Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES CARRON

Stabilité isopérimétrique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 13-18
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__13_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (13–18)

STABILITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE

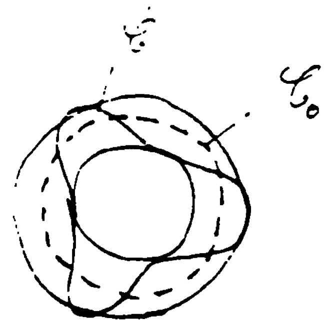
par *Gilles CARRON*

1. Introduction

a) L'inégalité de Bonnesen.

Rappelons l'inégalité isopérimétrique dans le plan, si C est une courbe fermé simple de longueur L bordant un domaine D d'aire A alors $L^2 - 4\pi A \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si C est un cercle.

On aimerait savoir en quoi cette quantité $L^2 - 4\pi A$ contrôle la géométrie de C, c'est l'objet de l'inégalité de Bonnesen [B] il existe C_0 cercle euclidien avec $L^2 - 4\pi A \geqslant d_H^2(C.C_0)$, où d_H est la distance de Hausdorff.



On voudrait généraliser un tel résultat. En dimension plus grande, nous avons aussi une inégalité isopérimétrique : si D est un domaine régulier de $\mathbf{R}^{n+1}$ on a

$$\delta(D) = c_n \frac{\mathrm{vol}_n \partial D}{(\mathrm{vol}_{n+1} D)^{\frac{n}{n+1}}} - 1 \geqslant 0$$

où c_n est la constante tel qu'il y ait égalité pour une boule euclidienne. Cependant on ne peut espérer un résultat exactement similaire à celui de Bonnesen, en effet δ ignore les parties de volume $(n-1)$-dimensionnelle nulle mais pas d_H, la distance de Hausdorff n'est donc pas la distance adaptée.

b) La bonne distance.

Hürwitz, grâce aux séries de Fourier montre l'existence de C_0 cercle euclidien avec

$$d^2_{H^1}(C, C_0) \leqslant C^{\text{te}}(L^2 - 4\pi A)$$

où $d_{H^1}(C, C_0) = \inf \|f_1 - f_2\|_{H^1(\mathbb{S}^1)}$ l'inf étant pris sur les paramétrages $f_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow C$ et $f_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow C_0$.

La norme de l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{S})$ étant donnée par $\|u\|^2_{H^1(\mathbb{S}^1)} = \int_{\mathbb{S}^1} \big(u'^2(\theta) + u^2(\theta)\big)\, d\theta$.

Remarques :

1) Sur $\mathbb{S}^1$, la norme H^1 majore la norme L^∞, on retrouve donc ainsi le résultat de Bonnesen, avec une constante non optimale.

2) La longueur et l'aire sont invariantes par translation de la courbe C, on peut donc supposer que le barycentre de C est 0, puis par une homothétie on peut fixer l'aire de D. Nous pouvons alors reformuler le résultat de Bonnesen ; notons $\mathcal{E}_v$ l'ensemble des domaines C^1 de $\mathbb{R}^2$ dont le barycentre est 0 (et dont l'aire est v), alors

$$\begin{aligned} L : \mathcal{E}_v &\longrightarrow \mathbb{R} \\ D &\longmapsto \text{Longueur}\,(\partial D) \end{aligned}$$

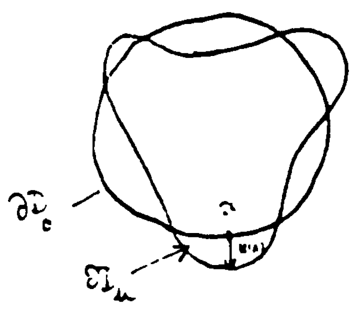
atteint son minimum en D_0 disque euclidien,

et il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de D_0 dans $\mathcal{E}_v$ et une constante $C > 0$ tel que tout domaine D de $\mathcal{V}$ vérifie $L(\partial D) - L(\partial D_0) \geqslant C d^2_{H_1}(D, D_0)$.

C'est sous cette forme que Fuglede a étendu ce résultat en dimension supérieure.

c) Le résultat de Fuglede.

