

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

BRUNO COLBOIS

## Introduction au laplacien

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome S9 (1991), p. 49-57

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1991\\_\\_S9\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__49_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE  
GRENOBLE 1991  
(Aussois du 7 au 14 avril)**

## **Introduction au Laplacien**

**Bruno COLBOIS**

**Mathematisches Institut  
der Universität Bonn  
Berlingstrasse 1  
D-W 5300 BONN 1  
ALLEMAGNE**

**EPF  
Département de Mathématiques  
10-15 LAUSANNE-ECUBLENS  
SUISSE**

Remarque préalable: Pour plus de détails, on consultera [BD1], [BGM], [CH]. En particulier, l'essentiel des preuves se trouve dans [BD1] ch.3.

## I. LE LAPLACIEN

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne  $C^\infty$ . Le laplacien  $\Delta$  d'une fonction  $f \in C^2(M)$  est la fonction définie par  $\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ , ou, de façon équivalente, par  $\Delta f = \delta df$  où  $d$  est la différentielle extérieure et  $\delta$  son adjoint relativement au produit scalaire usuel de  $L^2(M, g)$ . En particulier, le laplacien est un invariant riemannien en ce sens qu'il commute avec isométries.

### Expression en coordonnées

Soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , un système de coordonnées sur un ouvert de  $M$  et  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  la base de l'espace tangent associé.

Soit  $g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ ,  $V = \sqrt{\det(g_{ij})}$  et  $g^{ij}$  la matrice  $(g_{ij})^{-1}$ . Le produit scalaire usuel sur  $L^2(M, g)$  est :  $\langle f, h \rangle = \int_M fh \, dV$ .

$$\text{On a : } \Delta f(x_1, \dots, x_n) = -\frac{1}{V} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} V \frac{\partial f}{\partial x_j}) (x_1, \dots, x_n).$$

### Preuve:

Rappelons en quelques mots les notions de divergence et de gradient (cf. [BGM] p.120 et suivantes).

La forme volume  $\omega$  s'écrit  $V \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

La divergence d'un champ de vecteurs  $X$  est définie par  $\operatorname{div} X \cdot \omega = d(i_X \omega)$

où  $i_X \omega(X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{n-1})$ . La divergence vérifie

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = f \operatorname{div} X + df(X).$$

$\delta$  est l'opérateur dual i.e.  $\delta \alpha = -\operatorname{div} \alpha^*$  où  $\alpha$  est une 1-forme et  $\alpha^*$  le champ de vecteurs associé. On a :

$$\int_M \langle df, \alpha \rangle \, dV = \int_M f \delta \alpha \, dV.$$

où  $\langle \alpha, \beta \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $(T_p M)^*$ .

### Expression locale de la divergence

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{V} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (V X_i) \quad \text{où} \quad X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\delta \alpha = -\frac{1}{V} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} V \alpha_j).$$

Le gradient de  $f$  est :  $\operatorname{grad} f = df^\#$  et ainsi  $\operatorname{grad} f = \sum_{i,j} \left( g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$

On obtient donc immédiatement l'expression voulue.

Remarque Dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , où  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , on retrouve l'expression

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

### Formule de Green

Soient  $h \in C^1(M)$ ,  $f \in C^2(M)$  telles que  $h \operatorname{grad} f$  soit à support compact..

Alors on a :  $\int_M (h \Delta f - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle) dV = 0$

ainsi  $\int_M h \Delta f dV = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle dV.$

où  $\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $T_p M$ .

On déduit en particulier :

1.  $\int_M \Delta f f dV = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle dV \geq 0$

2. Si  $h \in C^2(M)$ ,  $\int_M \Delta f h dV = \int_M f \Delta h dV$

Remarques 1. Ainsi  $\Delta$  est un opérateur différentiel d'ordre 2, symétrique et positif. Dès lors que  $M$  est complète, il admet une unique extension à un opérateur autoadjoint.

2. L'une des justifications à cette définition du laplacien est qu'il vérifie la relation 1 ci-dessus. On a une forme quadratique naturelle, qui à toute fonction  $f \in C^1(M)$  associe la forme quadratique  $\int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle dV$  correspondant à l'énergie (voir

plus bas pour d'autres développements dans cette direction) et le laplacien est l'opérateur qui est naturellement associé à cette forme quadratique relativement au produit scalaire usuel de  $L^2(M, g)$ .

