

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PIERRE BÉRARD

**Domaines plans isospectraux à la Gordon-Webb-Wolpert  
: une preuve terre à terre**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 10 (1991-1992), p. 131-142

<[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1991-1992\\_\\_10\\_\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__131_0)>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DOMAINES PLANS ISOSPECTRAUX À LA GORDON-WEBB-WOLPERT :

une preuve terre à terre

par *Pierre BÉRARD*

Dans [G-W-W], C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert construisent les premiers exemples de domaines plans isospectraux (avec les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann). Ces domaines sont obtenus à partir des exemples de P. Buser (surfaces plates à bord plongées dans  $\mathbb{R}^3$  : cf. [BU], [BD]), par quotient par une symétrie hyperplane qui “coupe ces surfaces en deux” et en fait des domaines plans (on a alors une involution sur chaque surface).

Le but de cet exposé est de donner une démonstration par “transplantation” selon les lignes de [BD]. Cette démonstration peut se faire de deux manières différentes. La première consiste à travailler sur les revêtements à deux feuillets (c’est-à-dire sur les “exemples de Buser”), et à remarquer que l’involution commute avec la transplantation des fonctions; l’autre ne fait apparaître que les domaines eux-mêmes et la manière dont ils sont construits par recollement de “briques fondamentales”.

Commençons par la seconde, quitte à introduire les matrices de transplantation de manière artificielle.

## A. TRANSPLANTATION DIRECTE.

Introduisons les deux matrices suivantes  $T^N$  et  $T^D$  (l’indice  $N$ , resp.  $D$ , se rapporte aux conditions de Neumann, resp. de Dirichlet) :

$$T^N = \begin{pmatrix} a & a & a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & a & a & b \\ a & a & b & b & b & a & a \\ a & b & b & a & a & b & a \\ b & a & b & a & a & a & b \\ b & a & a & b & a & b & a \\ b & b & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

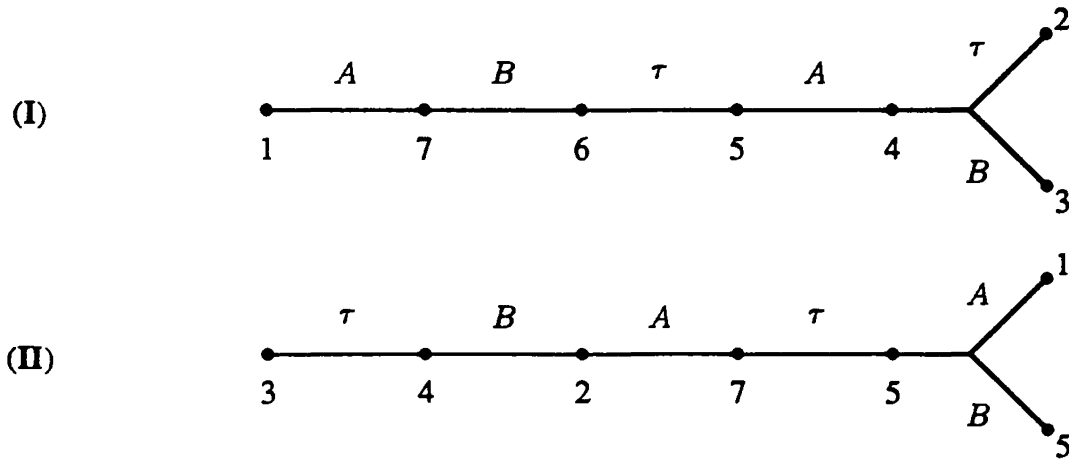
$$T^D = \begin{pmatrix} -a & a & a & -a & b & -b & b \\ a & -b & -a & b & -a & a & -b \\ a & -a & -b & b & -b & a & -a \\ -a & b & b & -a & a & -b & a \\ -b & a & b & -a & a & -a & b \\ b & -a & -a & b & -a & b & -a \\ -b & b & a & -a & b & -a & a \end{pmatrix}$$

où les nombres réels  $a$  et  $b$  sont liés par les relations

$$\begin{aligned} 4a^2 + 3b^2 &= 1, \\ 2a^2 + 4ab + b^2 &= 0, \\ 4a + 3b &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, les matrices  $T^N$  et  $T^D$  sont orthogonales (l'origine de ces matrices sera expliquée au second paragraphe).

On considère également les graphes suivants (ils diffèrent par le fait que les numéros des sommets changent et que les noms  $A$  et  $\tau$  des arêtes sont permutés).



On se donne aussi une brique fondamentale  $\mathcal{P}$  avec trois côtés privilégiés, appelés  $A$ ,  $B$ ,  $\tau$  respectivement : voir Figure 1 (cette brique correspond à la "moitié" de la brique fondamentale  $B$  de l'exemple de P. Buser mentionné plus haut).

