Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Laurent Guillopé

Théorème de Gauß-Bonnet et géométrie non commutative

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 39-57
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__39_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (39–57)

THÉORÈME DE GAUß-BONNET ET GÉOMÉTRIE NON COMMUTATIVE

par *Laurent GUILLOPÉ*

Le théorème de Gauß-Bonnet énonce pour une surface riemannienne compacte (M, g) orientable de genre γ l'égalité de l'intégrale de la 2-forme de courbure K_g avec $4\pi(1-\gamma)$. Cet énoncé contient deux propriétés remarquables : l'invariance de $\int_M K_g$ vis-à-vis des déformations dans l'espace (connexe) des métriques riemanniennes sur M et l'intégralité de $\int_M K_g/4\pi$.

La 2-forme de courbure est une parmi les formes différentielles associées par la théorie de Chern-Weil à la donnée d'une variété C^∞ riemannienne, formes dont les classes de cohomologie sont des invariants topologiques ([11]). Un exemple élémentaire de cette topologie différentielle est l'indice d'un point extérieur à une courbe C rectifiable dans le plan complexe invariant par homotopie (de la courbe ou du point) et à valeurs entières : l'indice $\mathrm{Ind}(C, a)$ de a par rapport à une courbe continue C est défini comme celui de a par rapport à une courbe rectifiable $\widetilde{C}$ homotope à C dans $\mathbf{C} \setminus \{a\}$:

$$\mathrm{Ind}(C, a) = \mathrm{Ind}(\widetilde{C}, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\widetilde{C}} \frac{dz}{z-a} .$$

Afin d'étendre cet esprit de topologie différentielle à des espaces non commutatifs, il faut traduire les énoncés précédents dans un contexte d'algèbres d'opérateurs, un espace (topologique) étant vu globalement à travers la (C^*-)algèbre des fonctions (continues) qui y sont définies.

Deux résultats concernant les algèbres répondent aux invariance homotopique et intégralité précédentes : l'invariance par conjugaison des cocycles cycliques d'une part, l'intégralité de l'évaluation sur des projecteurs de caractères de modules de Fredholm de sommabilité finie. La première sera invoquée à travers un cocycle induit par un plongement isométrique de la surface dans un espace euclidien et son application de

Gauß, la seconde via l'opérateur de Dirac et le cocycle associé qui, via le calcul getzlerien, redonne asymptotiquement le cocycle précédent. Enfin, le prolongement d'un invariant différentiel à la catégorie continue émerge dans la vision opérationnelle comme l'égalité des K_0-théorie d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ et de chacune de ses sous-algèbres denses et stables par calcul fonctionnel holomorphe.

L'articulation présente s'appuie sur un plongement isométrique de la surface dans une espace euclidien (de dimension quelconque) pour établir l'invariance homotopique de $\int_M K_g$ sur l'espace (connnexe par arcs) des métriques sur M, cela permet dans un second temps de ne considérer que des plongements dans $\mathbf{R}^3$ pour traiter de sa 4π-intégralité; pourtant, le seul cas susceptible d'un traitement simple (et exposé *infra*) s'avère être le tore plat, non plongeable isométriquement dans $\mathbf{R}^3$! Est-ce seulement la trace d'un passage en force, sans rapport avec ce qui importe, de la géométrie non commutative pour aborder un thème où GAUSS n'attendit ni ABEL ni ses contracdicteurs, est-ce le symptôme d'une vision balbutiante (*p. ex.*, dans quelle mesure un plongement est-il obligé pour voir en l'intégrale $\int_M K_g$ l'évaluation d'un cocycle sur un projecteur, autrement dit quels algèbre, cocycle et projecteur intrinsèques?), qu'un effort de traduction géométrie/algèbre améliorera. Au lecteur d'apprécier.

La suite développe (sans parvenir à être complet) les éléments qui amènent CONNES, dans sa conférence du colloque " Mathématiques à venir " ([7], p. 165 & *sq.*), à présenter le théorème de Gauß-Bonnet à travers le filtre des algèbres d'opérateurs, avant de traiter dans un cadre similaire de l'effet Hall quantique. L'indice d'une courbe dans le plan est le prétexte d'un premier appendice, un second évoque K-théorie et stabilité par calcul fonctionnel holomorphe.

1. Courbure des surfaces plongées

Soit (M, g) une surface compacte (de classe C^k, $k \geqslant 2$) riemannienne, orientée, plongée isométriquement dans $\mathbf{R}^3$ euclidien. L'application de Gauß $\mathbf{n}_g$ (élément de $C^{k-1}(M, S^2)$) applique tout point m de M sur le vecteur unitaire normal extérieur à M en m. Si ω est la forme volume sur la sphère unité S^2 (pour la métrique induite par son plongement dans l'espace euclidien de $\mathbf{R}^3$), la 2-forme de courbure K_g est son image inverse $\mathbf{n}_g^*\omega$ par $\mathbf{n}_g$.

La forme volume ω sur S^2 est, en coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, donnée par $\mathbf{x} \lrcorner (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ égale, à une différentielle exacte près, à la forme $3x_1 dx_2 \wedge dx_3$, ainsi $\int_{S^2} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = 4\pi/3$ et $\int_M K_g = 3 \int_M n_{g1} dn_{g2} dn_{g3}$.

Pour une application f entre deux variétés compactes orientables de même dimension, le degré est l'entier de multiplication induite par f en homologie de dimension maximale. Ainsi $\int_M K_g$ est 4π fois le degré de l'application de Gauß (à savoir $1 - \gamma$). La proposition suivante, résultat de la théorie du degré, sera prouvée au paragraphe 3 en termes d'algèbres d'opérateurs; elle implique l'invariance homotopique de $\int_M K_g$ pour des surfaces de $\mathbf{R}^3$.

PROPOSITION 1.1. — *Soit M une surface et $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ une application de M dans S^2 de classe C^1. La quantité $\int_M n_1 dn_2 dn_3$ est invariante par homotopie différentiable.*

Remarque 1.2.α. — Cette proposition n'établit l'invariance de $\int_M K_g$ que pour des déformations du plongement de M dans $\mathbf{R}^3$ dont la métrique induit celle de M, celle relativement à des variations de métrique sur la surface (abstraite) M est désirée (même si *a posteriori* la métrique, cela permet d'user d'un plongement isométrique dans $\mathbf{R}^3$ pour filer à la 4π-intégralité, *cf.* corollaire 5.5). Toute surface compacte riemannienne est plongeable isométriquement (une immersion isométrique suffit en fait pour ce qui suit) dans $\mathbf{R}^5$ euclidien ([10], p. 298), toute surface compacte M avec variation de métrique (g_t) à un paramètre est plongeable isométriquement (comme la variété riemannienne tridimensionnelle $(M \times S^1, g_t \times dt^2)$) dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^{15}$. Si UNM désigne le fibré unitaire normal de la surface M orientable plongée isométriquement dans $\mathbf{R}^d$, l'application de Gauß $\mathbf{n}_g$ est naturellement définie de UNM dans S^{d-1} et, si $\omega_{S^{d-1}}$ est la forme volume sur la sphère S^{d-1} de courbure constante 1, le théorème de Gauß-Bonnet ([1], p.287) énonce l'égalité de $\int_{UNM} \mathbf{n}_g^* \omega_{S^{d-1}}$ avec $\mathrm{vol}(S^{d-1})(1-\gamma) = \mathrm{vol}(S^{d-1}) \int_M K_g / 4\pi$. Ainsi, pour une surface riemannienne (M, g), l'invariance homotopique de $\int_M K_g$ résulte de la proposition 1.1 (avec sa preuve opérationnelle) étendue à la dimension d (à suivre) :

PROPOSITION 1.1^d. — *Soit X une variété de dimension d et $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_{d+1})$ une application de X dans S^d (plongée dans $\mathbf{R}^{d+1}$) de classe C^1. La quantité $\int_X \mathbf{n}^* \omega_{S^d}$ est invariante par homotopie différentiable.*

Remarque 1.3. — La proposition précédente vaut aussi pour une application de X dans Y avec volume ω_Y. Une preuve type *algèbre d'opérateurs*... ?

2. Cocycles cycliques

Pour un espace V, $C_d(V)$ note l'espace des d-formes multilinéaires sur V, sur lequel opère le groupe des permutations $\mathfrak{S}_d$: $\varphi^\sigma(v_1, \ldots, v_d) = \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(d)})$. Implicitement, σ_d désignera la permutation cyclique $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to d \to 1$.

DÉFINITION 2.1. — *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. L'espace des n-cocycles cycliques $Z^n_\lambda(\mathcal{A})$ est le sous-espace de $C_{n+1}(\mathcal{A})$ des formes φ telles que*

(a) $\varphi^{\sigma_{n+1}} = \mathrm{sign}(\sigma_{n+1})\varphi$,

(b) $$\varphi(a_0 a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{j+1} \varphi(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^n \varphi(a_{n+1} a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Remarque 2.2. — La condition *(b)* est une condition de cocycle pour la dérivation de Hochschild δ_H (avec, sur $\mathcal{A}^*$, la structure de $\mathcal{A}$-bimodule induite par la multiplication de $\mathcal{A}$), définie prosaïquement par

$$\delta_H \psi(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} (-1)^j \psi(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \psi(a_{n+1} a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Si la n-forme φ est cyclique au sens de *(a)*, il en est de même de $\delta_H \varphi$; la cohomologie cyclique $H^*_\lambda(\mathcal{A})$ est l'homologie du complexe $(C^*_\lambda(\mathcal{A}), \delta_H)$ avec terme de degré n l'espace $C^n_\lambda(\mathcal{A})$ des $(n+1)$-formes cycliques.