Cas où  $M$  est une variété à bord  $\partial M$ 

La formule de Green devient :

$$\int_M (\Delta f h - \langle \text{grad} f \text{ grad} h \rangle) dV = \int_{\partial M} h(vf) dA$$

où  $dA$  est la forme volume de  $\partial M$  et  $vf$  la dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction de la normale unité  $v$  à  $\partial M$  dirigée vers l'intérieur.

$$\int_M (\Delta f h - \Delta h f) dV = \int_{\partial M} (hvf - fv h) dA.$$

**II. LE SPECTRE**Problème aux valeurs propres pour  $M$  compacte

On cherche à résoudre les équations suivantes :

1) Si  $(M, g)$  est compacte, sans bord

$$\Delta f = \lambda f$$

2) Si  $(M, g)$  est compacte à bord  $\partial M$

$$a) \begin{cases} \Delta f = \lambda f \text{ sur } \overset{\circ}{M} \\ f|_{\partial M} \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{Problème de Dirichlet})$$

ou

$$b) \begin{cases} \Delta f = \lambda f \text{ sur } \overset{\circ}{M} \\ vf|_{\partial M} \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{Problème de Neumann}).$$

Notons que les conditions  $f|_{\partial M} \equiv 0$  et  $vf|_{\partial M} \equiv 0$  font que  $\Delta$  est symétrique.

Etant donnée  $(M, g)$ , on cherche tous les nombres  $\lambda$  tels qu'il existe une solution non triviale  $u \in C^\infty(M)$  aux équations ci-dessus. Les  $\lambda$  possibles sont  $\geq 0$ . Un tel  $\lambda$  est appelé valeur propre et une fonction  $u$  associée fonction propre.

Théorème

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. Considérons l'un des trois problèmes aux valeurs propres ci-dessus.

1. Le spectre de  $\Delta$ , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres, consiste en une suite infinie  $(0) < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \nearrow \infty$ .
2. Chaque valeur propre  $\lambda_i$  est de multiplicité finie et les espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux dans  $L^2(M, V_g)$ .
3. La somme directe des espaces propres  $E(\lambda_i)$  est dense dans  $L^2(M, V_g)$ .

Exemple: Le cercle  $S^1$  avec sa métrique usuelle. On a  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} = (2\pi n)^2$ . Les fonctions propres sont  $\sin 2\pi n$  et  $\cos 2\pi n$ . On tombe sur les séries de Fourier habituelles.

### Remarques

1. Chaque fonction propre est en fait analytique.
2. 0 est valeur propre si  $M$  est compacte sans bord ou pour le problème de Neumann. La fonction propre est la fonction constante.
3. Rares sont les exemples de variétés où l'on puisse calculer le spectre ou même quelques valeurs propres (sphère standard, tores plats, projectifs, ...)

En général, on peut distinguer deux types de problèmes.

Problèmes directs    Connaissant la géométrie de  $M$  (courbure, volume, diamètre, rayon d'injectivité), estimer le spectre de  $(M, g)$ . En particulier  $\lambda_1$  (inégalités isopérimétriques) ou le comportement asymptotique.

Exemple 1. La première valeur propre non nulle d'une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle et diamètre borné est bornée inférieurement par une constante ne dépendant que de la dimension de la variété. (Voir par exemple [BBG] et [GA] pour d'autres généralisations).

### Exemple 2 : Formule de Weyl.

Soit  $N(\lambda)$  le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) inférieures à  $\lambda$ . Alors on a :  $N(\lambda) \sim \omega_n (\text{vol } M) \lambda^{n/2} \frac{1}{(2\pi)^n}$ ,  $\omega_n =$  volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ .

Problèmes inverses    En supposant le spectre de  $(M, g)$  connu, quelles informations peut-on déduire sur la géométrie de  $(M, g)$  ?

Exemple-type    On sait que deux variétés isométriques ont même spectre. Réciproquement, est-ce que la connaissance du spectre détermine la métrique ? Autrement dit, si  $\text{spectre } (M, g_1) = \text{spectre } (M, g_2)$  (avec multiplicité), est-ce que  $(M, g_1)$  est isométrique à  $(M, g_2)$  ?