On recolle 7 exemplaires de la brique  $\mathcal{P}$  selon la combinatoire des graphes (I) et (II) ci-dessus. On obtient ainsi les deux domaines plans  $\mathcal{D}_I$  et  $\mathcal{D}_{II}$  de la Figure 2. Soit une fonction  $\Phi$  sur  $\mathcal{D}_I$ ; on note  $\varphi_i$  ses restrictions aux 7 briques de base qui forment  $\mathcal{D}_I$  ( $i \in \{1, \dots, 7\}$ ), ce qu'on écrit :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_7 \end{pmatrix}.$$

On associe à la fonction  $\Phi$  la fonction  $\Psi = T^\clubsuit(\Phi)$ , sur  $\mathcal{D}_{II}$ , définie par :

$$\Psi = T^\clubsuit \Phi$$

où  $\clubsuit \in \{N, D\}$  selon que l'on traite le problème de Neumann ou celui de Dirichlet.

THÉORÈME .

(i) L'application  $T^N$  réalise une isométrie de l'espace  $L^2(\mathcal{D}_I)$  sur l'espace  $L^2(\mathcal{D}_{II})$  qui induit une isométrie de l'espace  $H^1(\mathcal{D}_I)$  sur l'espace  $H^1(\mathcal{D}_{II})$ ;

(ii) L'application  $T^D$  réalise une isométrie de l'espace  $L^2(\mathcal{D}_I)$  sur l'espace  $L^2(\mathcal{D}_{II})$  qui induit une isométrie de l'espace  $H_0^1(\mathcal{D}_I)$  sur l'espace  $H_0^1(\mathcal{D}_{II})$ .

COROLLAIRE . — Les domaines  $\mathcal{D}_I$  et  $\mathcal{D}_{II}$  sont isospectraux pour les Laplace de Neumann et de Dirichlet.

■ Le Corollaire est bien-sûr une conséquence immédiate de la caractérisation variationnelle des valeurs propres. Le fait que l'application  $T^\clubsuit$  soit une isométrie est une conséquence du fait que les matrices  $T^\clubsuit$  sont orthogonales; pour les espaces  $H^1$  (resp.  $H_0^1$ ), il faut vérifier que les fonctions se recollent bien (resp. que les fonctions se recollent bien et qu'elles s'annulent au bord). Si l'on note  $\psi_i^A$  la trace de  $\psi_i$  sur le bord  $A$  de la  $i$ ème brique etc... , il faut vérifier les conditions suivantes, lues sur le graphe (II).

(N) Conditions de Neumann.

Il faut vérifier les conditions de compatibilité suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_3^\tau &= \psi_4^\tau \\ \psi_4^B &= \psi_2^B \\ \psi_2^A &= \psi_7^A \\ \psi_7^\tau &= \psi_6^\tau \\ \psi_6^A &= \psi_1^A \\ \psi_6^B &= \psi_5^B\end{aligned}$$

elles garantissent que les fonctions coïncident le long des bords de recollement.

(D) Conditions de Dirichlet.

Aux conditions de compatibilité précédentes, il faut ajouter les conditions d'annulation sur le bord suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_3^A &= 0 \text{ et } \psi_3^B = 0 \\ \psi_4^A &= 0 \\ \psi_2^\tau &= 0 \\ \psi_7^B &= 0 \\ \psi_1^B &= 0 \text{ et } \psi_1^\tau = 0 \\ \psi_5^A &= 0 \text{ et } \psi_5^\tau = 0\end{aligned}$$

elles garantissent que les fonctions vérifient la condition de Dirichlet sur le bord des domaines.

Ce sont des vérifications de routine en prenant l'expression des  $\psi_i$  en fonction des  $\varphi_j$  et en utilisant les relations de compatibilité (resp. les conditions de compatibilité et d'annulation au bord) satisfaites par les  $\varphi_j$ . ■

REMARQUE. — La méthode précédente permet de prendre une brique  $\mathcal{P}$  plus générale; on peut aussi considérer une brique fondamentale hyperbolique ou sphérique, on obtient alors des domaines du plan hyperbolique ou de la sphère.

## B. ACTION DES INVOLUTIONS SUR LES EXEMPLES DE BUSER.

On appelle  $\mathcal{M}_I$  et  $\mathcal{M}_{II}$  les deux surfaces (plates à bord plongées dans  $\mathbf{R}^3$ ) construites par P. Buser. Ces surfaces, vues de dessus, sont dessinées dans les figures en fin d'exposé (la numérotation des briques est celle donnée dans [BD]; les numéros entre parenthèses se rapportent aux briques qui sont situées en-dessous). La brique  $\mathcal{B}$  se décompose en deux parties isométriques à la brique  $\mathcal{P}$  : on notera  $\mathcal{B}^u$ , resp.  $\mathcal{B}^\ell$ , la partie de  $\mathcal{B}$  qui contient les bords  $\bar{a}$  et  $b$  de  $\mathcal{B}$ , resp. les bords  $a$  et  $\bar{b}$ .