Exemples 2.3.

(α) Un 0-cocycle est communément appelé trace : seule la condition *(b)* (qui s'écrit $\varphi(ab) = \varphi(ba)$) est à vérifier.

(β) Si $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative, la trace usuelle Tr sur l'algèbre (non commutative dès que $n \geqslant 2$) $M_n(\mathcal{A})$ est un 0-cocycle.

(γ) Si Γ est un groupe localement compact unimodulaire (*p. ex.* discret, de Lie nilpotent ou semisimple), l'évaluation par l'élément neutre définit une trace sur l'espace des fonctions continues à support compact (avec le produit de convolution).

(δ) Sur **C**, la 3-forme σ définie par $\sigma(a_0, a_1, a_2) = a_0 a_1 a_2$ définit un 2-cocycle cyclique, fondamental pour l'opérateur S de périodisation des cocycles cycliques ([5], p. 322), qui associe au cocycle cyclique φ d'ordre n le $(n+2)$-cocyle $S\varphi$, cup-produit $\sigma \# \varphi$ (*cf.* lemme 2.5 et la remarque 2.8) de σ par φ, dont la valeur $\sigma \# \varphi(a_0, \ldots, a_{n+2})$ est donnée explicitement par :

$$\begin{aligned} &\varphi(a_0 a_1 a_2, a_3, \ldots, a_{n+2}) + \sum_{i=2}^{n+1} \Big[\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1} a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+2}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{i-k-1} a_{i-k}, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+2}) \Big] . \end{aligned} \tag{2.4}$$

(ε) Si M est une variété compacte et $\mathcal{A}$ son algèbre de fonctions de classe C^k ($k \geqslant 1$), tout courant fermé C de degré n définit un n-cocycle φ_C (noté éventuellement aussi C) via

$$\varphi_C(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \langle C, a_0 da_1 \ldots da_n \rangle .$$

La condition de fermeture du courant n'intervient que dans la condition *(a)* de cocycle cyclique, en précisant l'invariance de φ_C sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$: $\varphi_C^\sigma = \mathrm{sign}(\sigma) \varphi_C, \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

(η) Sur $\mathcal{C}(X)$, soit δ la dérivation à valeurs dans $\mathcal{C}(X \times X)$ définie par $\delta f(x, y) = f(x) - f(y), f \in \mathcal{C}(X)$. Sur S^1 et l'algèbre de fonctions α-höldériennes avec

$\alpha > 1/(n-1)$, n impair au moins égal à 1, la $(n+1)$-forme définie suivant

$$\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_{(S^1)^n} a_0(x_0) \frac{\delta a_1(x_1, x_0)}{x_1 - x_0} \frac{\delta a_2(x_2, x_1)}{x_2 - x_1} \dots \frac{\delta a_{n-1}(x_{n-1}, x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} \frac{\delta a_n(x_0, x_{n-1})}{x_0 - x_{n-1}} \prod_{k=0}^{n-1} dx_k$$

est un n-cocycle cyclique, dont la restriction à $C^1(S^1)$ est cohomologue au périodisé $S^{(n-1)/2}[S^1]$ ([7], p. 37).

Le cup-produit #, envoyant $C_n(\mathcal{A}) \otimes C_m(\mathcal{B})$ dans $C_{n+m-1}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, respecte les cocycles cycliques ([5], p. 321); la suite n'introduira que des cup-produits de traces par des n-cocycles cycliques :

LEMME 2.5. — *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des algèbres, α un n-cocycle cyclique sur $\mathcal{A}$ et β une trace sur $\mathcal{B}$. La forme multilinéaire $\alpha \# \beta$ définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ suivant*

$$\alpha \# \beta(a_0 \otimes b_0, \dots, a_n \otimes b_n) = \alpha(a_0, \dots, a_n)\beta(b_0 \dots b_n) \tag{2.6}$$

est un n-cocycle cyclique sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Preuve. — La cyclicité provient de celles de α et de β. Quant à la propriété de Hochschild, elle résulte de propriétés algébriques aussi simples. □

Remarque 2.7. — Au contraire de la cyclicité, une invariance de α relativement à l'action du groupe symétrique, telle celle de φ_C dans l'exemple 2.3.ε ci-dessus, ne vaut pas, en général, pour le produit $\alpha \# \beta$.

Remarque 2.8. — Ce lemme est utilisé de manière importante pour étendre un n-cocycle cyclique défini sur $\mathcal{A}$ aux algèbres de matrices à coefficients dans $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \otimes M_k(\mathbf{C}) \simeq M_k(\mathcal{A})$. La trace Tr sur $M(\mathbf{C}) = \varinjlim M_k(\mathbf{C})$ est la trace habituelle en restriction à $M_k(\mathbf{C})$ (*i.e.* $\mathrm{Tr}(\mathbf{1}_k) = k$), compatible avec l'homomorphisme injectif i_k de $\mathbf{C}$ dans $M_k(\mathbf{C})$ défini par $i_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0_{k-1} \end{pmatrix}$ et à l'œuvre dans la définition de $M(\mathbf{C})$. D'une part, cette extension commute avec le bord δ_H : $\delta_H(\mathrm{Tr} \# \varphi) = \mathrm{Tr} \# \delta_H \varphi$; d'autre part, elle est compatible avec l'homomorphisme injectif $i_k(\mathcal{A}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes i_k$ de $\mathcal{A}$ dans $M_k(\mathcal{A})$: pour φ dans $C^n_\lambda(\mathcal{A})$, $\varphi = (\mathrm{Tr} \# \varphi) \circ i_k(\mathcal{A})$ et pour ψ dans $C^n_\lambda(M_k(\mathcal{A}))$, $\delta_H \psi \circ i_k(\mathcal{A}) = (\mathrm{Tr} \# \delta_H(\psi \circ i_k(\mathcal{A}))) \circ i_k(\mathcal{A})$. Il est parfois opportun (comme au corollaire 3.3) de se déplacer de $\mathcal{A}$ dans $M_k(\mathcal{A})$, plus spacieux que $\mathcal{A}$ pour certains calculs algébriques. Ce lemme sera aussi utilisé d'une manière implicite pour l'algèbre de Clifford de la remarque 1.2.β et sa version générale ([5], p. 320) pour définir l'opérateur de périodicité de l'exemple 2.3.δ.

3. Invariance homotopique du degré

Après identification de S^2 avec le projectif $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par projection stéréographique, tout point de S^2 devient une droite D de $\mathbf{C}^2$, à laquelle est associée la projection P_D orthogonale sur D pour la structure hilbertienne canonique sur $\mathbf{C}^2$. Ainsi, à toute application $\mathbf{n}$ de $C^1(M, S^2)$ est associée une application de M dans l'espace des projecteurs de $M_2(\mathbf{C})$, *i.e.* un élément $P(\mathbf{n})$ de $M_2(C^1(M)) \simeq M_2(\mathbf{C}) \otimes C^1(M)$.

LEMME 3.1. — *Soit $\mathbf{n}$ dans $C^1(M, S^2)$. Si Tr_2 note la trace sur $M_2(\mathbf{C})$ et $[M]$ le courant d'intégration fondamental de M, alors*

$$\mathrm{Tr}_2 \#[M](P(\mathbf{n}), P(\mathbf{n}), P(\mathbf{n})) = \frac{3i}{2} \int_M n_1 dn_2 dn_3 .$$

Preuve. — Via la projection à partir du pôle nord $(0,0,1)$ de la sphère sur le plan complexe $\{n_3 = 0\}$, le point $n = (n_1, n_2, n_3)$ de S^2 correspond au complexe $(n_1 + in_2)/(1 - n_3)$ et détermine la projection orthogonale $P(n)$ sur la droite portant le vecteur $(n_1 + in_2, 1 - n_3)$ de représentation matricielle dans la base canonique

$$P(n) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_3 & n_1 + in_2 \\ n_1 - in_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix} .$$