Notons que le spectre détermine la dimension et le volume de la variété et, en dimension 2, la caractéristique d'Euler ([BGM] p.222-223)

La réponse est parfois positive : les tores plats de dimension 2 sont déterminés par leur spectre ainsi que la sphère standard en dimension  $\leq 6$ .

Non, le plus souvent. Pour tout  $g > 3$ , il existe deux surfaces à courbure -1, de genre  $g$ , isospectrales et non isométriques.

Il existe deux tores plats de dimension 8 isospectraux et non isométriques.

Lorsque de tels exemples sont connus, on peut alors étudier la structure des ensembles isospectraux (voir l'exposé de B. Brooks).

Problèmes ouverts: surface de genre 2,3 avec  $K \equiv -1$ ,  $S^n$  où  $n > 6$ , tores plats de dimension 3,4,5,6,7.

Voir [BD2] Séminaire Bourbaki.

### III. CARACTERISATION VARIATIONNELLE ET PRINCIPE DU MIN-MAX

Définition Soit  $f \in C^1(M)$ . L' énergie de  $f$  (ou intégrale de Dirichlet) est

$$E(f) = \int_M |df|^2 V_g.$$

$$\text{Si } f \neq 0, \text{ on pose : } R(f) = \frac{\int_M |df|^2 V_g}{\int_M f^2 V_g}$$

$R(f)$  est appelé le quotient de Rayleigh de  $f$ .

#### Caractérisation variationnelle

Notons  $\phi_i$  la fonction propre associée à  $\lambda_i$ . Alors on a:

$$\lambda_k = \inf \{ R(u) \mid u \neq 0, u \text{ est } L^2\text{-orthogonale à } \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1} \}$$

où  $u$  est dans  $H^1(M)$  et vérifie  $u|_{\partial M} = 0$  pour le cas du problème de Dirichlet.

En outre, toute fonction  $u$  telle que  $R(u) = \lambda_k$  est une fonction propre pour  $\lambda_k$ .

Par exemple, pour estimer  $\lambda_1$  dans le cas d'une variété sans bord, il suffit de regarder les fonctions d'intégrale nulle.

Cette caractérisation variationnelle pourrait faire penser qu'il faut connaître  $\phi_1, \dots, \phi_{k-1}$  pour estimer  $\lambda_k$ . Il n'en est rien. On a les deux autres caractérisations suivantes :

Max-Min :  $\lambda_k = \sup_{M_k} \inf \{ R(u) \mid u \text{ est } L^2\text{-orthogonale à } M_k, u \neq 0 \}$

où  $M_k$  décrit les sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $H^1(M)$  (et de dim.  $k-1$  avec condition au bord nulle dans le cas du problème de Dirichlet).

**Min-Max** :  $\lambda_k = \inf_{L_k} \sup \{R(u) \mid u \in L_k, u \neq 0\}$  où  $L_k$  décrit les sous-espaces vectoriels de dimension  $k+1$  de  $H^1(M)$  ( et de dim.  $k$  avec condition au bord nulle pour le problème de Dirichlet).

**Exemple d'utilisation de ces caractérisations variationnelles**

$(M,g)$  compacte, sans bord, avec spectre  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  et fonctions propres associées

$\phi_0, \phi_1, \dots$ . On suppose que  $M = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ ,  $\Omega_i$  domaines deux à deux disjoints dans  $M$ .

Soit  $\mu(i)$ , la première valeur propre du problème de Dirichlet de  $\Omega_i$  et  $\nu(i)$  la première valeur propre non nulle du problème de Neumann de  $\Omega_i$

Alors.:

$$(i) \lambda_{n-1} \leq \max_{i=1}^n \mu(i)$$

$$(ii) \lambda_n \geq \min_{i=1}^n \nu(i)$$

Preuve

(i) On utilise (b) avec  $L_k$  composé des fonctions propres de  $\mu(i)$  étendues par 0 hors de  $\Omega_i$ .

(ii) On considère l'application  $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(a_0, \dots, a_n) \rightarrow \left( \int_{\Omega_k} \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \right)_{k=1}^n$$

$\exists (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$  avec  $\psi(a_0, \dots, a_n) = 0$ .

Soit  $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$ .  $\int_{\Omega_k} \phi dV = 0, \forall 1 \leq k \leq n$ .