Notons $\mathcal{E}_v$ l'ensemble des domaines C^1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont le barycentre est 0 et dont le volume est fixe égal à v. Notons D_0 la boule euclidienne de $\mathcal{E}_v$. Un voisinage de D_0 dans $\mathcal{E}_v$ est donné par l'intersection de $\mathcal{E}_v$ avec l'ensemble des domaines D_u dont le bord ∂D_u est (en coordonnées polaires) le graphe de u au-dessus de ∂D_0 :



Sur ce voisinage, on définit également une distance H^1 pour de tel domaine :

$$d_{H^1}(D_u, D_v) = \|u - v\|_{H^1},$$

nous avons alors le

THÉORÈME [F]. — *Il existe un C^1 voisinage V de D_0 dans $\mathcal{E}_v$ et une constante $C > 0$ tel que tout D de V vérifie*

$$d^2_{H^1}(D, D_0) \leqslant C(\mathrm{vol}_n\, \partial D - \mathrm{vol}_n\, \partial D_0).$$

2. Présentation du théorème

On se propose de généraliser ce résultat aux variétés riemanniennes. Soit $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ une variété riemannienne de dimension $n+1$, complète orientée, cette dernière hypothèse est en fait superflue. Notons $\mathcal{E}_v$ l'ensemble des domaines compacts de bord C^1 et de volume v fixé. On considère la fonctionnelle $D \longmapsto \mathrm{vol}_n(\partial D)$ définie sur $\mathcal{E}_v$. Un élément D_0 de $\mathcal{E}_v$ sera dit critique pour cette fonctionnelle si, pour toute variation D_t de D_0, de classe C^2, on a

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{vol}_n\, \partial D_t)\,|_{t=0} = 0$$

i.e. ∂D_0 est à courbure moyenne constante. Un tel point sera dit "infinitésimalement stable" si toute variation vérifie

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{vol}_n\, \partial D_t)\,|_{t=0} \geqslant 0.$$

Cependant certaines variations donnent trivialement des dérivées secondes nulles, celles laissant ∂D_0 globalement invariant et celles s'obtenant par l'action sur ∂D_0 d'un groupe à un paramètre d'isométries d'un voisinage de ∂D_0 dans $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$. Un point critique sera dit "infinitésimalement strictement stable" si

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{vol}_n\, \partial D_t)\,|_{t=0} > 0$$

pour un ensemble de variations transverse aux variations triviales citées ci-dessus. Le bord d'un domaine D, C^1 proche de D_0, peut s'écrire en coordonnées normales comme un graphe au-dessus de ∂D_0. On définit alors une distance H^1 pour de tel domaine et

$$d'_{H^1}(D_1, D_2) = \inf\{d_{H^1}(ID_1, JD_2), I, J \text{ isométries de } \overline{M}\}$$

qui est une distance sur un voisinage de la classe de D_0 dans $\mathcal{E}_v / \mathrm{Isom}(\overline{M}, \overline{g})$. Nous avons alors le

THÉORÈME. — *Si D_0 est un point critique infinitésimalement strictement stable, il existe un voisinage V de D_0 dans $\mathcal{E}_v$ (pour la topologie C^1) et une constante $C > 0$ tels que tout domaine D de V vérifie*

$$d'_{H^1}(D, D_0)^2 \leqslant C(\mathrm{vol}_n\, \partial D - \mathrm{vol}_n\, \partial D_0).$$

Notation. — Si u est une fonction C^1 sur ∂D_0, on note D_u le domaine dont le bord est le graphe de u – en coordonnées normales – au-dessus de ∂D_0.

Soit Σ l'ensemble des fonctions C^1 tel que le domaine D_u est dans $\mathcal{E}_v$; c'est localement en zéro une sous-variété de $C^1(\partial D_0, \mathbf{R})$, Σ permet de paramétrer un voisinage de ∂D_0 dans $\mathcal{E}_v$. L'espace tangent en 0 de Σ est

$$T_0\Sigma = \{u \in C^1(\partial D_0, \mathbf{R}) \,;\, \int_{\partial D_0} u = 0\}.$$