Un simple calcul suivant la définition du lemme 2.5 permet de conclure. □

Remarque 1.2.β. — Soit $\mathcal{C}\ell_d$ l'algèbre de Clifford associée à l'espace euclidien $\mathbf{R}^d$, muni de la base orthonormée $(e_i)_{i=1,\dots,d}$, dans laquelle $e_i^2 = 1$ et où ω_d note le volume $e_1 \dots e_d$, de carré $(-1)^{d(d-1)/2}$. Si d est pair (*resp.* impair), $\mathcal{C}\ell_d \otimes \mathbf{C}^d \simeq \mathbf{C}\ell_d$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_d)$ (*resp.* à la somme $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_d^+) \oplus \mathrm{End}(S_d^-)$ où $\omega_{d|S_d^\pm} = \pm 1$([13])) avec $S_d, S_d^\pm$ espace de spineurs complexes. La sphère S^d se plonge dans les idempotents (*resp.* les unitaires) de $\mathcal{C}\ell_{d+1}$ en envoyant $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\dots,d+1}$ sur $(1 + \sum_{i=1}^{d+1} x_i e_i)/2$ (*resp.* $\sum_{i=1}^{d+1} x_i e_i$, d'inverse lui-même), induisant, pour $\mathbf{n}$ application de $C^1(X, S^d)$ un idempotent $P(\mathbf{n})$ (*resp.* un unitaire $u(\mathbf{n})$) de $\mathbf{C}\ell_{d+1} \otimes C^1(X)$. Si d est pair, Tr_{d+1}^+ désignant la trace induite par l'isomorphisme de $\mathbf{C}\ell_{d+1}$ et $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_{d+1}^+)$ muni de sa trace habituelle, l'évaluation du cup-produit $\mathrm{Tr}_{d+1}^+ \#[X]$ sur $P(\mathbf{n})$ donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{d+1}^+ \#[X](P(\mathbf{n}), \dots, P(\mathbf{n})) &= 2^{-(d+1)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}} \mathrm{Tr}_{d+1}^+ [e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(d+1)}] \int_X n_{\sigma(1)} dn_{\sigma(2)} \dots dn_{\sigma(d+1)} \\
&= 2^{-(d+1)} (d+1)! \dim(S_{d+1}^+) \int_X n_1 dn_2 \dots dn_{d+1} \\
&= 2^{-(d+1)} d! \dim(S_{d+1}^+) \int_X \mathbf{n}^* \omega_{S^d}.
\end{aligned}$$

Au facteur i près, la formule du lemme 3.1 resurgit ($\mathbf{C}\ell_3 \simeq \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_3^+), S_3^+ \simeq \mathbf{C}^2$!).

Quant au cas d impair, la supertrace $\mathrm{str}_{d+1}(c) = \mathrm{tr}_{S_{d+1}}[\omega_{d+1} c], c \in \mathcal{C}\ell_{d+1}$ est une trace graduée† sur l'algèbre graduée $\mathcal{C}\ell_{d+1}$ (dont la partie bosonique est engendrée en

† La définition d'un n-cocycle gradué sur une algèbre graduée $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ (*cf.* définition 4.1) complète celle donnée précédemment (qui vaut pour une algèbre graduée avec composante fermionique $\mathcal{A}_-$ nulle)

$$(a)^{\mathrm{gr}} \quad \tau(a_1, \dots, a_n, a_0) = (-1)^{n + d^\circ a_0 \sum_{j=1}^n d^\circ a_j} \tau(a_0, a_1, \dots, a_n),$$

$$(b)^{\mathrm{gr}} \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j \tau(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1+d^\circ a_{n+1} \sum_{j=0}^n d^\circ a_j} \tau(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n) = 0.$$

tant qu'algèbre par les produits cliffordiens de deux vecteurs ef). L'évaluation sur le d-cocycle gradué $\mathrm{str}_{d+1}\,\#[X]$ de l'unitaire $u(\mathbf{n})$ donne :

$$\mathrm{str}_{d+1}\,\#[X](u(\mathbf{n})^{-1}, u(\mathbf{n}), \ldots, u(\mathbf{n})^{-1}, u(\mathbf{n})) = (d+1)!\dim S_{d+1} \int_X \mathbf{n}^*\omega_{S^d} \; .$$

L'invariance homotopique de la proposition $1.1^{d \text{ impair}}$ résulte alors de la seconde affirmation du lemme suivant (alors que celle pour d pair provient du lemme $\mathrm{A}.1^{\mathrm{gr}}$) :

LEMME 3.2. — *Soit φ un $2n$-cocycle cyclique sur l'algèbre $\mathcal{A}$.*

(i) Si $n = 1$, p un projecteur et u un inversible de $\mathcal{A}$, alors

$$\varphi(upu^{-1}, upu^{-1}, upu^{-1}) = \varphi(p,p,p) \; .$$

(ii) L'évaluation $\varphi(p_t, \ldots, p_t)$ est constante le long d'une déformation différentiable de projecteurs.

Preuve. — La preuve de *(i)* consiste en quelques applications de la propriété *(b)* des cocycles cycliques :

$$\begin{aligned}
\varphi(up[u^{-1}], upu^{-1}, upu^{-1}) &= \varphi(up, u^{-1}p, u^{-1}upu^{-1}, upu^{-1}) \\
&\quad - \varphi(up, u^{-1}, upu^{-1}upu^{-1}) + \varphi(upu^{-1}up, u^{-1}, upu^{-1}) \\
&= \varphi([u]p, pu^{-1}, upu^{-1}) \\
&= \varphi(u, pu^{-1}, upu^{-1}) \\
&\qquad - \varphi(u,p,pu^{-1}) + \varphi(u[p], p, u^{-1}) \\
&= \varphi(u, pu^{-1}, upu^{-1}) \\
&\qquad - \varphi(u,p,pu^{-1}) + \varphi(u, pp, pu^{-1}) \\
&\qquad - \varphi(u,p,ppu^{-1}) + \varphi(pu^{-1}u, p, p) \\
&= \varphi(u, pu^{-1}, upu^{-1}) - \varphi(u,p,pu^{-1}) \\
&\qquad + \varphi(p,p,p),
\end{aligned}$$

la somme des deux premiers termes étant nulles vu

$$\varphi(u, pu^{-1}, u[pu^{-1}]) = 2\varphi(p, pu^{-1}, u) - \varphi(pu^{-1}, upu^{-1}, u) \; .$$

Le cas des cocycles d'ordre pair au moins égal à 4 n'est pas susceptible d'un traitement aussi élémentaire semble-t-il, il résulte du corollaire suivant.

Quant au *(ii)*, les p_t sont localement conjugués : $u_t = p_{t_0}p_t + (1-p_{t_0})(1-p_t) = 1 + [2p_{t_0}p_t - p_{t_0} - p_t]$, inversible au voisinage de t_0, conjugue p_{t_0} en p_t : $p_t = u_t^{-1}p_{t_0}u_t$. Si $X_t = u_t^{-1}du_t/dt$, p_t a pour dérivée le crochet $[p_t, X_t]$; ainsi la dérivée

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(p_t, \ldots, p_t) &= (2n+1)\varphi([X_t, p_t], p_t, \ldots, p_t) \\
&= (2n+1)[\varphi(X_t[p_t], p_t, \ldots, p_t) - \varphi(p_tX_t, p_t, \ldots, p_t)] \\
&= (2n+1)[\varphi(X_t, p_t^2, \ldots, p_t) - \varphi(X_t, p_t, \ldots, p_t) + \ldots + \varphi(p_tX_t, p_t, \ldots, p_t) \\
&\qquad - \varphi(p_tX_t, p_t, \ldots, p_t)]
\end{aligned}$$

est nulle. □

COROLLAIRE 3.3. — *Soit φ un $2n$-cocycle cyclique sur l'algèbre $\mathcal{A}$.*

(i) Si p est un projecteur et u un inversible de $\mathcal{A}$, alors

$$\varphi(upu^{-1},\dots,upu^{-1})=\varphi(p,\dots,p)\ .$$

(ii) Soient, dans $M_k(\mathcal{A})$, p,q projecteurs et v,w tels que $p=vw, q=wv$. Alors $\mathrm{Tr}\#\varphi(p)=\mathrm{Tr}\#\varphi(q)$.

Preuve. — Le remplacement de p,q,u,φ par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}q&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),U=\left(\begin{smallmatrix}u&0\\0&u^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{Tr}\#\varphi$ permet de supposer u dans la composante connexe (par arcs) de l'identité de $\mathrm{Gl}(\mathcal{A})$ (groupe des inversibles de $\mathcal{A}$) : $U=U_1U_2$ avec $U_1=\left(\begin{smallmatrix}u&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}u^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $U_2=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ où $U_i=\exp(\pi/2U_i), i=1,2$. L'invocation du *(ii)* de la proposition précédente conclut.

Pour l'*(ii)*, k est réduit à 1 en remplaçant $\mathcal{A}$ par $M_k(\mathcal{A})$. Substituer $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&q\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&v\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\w&0\end{smallmatrix}\right)$ à p,q,v,w ramène à la situation du *(i)* avec p,q projecteurs et $u=\left(\begin{smallmatrix}1-p&v\\w&1-q\end{smallmatrix}\right)$ inversible (d'inverse $\left(\begin{smallmatrix}1-p&(2p-1)v\\w(2p-1)&1-q\end{smallmatrix}\right)$). □

Remarque 3.4. — Le corollaire précédent, allié avec l'*(ii)* du lemme 5.2, induit un accouplement entre la K_0-théorie de $\mathcal{A}$ (*cf.* appendice A.) et la cohomologie paire cyclique $H^{2*}_\lambda(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

4. Module de Fredholm, module p-sommable

DÉFINITION 4.1. — *Un espace vectoriel $\mathbf{Z}_2$-gradué V (certains diront super-espace) est un espace muni d'une involution ε_V, induisant la signature de graduation, dite degré, d°, application de V dans $\mathbf{Z}_2$. La partie paire $\mathcal{H}_+$, dite bosonique, (impaire $\mathcal{H}_-$, dite fermionique resp.) est le noyau* $\mathrm{Ker}(\varepsilon_V-1)$ ($\mathrm{Ker}(\varepsilon_V+1)$ *resp.), dont les éléments dont dits homogènes. Si V est gradué, son espace d'endomorphismes $\mathcal{L}(V)$ l'est naturellement via l'involution $\varepsilon_{\mathcal{L}(V)}$ définie par $\varepsilon_{\mathcal{L}(V)}(f)=\varepsilon_V\circ f\circ\varepsilon_V$, $f\in\mathcal{L}(V)$, le morphisme d° est un morphisme d'algèbres, faisant de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ un exemple d'algèbre $\mathbf{Z}_2$ graduée.*

Si $\mu(A)=(\mu_j(A))_{j\geqslant 0}$ désigne, pour l'opérateur A de l'Hilbert $\mathcal{H}_1$ dans l'Hilbert $\mathcal{H}_2$, la suite des valeurs propres de $\sqrt{AA^*}$, A est de classe $\mathcal{I}_p(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ ($p\in[1,\infty]$) si la suite $\mu(A)$ est de p-norme finie ([15]). L'espace $\mathcal{I}_p(\mathcal{H})=\mathcal{I}_p(\mathcal{H},\mathcal{H})$ est un idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de Banach pour la norme induite par la p-norme de $\mu(A)$, avec la propriété de Hölder pour un triplet d'exposants conjugués. Sur l'idéal $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ des opérateurs dits traçables, la trace tr est définie comme forme linéaire continue, prolongeant la trace standard sur les opérateurs de rang fini.