$\Rightarrow R_{\Omega_k}(\phi) \geq \nu(k)$

On en déduit :  $R(\phi) \geq \min_{k=1}^n \nu(k)$ . Or  $R(\phi) \leq \lambda_n$ .

Définition Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continue. L'ensemble nodal de  $f$  est l'ensemble  $f^{-1}(0)$  et un domaine nodal de  $f$  est une composante de  $\bar{M} \setminus f^{-1}(0)$ .

Le théorème de Courant "Le nombre de domaines nodaux de  $\phi_k$  est inférieur ou égal à  $k + 1$ " est conséquence directe de la première caractérisation. (Voir [CH]).

Cas où M est non compacte

1. Le fait de se restreindre à  $L^2(M,g)$  devient une restriction sérieuse. Par exemple, si le volume n'est pas fini, la fonction constante ne peut être prise en compte.



2. D'une part, il est plus délicat de définir le spectre, et, en général, il n'est pas discret.

Il suffit de penser à  $\mathbb{R}$ . Cependant, pour  $M$  sans bord :

$\lambda_0 = \inf \{ R(u) \mid u \in L^2(M, g), u \neq 0, u \in C^1 \}$  joue souvent un rôle important.

Ex.  $\lambda_0(\mathbb{R}^n) = 0$

$$\lambda_0(\mathbb{H}^n) = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

### Problèmes

1. Lire les "rares" valeurs propres dans le spectre continu, c'est-à-dire celles pour lesquelles existent des fonctions propres dans  $L^2(M)$ .
2. Existence de fonctions harmoniques (i. e. vérifiant  $\Delta f = 0$ ) qui à défaut d'être intégrables, sont bornées ou positives.

## IV. APPLICATIONS HARMONIQUES

On sait que les géodésiques correspondent aux extrémités de la fonctionnelle d'énergie :

si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est lisse, on pose  $E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$ .

On peut généraliser cette fonctionnelle d'énergie à des applications de  $(N, h)$  dans  $(M, g)$  et chercher ses extrema. (Voir [E-L], [J]).

Soit  $f : (N, h) \rightarrow (M, g)$ . On choisit des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  pour  $N$  et  $(y_1, \dots, y_m)$

pour  $M$ . On a :  $Df(x) = \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y_i}$  et on appelle énergie l'intégrale de la norme de

$Df$  :  $E(f) = \int_N e(f) dV_N$  où  $e(f) = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(f(x)) \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial x_\beta}$  (où l'on omet de

noter le signe somme).

Si  $f$  est de classe  $C^2$  et  $E(f) < \infty$ , et si  $f$  est un point critique de  $E$ , on dit que  $f$  est harmonique. Elle satisfait les équations d'Euler - Lagrange correspondant à la fonctionnelle  $E$  :

$$\Delta_N f^i + h^{\alpha\beta} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f^j \frac{\partial}{\partial x_\beta} f^k = 0 \quad \text{où } \{\Gamma_{jk}^i\} \text{ sont les symboles de Christoffel de } (M, g).$$

Si  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$  et on a alors :  $\Delta f^i \equiv 0$ .

Schéma de preuve pour  $M = \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(f + t\varphi) &= \frac{d}{dt} \int_N \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} + t \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_\alpha} \right) \left( \frac{\partial f^j}{\partial x_\beta} + t \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_\beta} \right) \sqrt{h} \, dx \\ &= \int_N h^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_\beta} \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} \sqrt{h} \, dx = - \int_N \varphi^i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( h^{\alpha\beta} \sqrt{h} \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} \right) \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{h} \, dx = 0 \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( h^{\alpha\beta} \sqrt{h} \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} \right) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Delta f^i = 0.$$

## REFERENCES

- [BBG] P.Bérard, G.Besson, S.Gallot, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. 80 (1985) 295.
- [BD1] P. Bérard, *Spectral Geometry Direct and Inverse Problems*, Lect. Notes in Math. 1207 (1986).
- [BD2] P.Bérard, *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Sémin. Bourbaki 705 (1988-89)
- [B-G-M] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes in Math. 194, (1971).
- [CH] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press (1984).
- [E-L] J.Eells - L.Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull.London Math. Soc; 10 (1978), 1-68.
- [GA] S.Gallot, *Inégalité isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Astérisque 163-164 (1988) P.31-91.
- [J] J.Jost, *Nonlinear Methods in Riemannian and Kählerian Geometry*, Birkhäuser