le mouvement de ces zéros quand b varie donne une idée de la mobilité des électrons, i.e. de la conductivité. La formule de Kubo dans le cas de l'effet Hall relie effectivement la conductivité Hall à ces classes de Chern en unités $\frac{e^2}{h}$.

3. Effet Hall.

On considère ici un opérateur de Schrödinger H avec champ magnétique constant $B > 0$ et petit potentiel périodique V de période Γ sur $\mathbf{R}^2$. On suppose pour simplifier que le flux de B sur un domaine fondamental du groupe Γ des périodes de V est égal à $2\pi N$, $N \in \mathbf{N}$.

La théorie spectrale de cet opérateur s'étudie au moyen de la décomposition de Floquet. On a une équivalence unitaire entre H et une intégrale directe $\int_{\mathbf{C}/\Gamma} H_b db$, où les H_b sont de la forme $\Delta_b + V$, avec Δ_b laplacien associée à une connection à courbure $Bdx \wedge dy$ sur le fibré $L_b = L_o \otimes F_b$ (F_b fibré trivial plat).

Dans la situation générique, les valeurs propres $\lambda_i(b)$ de H_b sont simples pour tout b et tout i, car on a une famille à 2 paramètre d'opérateurs auto-adjoints. l'intervalle décrit par $\lambda_i(b)$ lorsque b décrit $\mathbf{C}/\Gamma$ est applelé la i-ème bande. Le spectre de H est la réunion de ces bandes. A chacune de ces bandes non dégénérées est associé sa classe de Chern, un entier, que physiquement on interprète comme la conductivité de cette bande.

Dans la situation perturbative (V petit), on peut identifier les N bandes qui viennent du premier niveau de Landau: la somme de leur classes de Chern vaut 1.

4. Effet tunnel. — Lorsque l'on est dans une situation "semi-classique" (grand champ magnétique ou $\hbar$ petit), on peut donc se livrer à un calcul approché des bandes, même sans champ magnétique.

On peut considérer les classes de Chern associée à chaque bande. Lorsque les fonctions propres sont localisées indépendamment des conditions aux limites près de puits de potentiel ou de trajectoires périodiques contractibles, on observe des classes de Chern nulles: les fonctions propres sont pratiquement insensibles aux conditions aux limites et les bandes associées sont étroites.

Par effet tunnel entre plusieurs puits de potentiel correspondant à des quasi-modes de même énergie (par exemple pour des raisons de symétrie), on peut avoir des classes de Chern non nulles et de la conductivité. Il faut bien sûr pour cela que le graphe plongé dans $\mathbf{C}/\Gamma$ qui permet de calculer l'effet tunnel "contienne " la topologie du tore, i.e. par exemple ne soit pas contractible sur un lacet.

5. Multiplicités.

Ici, on se place dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ (de dimension finie). On note W_2 la sous-variété de Sym($\mathcal{H}$) formée des opérateurs hermitiens ayant au moins une valeur propre de multiplicité 2. W_2 est une sous-variété (non fermée) de codimension 3 de Sym($\mathcal{H}$).

On a en vue la théorie de Floquet précédente pour une famille d'opérateurs H_μ dépendant d'un paramètre $\mu \in I$ réel (voir [F-L]). On se place dans la situation générique suivante:

pour toutes les valeurs de μ sauf un ensemble discret, $\mu \in S$, les valeurs propres des $H_{\mu,b}$ sont simples pour tout $b \in \mathbf{C}/\Gamma$. De plus, lorsque $\mu_o \in S$, il y a un $b_o \in \mathbf{C}/\Gamma$ unique tel que H_{μ_o,b_o} a une valeur propre λ_o de multiplicité 2. On suppose qu'en ce point $I \times \mathbf{C}/\Gamma$ rencontre W_2 transversalement. Pour $\mu \notin S$, les classes de Chern $c_1(E_i)$ sont localement constantes; lorsque μ franchit la valeur μ_o, il y a une modification: si on a $\lambda_i(H_{\mu_o,b_o}) = \lambda_{i+1}(H_{\mu_o,b_o})$, il y a conservation de $c_1(E_i) + c_1(E_{i+1})$, mais il y a dans la situation transversale une modification de ± 1 de chaque classe. Cette modification relève de l'analyse suivante:

soit $Z \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{H})$ une sous-variété transverse à W_2 en A_o ayant λ_o comme valeur propre de multiplicité 2 et $E_o = Ker(A_o - \lambda_o)$, l'espace propre associé. soit S une petite sphère de dimension 2 de Z contenant A_o. $A \in S$ admet exactement 2 valeurs propres $\lambda_- < \lambda_+$ proches de λ_o auxquelles on associe 2 fibrés en droites $L_\pm$ sur S qui sont donnés par les 2 espaces propres. Alors il est clair que $c_1(L_+) + c_1(L_-) = 0$, mais on a de plus que chacune de ces classes vaut ± 1.

En effet, on se ramène sur E_o, par linéarisation à examiner les opérateurs $A_{t,w}$, $t \in \mathbf{R}$, $w \in \mathbf{C}$ de matrices

$$\begin{pmatrix} t & w \\ \bar{w} & -t \end{pmatrix},$$

ayant une valeur propre double pour $t = w = 0$. On prend pour S la sphère $t^2 + |w|^2 = 1$. Les valeurs propres sont alors $\lambda_\pm = \pm 1$. L'espace propre L_+ est donné par:

$$\frac{X}{w} = \frac{Y}{1-t}$$

que l'on identifie au fibré canonique sur P^1 par la projection stéréographique:

$$(t, w) \to \frac{w}{1-t} .$$

Questions d'orientation: comment décider ce ± 1?

La première observation est que l'espace vectoriel réel des formes hermitiennes et celui des formes hermitiennes de trace nulle sur une espace vectoriel complexe E sont canoniquement orientés: en effet, l'ensemble des bases de E est connexe et donc tout choix fait dans une base se propage aux autres par continuité; on peut donc choisir si $dim(E) = 2$ la base $e_1 = A_{1,0}$, $e_2 = A_{0,1}$, $e_3 = A_{0,i}$.

Cela montre que la variété W_2 es transversalement orientée. Son intersection avec une variété Z transverse orientée a donc un signe bien déterminé. C'est lui qui décide des classes de Chern de L_+ et L_-.

4. Références.

[AN] V. ARNOLD. — *Modes and quasi-modes*, J. Funct. Analysis, **6** (1972), 94-101.

[A-S-S-S] J. AVRON, L. SADUN, J. SEGERT, B. SIMON. — *Chern numbers, Quaternions and Berry's phases*, Commun. Math. Phys., **124** (1989), 595-627.

[BO] J. B. BOST . — *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelian varieties*, prepub. IHES, **30** (1992), 1-141.

[CG] S. CHENG. — *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv., **51** (1979), 43-55.