DÉFINITION 4.2. — *Un module de Fredholm (p-sommable resp.) sur l'algèbre $\mathcal{A}$ consiste en la donnée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'un projecteur autoadjoint*

F, d'une représentation (non nécessairement unifère) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que le commutateur $[F,a]$ soit compact (de classe $\mathcal{I}_p$ resp.) pour tout a de $\mathcal{A}$. Le module est dit pair si $\mathcal{H}$ est $\mathbf{Z}_2$-gradué, les éléments de $\mathcal{A}$ représentés par des endomorphismes pairs de $\mathcal{H}$ et F impair.

Exemples 4.3.

(α) L'espace gradué $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ sur lequel opère le complexe a via $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et muni du $F_{\mathbf{C}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, est un module de Fredholm pair sur l'algèbre $\mathbf{C}$.

(β) Soit G groupe de Lie connexe semisimple ou nilpotent, $(\mathcal{H}_\pi, \pi)$ une représentation irréductible de G et $\mathcal{A} = C_c(G)$ l'algèbre des fonctions continues à support compact. La donnée de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_\pi$ avec la graduation naturelle, $F = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et A représenté sur le premier facteur fournit un module de Fredholm pair ($\pi(C_c(G))$ est inclus dans $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}_\pi)$ [8], 13.11.12). La restriction du module précédent à l'algèbre des fonctions lisses est un module 1-sommable ([8], 17.4.6 et [8], 17.4.7).

(γ) Soit Γ groupe discret avec S famille finie de générateurs, stable par inversion et ℓ_S la fonction longueur sur Γ associée. Soit D_S l'opérateur (autoadjoint, non borné) sur $\ell^2(\Gamma)$, diagonal sur la base $(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ défini par $D_S\varepsilon_\gamma = (1+\ell_S(\gamma))\varepsilon_\gamma$. Si U_γ désigne l'opérateur sur $\ell^2(\Gamma)$ induit par la translation à gauche de γ, l'opérateur $D_S^{-1}U_\gamma D_S$ est représenté dans la base canonique par une matrice où les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale $g' = \gamma g$, de la forme $(1+\ell_S(g))/(1+\ell_S(\gamma g))$, tendant vers 1 avec g vers l'infini, il diffère donc de l'opérateur U_γ par un opérateur compact. Ainsi, l'action de $\mathbf{C}\Gamma$ sur $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma) \oplus \ell^2(\Gamma)$ par $a(h_+, h_-) = (ah_+, D_S^{-1}aD_Sh_-)$ livre un module de Fredholm (avec $F = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). L'opérateur $(D_S^{-1}U_\gamma D_S - U_\gamma)(D_S^{-1}U_\gamma D_S - U_\gamma)^*$ est diagonal, en résulte la p-traçabilité de $D_S^{-1}U_\gamma D_S - U_\gamma$ (de valeurs singulières $|(\ell_S(g)-\ell_S(\gamma g))/(1+\ell_S(\gamma g))|$ si Γ est à croissance polynomiale de degré n (*i.e.* si $\#\{\gamma \in \Gamma, \ell_S(\gamma) \leqslant \ell\} = O(\ell^n)$) avec $n < p$.

(δ) Soient E, F deux fibrés hermitiens de base compacte M, D un opérateur différentiel d'ordre d de $\mathcal{C}^\infty(E)$ dans $\mathcal{C}^\infty(F)$, inversible d'inverse D^{-1} opérateur pseudodifférentiel. De manière analogue à l'exemple précédent, l'espace $\mathcal{H} = L^2(E) \oplus L^2(E)$ est un module de Fredholm (de par la compacité de l'opérateur pseudodifférentiel $D^{-1}aD - a$ d'ordre -1) pour l'algèbre $\mathcal{C}^k(M), k \geqslant d$, (avec action tordue sur le facteur $\mathcal{H}_- = L^2(E)$ par D). Si la variété M est de dimension n, le module est p-sommable dès que $p > n$: l'opérateur pseudodifférentiel $D^{-1}aD - a$ d'ordre -1 applique continûment $L^2(F)$ dans l'espace de Sobolev $H^1(F)$ et l'injection de $H^1(M)$ dans $L^2(M)$ est n^+-traçable. D'une part, le module de Fredholm construit sur $\ell^2(\mathbf{Z}^n)$ avec l'opérateur D_S dans 4.3.γ est, par transformation de Fourier, du type présent. D'autre part, si $\mathcal{D} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & D_2 \\ D_1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est un opérateur différentiel inversible sur l'espace des sections d'un fibré $E = E_1 \oplus E_2$, le module de Fredholm, d'Hilbert sous-jacent $L^2(E_1) \oplus L^2(E_1)$ et induit par D_1, n'est pas sans relation avec celui d'Hilbert sous-jacent $L^2(E_2) \oplus L^2(E_2)$ (*cf.* [5], p. 282).

Soit $\mathcal{H}$ gradué et d l'opérateur sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ défini via le commutateur gradué suivant $dT = i[F,T]_{\mathrm{gr}}$, où $[A,B]_{\mathrm{gr}} = AB - B\varepsilon(A)$. Le lemme suivant résulte de calculs élémentaires :

LEMME 4.4. — *d est une dérivation graduée, i.e. $d^2 = 0$ et $d(ST) = dST + \varepsilon(S)dT$.*

La supertrace définie, pour T le permettant, par $\mathrm{Tr}_s(T) = 1/2\,\mathrm{Tr}(\varepsilon F[F,T]_{\mathrm{gr}})$, qui coïncide avec $\mathrm{Tr}(\varepsilon T)$ si T est à trace, induit des cocycles cycliques pour chaque module de Fredholm p-sommable :

PROPOSITION 4.5. — *Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, F, \varepsilon)$ un module p-sommable pair. Si n est pair au moins égal à $p-1$, la forme linéaire φ_n définie par*

$$\varphi_n(a_0, \ldots, a_n) = \mathrm{Tr}_s(a_0 da_1 \ldots da_n)$$

est un n-cocycle cyclique, appelé caractère du module de Fredholm.

Remarque 4.6. — Ce caractère est parfois qualifié de *de Chern* : à un fibré E de base M est associée une forme (son caractère de Chern) $\mathrm{ch}(E)$, dont le dual de Poincaré (cycle, donc cocycle cyclique) est égal ([5], p. 330), dans la cohomologie cyclique périodique de M (*cf.* remarque 4.7) au caractère d'un certain cycle différentiel (la notion de cycle différentiel introduite dans [5], p. 313 a pour archétypes les modules de Fredholm finiment sommable et le complexe des formes différentielles de de Rham). Il a paru souhaitable ici d'abandonner des puissances de π qu'insère CONNES en prenant comme caractère de Chern le cocycle $(2i\pi)^{n/2}(n/2)!\varphi_n$ ([5], p. 275).