Si ∂D_0 est un point critique de vol_n alors on peut calculer la deuxième dérivée de vol_n en restriction à Σ, on obtient :

$$\mathrm{vol}_n''(u,u) = \int_{\partial D_0} |du|^2 - \left(\overline{\mathrm{ric}}(\vec{\nu},\vec{\nu}) + \|II\|^2\right)u^2,$$

où $\overline{\mathrm{ric}}$ est le tenseur de Ricci de $(\overline{M},\overline{g})$, $\vec{\nu}$ une normale à ∂D_0 et II la seconde forme fondamentale de $\partial D_0 \subset (\overline{M},\overline{g})$. La stabilité infinitésimale de ∂D_0 se déduit du fait que l'opérateur elliptique autoadjoint $L = \Delta - \left(\overline{\mathrm{ric}}(\vec{\nu},\vec{\nu}) + \|II\|^2\right)$ est positif, la stabilité infinitésimale stricte est équivalente au fait que le noyau de cet opérateur est engendré par les isométries infinitésimales d'un voisinage de ∂D_0 dans $\overline{M}$, ou encore que $\dim\ker L = \dim \mathrm{Isom}(\overline{M},\overline{g}) - \dim G_0$ où G_0 est l'ensemble des isométries de $(\overline{M},\overline{g})$ fixant globalement ∂D_0.

3. Exemples d'applications

a) Retrouvons le résultat de Fuglede.

On a $(\overline{M},\overline{g}) = (\mathbf{R}^{n+1}, \mathrm{can})$ et D_0 est une boule euclidienne de rayon r. On a $L = \Delta - \frac{n}{r^2}$ qui, en restriction aux fonctions d'intégrale nulle, est positif, son noyau est de dimension $n+1$, et on a

$$\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{n+1}) \cong O(n+1) \rtimes \mathbf{R}^{n+1} \text{ et } G_0 \cong O(n+1).$$

Les hypothèses du théorème sont vérifiées.

b) L'espace hyperbolique.

On prend $(\overline{M},g) = (\mathbf{H}^{n+1}, \mathrm{hyp})$ et D_0 boule géodésique de rayon r. On a $L = \Delta - \frac{n}{(\operatorname{sh} r)^2}$; comme ∂D_0 est isométrique à une sphère euclidienne de rayon $\operatorname{sh} r$, en restriction aux fonctions d'intégrale nulle, L est positif et son noyau est de dimension $n+1$. De plus $\mathrm{Isom}\,\mathbf{H}^{n+1} = O(n+1,1)$ et $G_0 \simeq O(n+1)$. Les hypothèses du théorèmes sont donc satisfaites.

c). — De même, le théorème est valable pour les sphères géodésiques des sphères euclidiennes.

d). — Si le bord de ∂D_0 a plusieurs composantes connexes alors des fonctions constantes localement sont d'intégrale nulle, la stabilité de ∂D_0 implique donc que si

$\partial D_0 = \sqcup_i M_i$ union des composantes connexes de ∂D_0 alors si $\sum_i c_i \operatorname{vol} M_i = 0$, on a

$$-\Sigma c_i^2 \int_{M_i} \|II\|^2 + \overline{\mathrm{ric}}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) \geqslant 0.$$

Dans le cas où la courbure de Ricci de $\overline{M}$ est positive, ∂D_0 est totalement géodésique et L est l'opérateur de Laplace sur ∂D_0, son noyau est de dimension le nombre de composantes connexes de ∂D_0 moins un.

Par exemple $(\overline{M}, \bar{g}) = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ tore carré plat et

$$D_0 = \left\{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \text{ t.q. } \frac{p}{q}\theta_1 + b_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \frac{p}{q}\theta_2 + b_2\right\}$$

où $p, q \in \mathbf{Z}$, les translations orthogonales à ∂D_0 sont des isométries d'un voisinage de ∂D_0. Elles forment un espace de dimension un. Le théorème s'applique donc ici.

4. Esquisse de la preuve

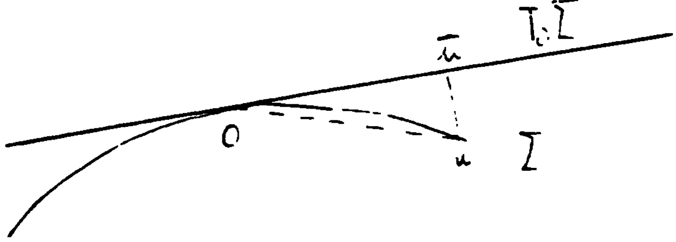
Nous allons dire deux mots de la preuve dans le cas où l'opérateur de la variation seconde de l'aire L est strictement positif.