Preuve. — D'après la propriété de Hölder pour la classe $\mathcal{I}_p$ et la p-sommabilité, le produit $da_0 da_1 \ldots da_n$ est de classe $\mathcal{I}_{p/(n+1)}$; ainsi

$$\mathrm{Tr}_s\, a_0 da_1 \ldots da_1 = (2i)^{-1}\, \mathrm{Tr}\, \varepsilon F da_0 \ldots da_n$$

est bien défini. La cyclicité résulte du fait que d est une dérivation graduée

$$0 = d^2 a_0 = i[F, da_0]_{\mathrm{gr}} = i(F da_0 + F da_0),$$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, \varepsilon F da_0 da_1 \ldots da_n = -\mathrm{Tr}\, \varepsilon da_0 F da_1 \ldots da_n &= \mathrm{Tr}\, da_0 \varepsilon F da_1 \ldots da_n \\ &= \mathrm{Tr}\, \varepsilon F da_1 \ldots da_n da_0. \end{aligned}$$

Quant à la propriété de cocycle de Hochschild, elle résulte du caractère leibnizien de d (avec invocation à la cyclicité de la trace). □

Remarque 4.7. — Le module de la proposition précédente est aussi $(n+2)$-sommable, d'où un cocycle φ_{n+2} : $(\frac{n+2}{2})!\varphi_{n+2} - S[(\frac{n}{2})!\varphi_n] = (\frac{n+2}{2})!\delta_H \psi_n$ où ψ_n est le cyclicisé $\psi_n = \sum_{j=0}^{n+1} \mathrm{sign}(\sigma_{n+2}^j)\psi_0^{\sigma_{n+2}^j}/(n+2)$ de la forme multilinéaire ψ_0 définie par $\psi_0(a_0, \ldots, a_{n+1}) = i\,\mathrm{Tr}(\varepsilon F a_0 da_1 \ldots da_{n+1})$. L'*(ii)* du lemme 5.2 est compatible avec le calcul direct de $[(\frac{n+2}{2})\varphi_{n+2} - S\varphi_n](e, \ldots, e)$ (via la formule 2.4) pour e projecteur de $\mathcal{A}$. Si la cohomologie cyclique périodique $HC(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est définie comme le produit tensoriel $H^*_\lambda(\mathcal{A}) \otimes_{2i\pi SC} \mathbf{C}$, où $2i\pi S$ opère par le cup-produit du cocycle $2i\pi\sigma$ de $C^2_\lambda(\mathbf{C})$ (de l'exemple 2.3δ) sur $H^*_\lambda(\mathcal{A})$ et trivialement sur le facteur de droite $\mathbf{C}$, le cocycle $(2i\pi)^{n/2}(n/2)!\varphi_n$ induit un élément indépendant de n dans $HC(\mathcal{A})$. Enfin, cette cohomologie cyclique périodique est aussi celle du complexe $(C^*_\lambda(\mathcal{A}), d_C)$ pour une certaine différentielle ([5], p. 335), qui, complété convenablement, livre la cohomologie cyclique entière ([6]) évoquée à la fin de la partie 5.

Exemple 4.8. — Le module de Fredholm décrit dans l'exemple 4.3.α a comme 2-cocycle associé le 2-cocycle σ de l'exemple 2.3.δ.

THÉORÈME 4.9. — *Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, F, \varepsilon)$ un module de Fredholm pair et e projecteur de $\mathcal{A}$. L'opérateur eFe de $e\mathcal{H}_+$ dans $e\mathcal{H}_-$ est à indice. Si le module est p-sommable, son indice vaut $\varphi_n(e,\dots,e)$ où φ_n est le n-cocycle (n pair avec $n > p-1$) attaché au module de Fredholm par la proposition 4.5.*

Preuve. — L'opérateur $[F,e]$ est compact, ainsi, si $F = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ P & 0 \end{pmatrix}$ et $e = \begin{pmatrix} e_+ & 0 \\ 0 & e_- \end{pmatrix}$, $Qe_- - e_+Q$ et $Pe_+ - e_-P$ le sont. La compacité de

$$e_+Qe_-(Pe_+ - e_-P)e_+ = (e_+Qe_-)(e_-Pe_+) - e_+$$
$$e_-Pe_+(Qe_- - e_+Q)e_- = (e_-Pe_+)(e_+Qe_-) - e_-$$

entraîne que e_-Pe_+ (opérateur de $e_+\mathcal{H}_+$ dans $e_-\mathcal{H}_-$) est inversible modulo les compacts, *i.e.* est à indice.

Vu que d est une dérivation graduée et e une projection paire,

$$de = d(e^2) = dee + ede \tag{4.10}$$

d'où, par multiplication à gauche par e, $edee = 0$ et, par dérivation, $0 = dedee - edede$, soit

$$(de)^2e = e(de)^2. \tag{4.11}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi_n(e) &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\varepsilon F[F, e(de)^n] = \frac{1}{2i}\operatorname{Tr}\varepsilon F d(e(de)^n) = \frac{1}{2i}\operatorname{Tr}\varepsilon F(de)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2i}\left[\operatorname{Tr}\varepsilon F dee(de)^n + \operatorname{Tr}\varepsilon F e(de)^{n+1}\right] \quad \text{vu (4.9)}, \\
&= \frac{1}{2i}\left[\operatorname{Tr}\varepsilon F dee(de)^n - \operatorname{Tr}\varepsilon e(de)^{n+1}F\right] \quad \text{vu } \varepsilon F = -F\varepsilon, \\
&= \frac{1}{2i}\left[\operatorname{Tr}\varepsilon F dee(de)^n + \operatorname{Tr}\varepsilon e F(de)^{n+1}\right] \quad \text{vu } 0{=}d(de)^{n+1}{=}i[F(de)^{n+1}{+}(de)^{n+1}F, \\
&= \frac{1}{2i}\left[\operatorname{Tr}\varepsilon F dee(de)^n + \operatorname{Tr}\varepsilon e F(de)^{n+1}e\right] \quad \text{vu } \varepsilon e = \varepsilon e^2 = e\varepsilon e, \\
&= \frac{1}{i}\operatorname{Tr}\varepsilon F dee(e(de)^2e)^{n/2} \quad \text{vu (4.10)}, \\
&= \operatorname{Tr}\varepsilon(e - eFeFe)^n = \operatorname{Tr}(e - eFeFe)^{n/2+1}{}_{|\mathcal{H}_+} - \operatorname{Tr}(e - eFeFe)^{n/2+1}{}_{|\mathcal{H}_-} \\
&= \operatorname{Tr}(e_+ - e_+Qe_-Pe_+)^{n/2+1}{}_{|\mathcal{H}_+} - \operatorname{Tr}(e_- - e_-Pe_+Qe_-)^{n/2+1}{}_{|\mathcal{H}_-}
\end{aligned}$$

où la définition de d a été développée pour assurer

$$e(de)^2e = (e - eFeFe), \quad eFdee = i(e - eFeFe) .$$

Par hypothèse de sommabilité, l'opérateur pair $[F, a]^2$, ainsi que ses éléments diagonaux $e_+ - e_+Qe_-Pe_+, e_- - e_-Pe_+Qe_-$ sont de classe $\mathcal{I}_{p/2}$, la démonstration du théorème s'achève alors en invoquant le lemme suivant (avec $f(x) = (1-x)^{n/2+1}$). □

LEMME 4.12. — *Soit A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ inverses l'un de l'autre modulo les compacts. Soit f fonction numérique continue valant 1 en 0 telle que $f(AB)$ et $f(BA)$ sont à trace. L'indice de A vaut $\operatorname{tr} f(BA) - \operatorname{tr} f(AB)$.*

Preuve. — Les opérateurs $K = 1-AB$ et $L = 1-BA$ sont compacts. La théorie spectrale des opérateurs compacts énonce une décomposition unique de $\mathcal{H}_1$ pour tout λ complexe non nul de la forme $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Ker}(K,\lambda) \oplus S(K,\lambda)$ avec $\operatorname{Ker}(K,\lambda)$ de dimension finie, égal au noyau $\operatorname{Ker}(K-\lambda)^{n_\lambda(K)}$ pour un $n_\lambda(K)$ fini convenable et $S(K,\lambda) = \sum_{\mu \in \operatorname{Spec}(K)\setminus\{\lambda\}} \operatorname{Ker}(K,\mu)$ stable par K. De plus, B applique $\operatorname{Ker}(K,1)$ dans $\operatorname{Ker}(L,1)$ et est un isomorphisme de $S(K,1)$ sur $S(L,1)$. Ainsi l'indice de B est égal à celui de B restreint à $\operatorname{Ker}(K,1)$ à valeurs dans $\operatorname{Ker}(L,1)$ et donc, ces espaces étant de dimension finie, à la différence de leurs dimensions : $\operatorname{Ind}(B) = \dim \operatorname{Ker}(K,1) - \dim \operatorname{Ker}(L,1)$.

D'autre part, $f(AB)$ et $f(BA)$ sont à trace. $f(AB)$ laisse stable $\operatorname{Ker}(K,1)$ et $S(K,1)$, avec restriction à $\operatorname{Ker}(K,1)$ unipotente (vu $f(0)=1$), ainsi

$$\operatorname{tr} f(AB) = \dim \operatorname{Ker}(K,1) + \operatorname{tr} f(AB)_{|S(K,1)} .$$

Les restrictions de $f(AB)$ sur $S(K,1)$ et $f(BA)$ sur $S(L,1)$, entrelacées par l'isomorphisme B, ont même trace. Il en résulte

$$\operatorname{tr} f(AB) - \operatorname{tr} f(BA) = \dim \operatorname{Ker}(K,1) - \dim \operatorname{Ker}(L,1),$$

ce qui est l'indice de B. □

Le théorème précédent vaut aussi pour les projecteurs de $M_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes M_k(\mathbf{C})$ (ou plus généralement $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ de dimension finie avec une trace $\operatorname{tr}_\mathcal{B}$), quitte à remplacer le module de Fredholm $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^k$, F par $F \otimes \mathbf{1}_k$ et ε par $\varepsilon \otimes \mathbf{1}_k$: si φ est le cocycle associé au module $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, F, \varepsilon)$, $\operatorname{Tr} \# \varphi$ l'est à $(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^k, M_k(\mathcal{A}), \ldots)$.

COROLLAIRE 4.13. — *Si φ est un n-cocycle associé à un module de Fredholm pair sur $\mathcal{A}$, l'évaluation $\operatorname{Tr}_k \# \varphi(e, \ldots, e)$ sur tout projecteur e de $M_k(\mathcal{A})$ est entière.*

Non-exemples 4.14. — Soit K un compact de $[0,1]$ totalement discontinu de mesure de Lebesgue non nulle (tel un Cantor convenablement construit); la trace sur $\mathcal{C}(K)$ induite par la mesure de Lebesgue ne saurait être le caractère d'un module de Fredholm. Non commutative, la C^*-algèbre $A(\theta)$, ($\theta \notin \pi\mathbf{Q}$) engendrée par les unitaires U et V avec la relation $UV = e^{i\theta}VU$, a comme trace τ l'évaluation du zéro-ième coefficient de Fourier : $\tau(\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} a_{m,n}U^mV^n) = a_{0,0}$ qui, appliquant surjectivement les projecteurs de $A(\theta)$ sur $(\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}) \cap [0,1]$ ([14]), n'est pas un caractère; l'effet Hall quantique (et les stabilités entières de certains observables) est modélisé par un 2-cocycle sur une algèbre dérivée de $A(\theta)$ ([7], p. 179).

5. Le caractère de Dirac d'une surface

Avant d'esquisser le cas général, il n'est pas inutile de s'arrêter un moment autour des tores plats, où l'analyse de Fourier permet d'établir des formules exactes (au contraire des formules asymptotiques des surfaces non plates).

Soit Γ un réseau de $\mathbf{C}$, Γ^* son réseau dual (*i.e.* $\langle \Gamma, \Gamma^* \rangle \subset 2\pi\mathbf{Z}$), $(e_\varphi)_{\varphi\in\Gamma^*}$ une base s'exponentielles normalisées de $L^2(\mathbf{C}/\Gamma)$ $(e_\varphi(x+iy) = e^{i(\Re e\varphi x + \Im m\varphi y)}/\sqrt{\mathrm{vol}(\Gamma)})$ et, pour η hors de $i\Gamma^*$, $\not{\partial}_\eta = \partial_x + i\partial_y + \eta$. L'opérateur $\not{\partial}_\eta$ sur $L^2(\mathbf{C}/\Gamma)$ est inversible et induit un module de Fredholm, 3-sommable, comme défini dans l'exemple 4.3.δ.

PROPOSITION 5.1. — *Soit τ_η^Γ le 2-cocycle associé au module de Fredholm 3-sommable sur $\mathcal{C}^1(\mathbf{C}/\Gamma)$ déterminé par $\not{\partial}_\eta$. Le cocycle $2i\pi\tau_\eta^\Gamma$ coïncide avec celui induit par le cycle d'intégration* $[\mathbf{C}/\Gamma]$.

Preuve. — Par densité C^1 des polynômes trigonométriques, il suffit de vérifier l'égalité

$$\tau_\eta^\Gamma(a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{2i\pi}\langle [\mathbf{C}/\Gamma], a_0 da_1 da_2 \rangle$$

pour un triplet d'exponentielles $(a_{\psi_0}, a_{\psi_1}, a_{\psi_2})$ (analytiquement, a_ψ égale e_ψ, mais, algébriquement, a_ψ est une fonction de l'algèbre $\mathcal{C}^1(\mathbf{C}/\Gamma)$ alors que e_ψ est élément d'une base de l'espace hilbertien $L^2(\mathbf{C}/\Gamma)$) L'évaluation du cocycle passe par le calcul des crochets $[F, a_\psi]$:

$$[F, a_\psi]\begin{pmatrix} e_\varphi \\ e_{\varphi'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\psi}{\varphi'+\psi-i\eta} e_{\varphi'+\psi} \\ \frac{\psi}{\varphi+\psi-i\eta} e_{\varphi+\psi} \end{pmatrix}.$$

Ainsi la trace de $\varepsilon F[F, a_{\psi_0}]i[F, a_{\psi_1}]i[F, a_{\psi_2}]$ est nulle si $\psi_0 + \psi_1 + \psi_2$ est non nul, sinon égale à la série

$$2\sum_{\varphi\in\Gamma^*} \frac{\psi_0}{\varphi+\psi_2+\psi_1+\psi_0-i\eta}\,\frac{\psi_1}{\varphi+\psi_2+\psi_1-i\eta}\,\frac{\psi_2}{\varphi+\psi_2-i\eta},$$

indépendante de ν et valant $4i\pi(n_2m_1 - n_1m_2)$ ([5], p. 275) si $\psi_i = n_i + m_i v$ dans une base du réseau (u, v), positive comme base de $\mathbf{C}$. La calcul de $\int_{\mathbf{C}/\Gamma} a_{\psi_0} da_{\psi_1} da_{\psi_2}$ permet de conclure. □

En fait, le module de Fredholm précédent sur $\mathcal{C}^1(\mathbf{C}/\Gamma)$ est associé à l'opérateur de Dirac par la construction générale évoquée à la fin de l'exemple 4.3.δ. Soit (M, g) une variété riemannienne, compacte, spinorielle et une structure spinorielle choisie) et de dimension n paire † (*p. ex.* une surface riemannienne), S_M son fibré des spineurs et $\not{D}_M$ l'opérateur de Dirac (autoadjoint) sur $L^2(S_M)$. L'opérateur de chiralité $(i^{n/2}e_1 \dots e_n$

† Si M est de dimension impaire, le module de Fredholm n'a pas de propriété de parité, le caractère associé est dans l'homologie cyclique périodique impaire.

si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de TM) détermine des spineurs positifs et négatifs (S_M^+ et S_M^- *resp.*) et anticommute avec l'opérateur de Dirac $\not{D}_M = \begin{pmatrix} 0 & \not{\partial}_M^* \\ \not{\partial}_M & 0 \end{pmatrix}$ sur $L^2(S_M) = L^2(S_M^+) \oplus L^2(S_M^-)$. Pour les η qui conviennent, l'inversibilité de $\not{D}_{M,\eta} = \not{D}_M + \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$ induit, comme précédemment, un n-cocycle $\tau_\eta^{S_M}$ qu'il n'est guère possible d'expliciter pour une variété quelconque, mis à part le tore traité *supra*.

LEMME 5.2.

(i) Les n-cocycles $\tau_{\eta_1}^{S_M}$ et $\tau_{\eta_2}^{S_M}$ diffèrent d'un cobord de Hochschild $\delta_H\psi$.

(ii) Soient $\mathcal{A}$ une algèbre, p un de ses projecteurs et ψ un $(2k-1)$-cocycle sur $\mathcal{A}$. Alors $\delta_H\psi(p,\dots,p)$ est nul.

Preuve. — L'*(i)* résulte de l'invariance homotopique du caractère d'un module de Fredholm ([5], Lemma 1, p. 279) et l'*(ii)* de la définition du bord δ_H citée dans la remarque 2.2. □

Ainsi, pour le projecteur p, $\tau_\eta^{S_M}(p,\dots,p)$ ne dépend pas de η (hors du spectre de $\not{D}_M$), de même que $\tau_{\eta,m}^{S_M}(p,\dots,p)$, où $\tau_{\eta,m}^{S_M}$ est le caractère du module de Fredholm associé à la donnée de l'opérateur $\mathcal{D}_{M,\eta,m} = \not{D}_{M,\eta}\hat{\otimes}\mathbf{1} + m\mathbf{1}\hat{\otimes}F_{\mathbb{C}}$ sur le produit gradué $L^2(S)\hat{\otimes}\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ avec $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ le module de l'exemple 4.3.α.

LEMME 5.3. — *L'opérateur $\mathcal{D}_{\eta,m}$ est inversible pour tous η et m réels, de carré $(\not{D}_{M,\eta}^2 + m^2)\hat{\otimes}\mathbf{1}$.*

Preuve. — Si A et B sont deux algèbres graduées, leur produit tensoriel gradué $A\hat{\otimes}B$ ([3], p. 137) est l'algèbre graduée avec espace sous-jacent le produit tensoriel $A\otimes B$ et produit $(a\hat{\otimes}b)(a'\hat{\otimes}b') = (-1)^{d^\circ b d^\circ a'}aa'\hat{\otimes}bb'$ (pour a, a', b, b' homogènes). L'algèbre $\mathcal{L}(A)\hat{\otimes}\mathcal{L}(B)$ opère sur $A\hat{\otimes}B$, comme algèbre graduée (avec involution $(\alpha\hat{\otimes}\beta)^* = (-1)^{d^\circ\alpha d^\circ\beta}\alpha^*\hat{\otimes}\beta^*$), suivant $\alpha\hat{\otimes}\beta(a\hat{\otimes}b) = (-1)^{d^\circ\beta d^\circ a}\alpha(a)\hat{\otimes}\beta(b)$. Selon cette algèbre, le carré (gradué) de l'opérateur autoadjoint $\mathcal{D}_{\eta,m}$ est aisément calculable, il est inversible et donc, en même temps, $\mathcal{D}_{\eta,m}$. □

En utilisant le calcul symbolique getzlerien, CONNES ([5], theorem 5, p. 285) annonce l'existence de la limite de $\tau_{0,m}^{S_M}$ pour m infini, avec une formule pour cette limite qui, pour une surface M, se réduit à