Notons $\mathcal{A}$ la fonctionnelle définie sur $C^1(\partial D_0, \mathbf{R})$ par $\mathcal{A}(u) = \operatorname{vol}(\partial D_u)$ nous désirons donc minorer $\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(0)$, naïvement écrivons la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(0) = \mathcal{A}'(0) \cdot (u) + \int_0^1 (1-t)\mathcal{A}''_{tu}(u,u)dt.$$

Cependant u n'est pas d'intégrale nulle donc $\mathcal{A}'(0)(u) \neq 0$ et

$$\mathcal{A}''_0(u,u) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(tu) \neq \int_{\partial D_0} Lu \cdot u.$$



Pour résoudre ces difficultés, on introduit la fonctionnelle $\mathcal{V}$ définie par $\mathcal{V}(u) = \operatorname{vol}_{n+1} D_u - \operatorname{vol}_{n+1} D_0$. On a $\Sigma = \mathcal{V}^{-1}\{0\}$ et $\mathcal{V}'(0)u = \int_{\partial D_0} u$. Nous définissons alors $\overline{\mathcal{A}}(u) = \mathcal{A}(u) - k\mathcal{V}(u)$, où k est la courbure moyenne de ∂D_0. Cette fonctionnelle a les propriétés suivantes :

$$\overline{\mathcal{A}}'_0 = 0 \text{ et } \overline{\mathcal{A}}(u) = \mathcal{A}(u) \text{ si } u \in \Sigma$$
$$\text{et } \overline{\mathcal{A}}''_0(u,u) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\overline{\mathcal{A}}(tu) = \int_{\partial D_0} Luu.$$

On approche u par $\overline{u} = u - \frac{1}{\operatorname{vol}\partial D_0}\int_{\partial D_0} u \in T_0\Sigma$. On a

$$\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(0) = \overline{\mathcal{A}}(u) - \overline{\mathcal{A}}(0) = \overline{\mathcal{A}}(\overline{u}) - \overline{\mathcal{A}}(0) - \big(\overline{\mathcal{A}}(\overline{u}) - \overline{\mathcal{A}}(u)\big).$$

Nous montrons que

- $|\overline{\mathcal{A}}(\overline{u}) - \overline{\mathcal{A}}(u)| \leqslant 0(\|u\|_{C^1})\|u\|^2_{H^1}$,
- u et $\overline{u}$ ont des normes H^1 équivalentes,
- $\overline{\mathcal{A}}(\overline{u}) - \overline{\mathcal{A}}(0) \geqslant C\|\overline{u}\|^2_{H^1}$.

nous aurons montré le théorème, pour le $3^{\text{ième}}$point, on écrit

$$\overline{\mathcal{A}}(\overline{u}) - \overline{\mathcal{A}}(0) = \int_0^1 (1-t)\overline{\mathcal{A}}''_{t\overline{u}}(\overline{u},\overline{u})dt$$

par hypothèse nous avons l'existence d'une constante $C > 0$ avec

$$\overline{\mathcal{A}}''_0(v,v) \geqslant C\|v\|^2_{H^1} \text{ pour } v \in T_0\Sigma$$

pour écrire que

$$\overline{\mathcal{A}}''_{\overline{u}}(v,v) \geqslant C'\|v\|^2_{H^1} \text{ pour } v \in T_0\Sigma \quad \overline{u} \text{ voisin de } 0$$

sur $T_0\Sigma$. Il suffit de voir que l'application définie par $\overline{u} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}''_{\overline{u}}$ définie sur $T_0\Sigma$ munie de la topologie C^1 à valeurs dans l'espace des formes quadratiques sur $T_0\Sigma$ avec la topologie H^1 est continue.

Références

[B] BONNESEN T. — *Les problèmes des isopérimétres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, Paris, p. 135, 1929.

[F] FUGLEDE B. — *Stability for convex or nearly spherical domain in* $\mathbf{R}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 619–638.

G. CARRON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)