THÉORÈME 5.4. — *Soit (M,g) surface riemannienne compacte orientable. Pour a_0, a_1, a_2 de classe C^∞,*

$$\lim_{m\to\infty} \tau_{0,m}^{S_M}(a_0,a_1,a_2) = \frac{1}{2i\pi}\langle [M], a_0 da_1 da_2\rangle .$$

COROLLAIRE 5.5. — *Soit (M,g) surface riemannienne compacte orientable. La caractéristique $\int_M K_g/4\pi$ est entière.*

Preuve. — D'après l'invariance homotopique de $\int_M K_g$ vis à vis des déformations de métriques, il suffit de considérer une métrique g_0 induite par un plongement (qui existe) de M dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. La combinaison des lemmes 3.1 et 5.2 et du théorème 5.4 laisse écrire

$$\int_M K_{g_0} = \int_M \mathbf{n}_{g_0}^* \omega = 3 \int_M n_{g_0 1} dn_{g_0 2} dn_{g_0 3}$$
$$= \frac{2}{i} \operatorname{Tr}_2 \#[M](P(\mathbf{n}_{g_0}), P(\mathbf{n}_{g_0}), P(\mathbf{n}_{g_0})) = 4\pi \operatorname{Tr}_2 \# \tau_{0,m}^{S_M}(P(\mathbf{n}_{g_0}), P(\mathbf{n}_{g_0}), P(\mathbf{n}_{g_0})),$$

pour conclure avec le corollaire 4.13 du théorème d'indice 4.9. □

Le calcul symbolique getzlerien a été développé dans le cadre de l'opérateur de la chaleur (avec évaluation de $\lim_{t\to 0} \operatorname{Tr}_s e^{-t\not{\partial}_M^2}$), point de vue apparemment plus fécond que celui de la résolvante (ou puissance de résolvante) pour les théorèmes d'indice. CONNES introduit dans [6] la notion de module de Fredholm pair $(\mathcal{H}, D, \varepsilon)$ θ-sommable sur une algèbre $\mathcal{A}$, où la condition de sommabilité finie est remplacée par la traçabilité de e^{-tD^2} (si D est l'opérateur autoadjoint impair induisant le module de Fredholm, *cf.* exemple 4.3.δ). À tout module θ-sommable est associé un caractère de Chern ([9]) $\operatorname{ch}(\mathcal{H}, D, \varepsilon) = (\tau_n)_{n\in 2\mathbf{N}}$, avec la valeur $\tau_n(a_0, \ldots, a_n)$ de la composante en degré n donnée par

$$\int_{\{0\leqslant t_1\leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1\}} \operatorname{Tr}\left[\varepsilon a_0 e^{-t_1 D^2} a_1 e^{-(t_2-t_1)D^2} \ldots a_n e^{-(1-t_n)D^2}\right] dt_1 \ldots dt_n,$$

élément du complété de $\oplus_{n\in 2\mathbf{N}} C_\lambda^n(\mathcal{A})$ pour une certaine topologie LF ([6], p. 540 décrit comment, formellement, les composantes τ_n sont transformées de Laplace des caractères du module supposé de n-sommabilité finie); la cohomologie de ce complété pour la différentielle d_C de la remarque 4.7 contient strictement la cohomologie cyclique périodique de $\mathcal{A}$ et, si le module de Fredholm est finiment sommable, le caractère de Chern précédent a même classe que celle induite par le caractère $(2i\pi)^{n/2}(n/2)!\varphi_n$. La définition de $\operatorname{ch}(\mathcal{H}, D, \varepsilon)$ n'impose ni la sommabilité finie, ni l'inversibilité de D, ce qui évite le recours précédent au module tordu $\mathcal{H}\hat{\otimes} H_C$. Le cocycle $\operatorname{ch}(\mathcal{H}, tD, \varepsilon)$ a une limite lorsque t tend vers 0, dont l'expression est analogue à celle donnée par CONNES dans le théorème 5 de [5], p. 285; cet énoncé est prouvé par BLOCK & FOX dans [4] et BISMUT dans [2], alors que CONNES renvoie au chapitre 3 (à paraître…) suivant les deux premiers ([5]) de son *non-commutative geometry*.

A. Indice d'une courbe dans le plan

La traduction des invariance homotopique et intégralité de l'indice $\operatorname{Ind}(C, a)$ se réalise à travers le 1-cocycle sur $C^1(S^1)$ associé à la classe fondamentale $[S^1]$: $[S^1](a_0, a_1) = \int_{S^1} a_0 da_1$. Les énoncés précédents aboutissent à l'accouplement de la K_0-théorie d'une algèbre avec sa cohomologie cyclique paire d'une part, à l'intégralité des caractères des modules de Fredholm pairs d'autre part; il est ainsi opportun de reprendre les énoncés correspondants tant pour la K_1-théorie et son accouplement avec la cohomologie cyclique impaire que pour les caractères des modules de Fredholm gradués, énoncés avec preuves à lire dans le *non-commutative geometry* ([5]). Ces dernières lignes se contenteront de reproduire les assertions opérationnelles qui éclairent l'indice $\operatorname{Ind}(C, a)$.

Soit $C : S^1 \xrightarrow{u} \mathbf{C}$ une courbe de classe C^1 ne rencontrant pas l'origine. L'invariance homotopique de l'indice $\mathrm{Ind}(C,0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S^1} u^{-1}du = (2i\pi)^{-1}[S^1](u^{-1},u)$ est livrée par la proposition suivante :

PROPOSITION A.1 ([5], p. 325). — *Soit φ un $(2n+1)$-cocycle cyclique sur l'algèbre unitaire $\mathcal{A}$ et χ l'application induite sur $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$, groupe des inversibles de $\cup_{k\geqslant 1} M_k(\mathcal{A})$, définie par $\chi(u) = \mathrm{Tr}\,\#\,\varphi(u^{-1},u,\dots,u^{-1},u)$.*

(i) L'évaluation $\chi(a_t)$ est constante le long d'une déformation d'inversibles (a_t) .

(ii) Si a et u sont inversibles, $\chi(uau^{-1}) = \chi(a)$.

(iii) Si u et v sont inversibles, $\chi(uv) = \chi(u) + \chi(v)$.

avec version graduée, dont la preuve est donnée ici afin de compléter la remarque 1.2.β :

LEMME A.1$^{\mathrm{gr}}$. — *Soit φ un $(2n+1)$-cocycle gradué sur l'algèbre graduée $\mathcal{A}$ et $(u_t)_{t\in(0,1)}$ une courbe différentiable d'unitaires de degré 1. Alors $\varphi(u_t^{-1},u_t,\dots,u_t^{-1},u_t)$ est constant.*

Preuve. — Par cyclicité graduée,

$$\frac{d}{dt}\varphi(u_t^{-1},u_t,\dots,u_t^{-1},u_t) = (n+1)[-\varphi(u_t^{-1}u_t'u_t^{-1},u_t,\dots,u_t^{-1},u_t) + \varphi(u_t^{-1},u_t',\dots,u_t^{-1},u_t)]. \tag{A.2}$$

Via la relation de cocycle $(b)^{\mathrm{gr}}$, l'opposé du premier terme devient

$$\varphi(u_t^{-1}u_t',1,\dots,u_t^{-1},u_t) - \varphi(u_t^{-1}u_t',u_t^{-1},1,\dots,u_t^{-1},u_t) + \dots$$
$$+ (-1)^{2n+2}\varphi(u_t^{-1}u_t',u_t^{-1},u_t\dots,u_t,1) + (-1)^{4n+2}\varphi(u_t',u_t^{-1},\dots,u_t,u_t^{-1}).$$

Dans cette somme, le dernier terme est égal au second de (A.2), alors que les autres sont tous nuls : une récurrence (descendante de $p = 2n+1$ à 1 assure que $\varphi(1,1,\dots,1,a_p,a_{p+1},\dots,a_{2n+1})$ est nul. □

L'intégralité de l'indice naît d'un module de Fredholm convenable. Soit $\mathbf{C}\ell_1 \simeq \mathbf{C}\oplus\mathbf{C}$ l'algèbre de Clifford associée à $\mathbf{C}$, opérant sur l'espace $\mathbf{Z}_2$-gradué $\mathcal{H}_1 = \mathbf{C}\oplus\mathbf{C}$ via la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \mu\\ \mu & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ pour (λ,μ) dans $\mathbf{C}\ell_1$.

THÉORÈME A.3 [5], p. 285–291. — *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre opérant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'un involution I de sorte que $[\mathcal{A},I] \subset \mathcal{I}_p(\mathcal{H})$. Soit n impair au moins égal à $p-1$.*

(i) Soit $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_1$ qui est naturellement un $\mathcal{A}\otimes\mathbf{C}\ell_1$-module et $F = i\left(\begin{smallmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{smallmatrix}\right)$. $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_1$ est un module p-sommable sur l'algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée $\mathcal{A}\otimes\mathbf{C}\ell_1$. Son caractère est de la forme $\tau_n\otimes\gamma$, où γ est la trace graduée sur $\mathbf{C}\ell_1$ définie par $\gamma(\lambda,\mu) = \mu$ et τ_n est le n-cocycle cyclique sur $\mathcal{A}$ défini par

$$\tau_n(a_0,\dots,a_n) = (-1)^{(n-1)/2}\,\mathrm{Tr}(I[I,a_0][I,a_1]\dots[I,a_n]) .$$

(ii) Soit P la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_+ = \mathrm{Ker}(I-1)$ et $T_a = PaP$ pour $a \in \mathcal{A}$. Si ε_j note $T_{a_j a_{j+1}} - T_{a_j}T_{a_{j+1}}$, alors

$$\tau_n(a_0,\dots,a_n) = -2^{n+2}\,\mathrm{Tr}(\varepsilon_0\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}) - \mathrm{Tr}(\varepsilon_1\varepsilon_3\dots\varepsilon_n)\ .$$

(iii) Si u est dans $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$, l'opérateur T_u est à indice, d'indice $\tau_n(u,u^{-1},\dots,u,u^{-1})$.

Pour $\mathcal{A} = C^1(S^1)$, les classiques opérateurs T_a sont les opérateurs de Töplitz sur $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ de sous-espace bosonique $\mathcal{H}_+$ l'espace de fonctions sur le cercle à spectre de Fourier positif : $\mathcal{H}_+ = \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{C}e_n$. Copiant la proposition 5.1 (avec sa preuve), le lemme suivant permet de conclure en l'intégralité de l'indice $\mathrm{Ind}(C,0)$:

LEMME A.4. — *Soit τ_1 le 1-cocycle associé aux opérateurs de Töplitz du théorème A.3, défini par $\tau_1(a_0,a_1) = \mathrm{Tr}(I[I,a_0][I,a_1])$. Le cocycle $2i\pi\tau_1$ coïncide avec celui induit par le cycle d'intégration $[S^1]$.*

B. K-théorie et calcul holomorphe†

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire, la K-théorie $K_0(\mathcal{A})$ est le groupe de Grothendieck associé au monoïde construit à partir de l'ensemble des idempotents de $M_\infty(\mathcal{A}) = \varinjlim M_k(\mathcal{A})$ quotienté par la relation d'équivalence $p \sim q$ si $p = uv, q = vu$ pour des éléments u, v convenables (ce qui, quitte à plonger p et q dans une algèbre $M_k(\mathcal{A})$ de rang supérieur, est équivalent à l'existence d'un u inversible tel que $p = uqu^{-1}$ d'après la preuve du corollaire 3.3), avec la somme de e dans $M_k(\mathcal{A})$ et f dans $M_l(\mathcal{A})$ définie comme la classe de $\left(\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & f\end{smallmatrix}\right)$ dans $M_{k+l}(\mathcal{A})$.

Dans une algèbre unitaire $\mathcal{A}$, le spectre $\mathrm{Spec}_{\mathcal{A}}(a)$ d'un élément a est l'ensemble des complexes λ tels que $a-\lambda$ est non inversible. Ainsi, p. ex., un idempotent e a son spectre inclus dans $\{0,1\}$, puisque pour tout autre complexe λ, $(e-\lambda)^{-1} = (1-\lambda)^{-1}e + \lambda^{-1}(e-1)$.

Si $\mathcal{A}$ est banachique, tout spectre $\mathrm{Spec}_{\mathcal{A}}(a)$ est compact et un calcul fonctionnel holomorphe opère sur $\mathcal{A}$: si γ_a est un lacet entourant le spectre de a (de telle manière que tout point de ce spectre soit d'indice 1 relativement à γ_a) et f une fonction définie sur un voisinage connexe de $\mathrm{Spec}_{\mathcal{A}}(a) \cup \gamma_a$, $f(a)$ est défini par l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_a} f(z)dz/(z-a)$. Ce calcul holomorphe jouit des propriétés attendues : $f(a)g(a) = (fg)(a)$, $g\circ f(a) = g(f(a))\dots$

DÉFINITION B.1. — *La sous-algèbre $\mathcal{B}$ de l'algèbre banachique $\mathcal{A}$ est dite stable par calcul holomorphe si pour tout entier k, tout b de $M_k(\mathcal{B})$, toute fonction holomorphe sur un voisinage de $\mathrm{Spec}_{M_k(\mathcal{A})}(b)$, l'élément $f(b)$ est dans $M_k(\mathcal{B})$.*

L'intérêt de cette notion, illustrée par le cas $\mathcal{A} = C(X)$ et $\mathcal{B} = C^k(X)$ $(k = 1,\dots,\omega)$ p. ex., réside dans le théorème suivant :

† Rédigé d'après un exposé de P. JOLISSAINT au séminaire *Borel* à Berne le 24 juin 1992.

THÉORÈME B.2. — *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire banachique et $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de A, dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe. Alors l'inclusion de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ induit un isomorphisme en K_0-théorie.*

Preuve. — Quitte à remplacer $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ par $M_k(\mathcal{A}), M_k(\mathcal{B})$, il est loisible de travailler dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Montrer l'injectivité, c'est prendre deux idempotents p, q dans $\mathcal{B}$ conjugués dans $\mathcal{A}$ (*i.e.* $p = uqu^{-1}, u \in \mathrm{Gl}(\mathcal{A})$) et affirmer leur équivalence dans $\mathcal{B}$. Par densité de $\mathcal{B}$, il existe u', suffisamment proche de u, inversible (dans $\mathcal{A}$, d'inverse) dans $\mathcal{B}$ (par stabilité holomorphe de $\mathcal{B}$) tel que $||u'qu'^{-1} - uqu^{-1}||$ soit au plus égal au $\varepsilon(uqu^{-1})$ mis à jour dans le lemme suivant, qui entraîne ainsi l'équivalence des idempotents p et q dans $\mathcal{B}$.

Un idempotent p de $\mathcal{A}$ est approché par une suite π_n d'éléments de $\mathcal{B}$. Soit U_0, U_1 des voisinages fermés disjoints de 0 et 1 (*resp.*), f une fonction holomorphe définie au voisinage de $U_0 \cup U_1$ et de restriction constante égale à i sur U_i ($i = 0, 1$). Alors, pour n suffisamment grand, $p_n = f(\pi_n)$, élément de $\mathcal{B}$ par calcul fonctionnel holomorphe, est un idempotent, convergent vers p dans $\mathcal{A}$. Ainsi, suite à une nouvelle invocation du lemme suivant, p_n et p sont des idempotents équivalents (dans $\mathcal{A}$) pour n proche de l'infini, ce qui assure la surjectivité. □

LEMME B.3. — *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme dans le théorème précédent et p un idempotent de $\mathcal{B}$. Il existe $\varepsilon(p) > 0$ tel que tout idempotent dans la boule centrée en p et de rayon $\varepsilon(p)$ soit équivalent à p dans $\mathcal{B}$.*

Preuve. — Soit ε tel que $\varepsilon < (2||p||+\varepsilon)^{-1}$. Pour q projecteur avec $||q-p|| < \varepsilon$, l'élément $u = 1-(p+q-2pq)$, inversible, a son inverse dans $\mathcal{B}$ par stabilité holomorphe d'icelle. L'égalité $pu = uq = pq$ entraîne l'équivalence de p et q dans $\mathcal{B}$. □

Le théorème B.2 a son pendant en K_1-théorie ([5], p. 308) (mais sans équivalent en cohomologie cyclique : pour X variété différentiable, la cohomologie cyclique périodique de $C(X)$ est nulle, alors que celle de $C^\infty(X)$ est isomorphe à l'homologie de X), ce qui permet de conclure : les invariants différentiels définis en terme de K-théorie (d'une algèbre de fonctions lisses) induisent des invariants continus (*i.e.* de la C^*-algèbre des fonctions continues) : indice d'une courbe par rapport à un point, caractéristique d'Euler-Poincaré...

Bibliographie

[1] BERGER M., GOSTIAUX B. — *Géométrie différentielle*, Armand Colin, Paris, 1972.

[2] BISMUT J-M. — *Transgressed Chern forms for Dirac operators*, J. Funct. Anal. **77** (1980), 32–50.

[3] BLACKADAR B. — *K-theory for operator algebras*, Math. Sciences research Publ., **5**, Springer, 1986.

[4] BLOCK J., FOX J. — *Asymptotic pseudodifferential operators and index theory*, Geometric and topological invariants of elliptic operators, Contemporary Mathematics **105**, A. M. S., 1990.

[5] CONNES A. — *Non-commutative geometry*, Publ. Math. IHES **62** (1986), 257–360.

[6] CONNES A. — *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules*, K-theory **1** (1988), 519–548.

[7] CONNES A. — *Géométrie non commutative*, Interéditions, Paris, 1990.

[8] DIXMIER J. — *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Gauthiers-Villars, Paris, 1964.

[9] GETZLER E., SZENES A. — *On the Chern character of a theta-summable Fredholm module*, J. Funct. Anal. **84** (1989), 343–357.

[10] GROMOV M. — *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3.9**, Springer, Berlin, 1986.

[11] HUSEMOLLER D. — *Fibre bundles*, Graduate texts in mathematics, Springer, New-York, 1966.

[12] KASPAROV G . — *Operatornyĭ K-funktor i rasshchireniya C^*-algebra*, Izvestiya akademii nauk SSSR, seriya matematicheckaya **44** (1980), 571–636.

[13] LAWSON H., MICHELSOHN M-L. — *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[14] RIEFFEL M. — *C^*-algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math. **93** (1981), 415–429.

[15] SIMON B. — *Trace ideals and their applications*, London Math. Soc. Lecture notes **35**, Cambridge, 1979.

Laurent GUILLOPÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)