La symétrie hyperplane (dont le plan est celui de la feuille sur laquelle sont faits les dessins des figures en fin d'exposé) qui conduit au domaine  $\mathcal{D}_I$ , resp.  $\mathcal{D}_{II}$ , induit une involution  $\tau$  sur  $\mathcal{D}_I$ , resp. sur  $\mathcal{D}_{II}$ . Les identifications des briques sont résumées dans le tableau suivant :

$\tau$  agissant sur  $\mathcal{M}_I$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_1^\ell \\ \mathcal{B}_2^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_4^\ell \\ \mathcal{B}_3^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_3^\ell \\ \mathcal{B}_4^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_2^\ell \\ \mathcal{B}_5^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_6^\ell \\ \mathcal{B}_6^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_5^\ell \\ \mathcal{B}_7^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_7^\ell \end{aligned}$$

$\tau$  agissant sur  $\mathcal{M}_{II}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_1^\ell \\ \mathcal{B}_2^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_2^\ell \\ \mathcal{B}_3^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_4^\ell \\ \mathcal{B}_4^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_3^\ell \\ \mathcal{B}_5^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_5^\ell \\ \mathcal{B}_6^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_7^\ell \\ \mathcal{B}_7^u &\leftrightarrow \mathcal{B}_6^\ell \end{aligned}$$

Etant donnée une fonction  $\Phi$  sur  $\mathcal{M}_I$ , on note  $\varphi_i^u$  sa restriction à  $\mathcal{B}_i^u$ , etc... . Les conditions d'invariance ( $\varepsilon = +1$ ) ou d'anti-invariance ( $\varepsilon = -1$ ) sous l'action de l'involution  $\tau$  agissant sur  $\mathcal{M}_I$ , resp. sur  $\mathcal{M}_{II}$ , sont décrites dans le tableau suivant :

$\varepsilon$  - invariance par  $\tau$  sur  $\mathcal{M}_I$

$$\begin{aligned} \varphi_1^u &= \varepsilon \varphi_1^\ell \\ \varphi_2^u &= \varepsilon \varphi_4^\ell \\ \varphi_3^u &= \varepsilon \varphi_3^\ell \\ \varphi_4^u &= \varepsilon \varphi_2^\ell \end{aligned}$$

$\varepsilon$  - invariance par  $\tau$  sur  $\mathcal{M}_{II}$

$$\begin{aligned} \psi_1^u &= \varepsilon \psi_1^\ell \\ \psi_2^u &= \varepsilon \psi_2^\ell \\ \psi_3^u &= \varepsilon \psi_4^\ell \\ \psi_4^u &= \varepsilon \psi_3^\ell \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi_5^u = \varepsilon \varphi_6^\ell & \psi_5^u = \varepsilon \psi_5^\ell \\ \varphi_6^u = \varepsilon \varphi_5^\ell & \psi_6^u = \varepsilon \psi_7^\ell \\ \varphi_7^u = \varepsilon \varphi_7^\ell & \psi_7^u = \varepsilon \psi_6^\ell \end{array}$$

(voir les figures en fin d'exposé).

D'après [BD], on dispose d'un opérateur de transplantation des fonctions de  $\mathcal{M}_I$  sur celles de  $\mathcal{M}_{II}$  donné par :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_7 \end{pmatrix} = T \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_7 \end{pmatrix}$$

avec la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} a & a & a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & a & a & b \\ a & a & b & b & b & a & a \\ a & b & b & a & a & b & a \\ b & a & b & a & a & a & b \\ b & a & a & b & a & b & a \\ b & b & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

qui est la matrice de l'opérateur d'entrelacement des représentations de permutation de  $G$  sur  $G/H$  et  $G/K$  (où  $(G; H, K)$  est le triplet de Sunada qui sert à construire les exemples de P. Buser). La détermination explicite de cette matrice  $T$  résulte des relations simples qui existent entre ses éléments (cf. [BD]).

**PROPOSITION.** — *Si la fonction  $\Phi$  est  $\varepsilon$ -invariante sous l'action de  $\tau$ , il en est de même pour la fonction  $\Psi = T\Phi$ , autrement dit, l'opérateur de transplantation commute avec les involutions  $\tau$  sur  $\mathcal{M}_I$  et  $\mathcal{M}_{II}$  respectivement.*

■ Il suffit d'écrire les  $\psi_i$  en fonction des  $\varphi_i$  et de la matrice  $T$ , puis de vérifier les conditions de  $\varepsilon$ -invariance par  $\tau$  sur  $\mathcal{M}_{II}$  supposant vérifiées celles sur  $\mathcal{M}_I$ . Ainsi, par exemple, on écrit

$$\psi_1 = a(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + b(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7)$$

et on vérifie que  $\psi_1^u = \varepsilon \psi_1^\ell$  comme indiqué dans le tableau ci-dessus. ■

**COROLLAIRE.** — *Les domaines  $\mathcal{D}_I$  et  $\mathcal{D}_{II}$  sont isospectraux pour le Laplacien de Neumann et pour le Laplacien de Dirichlet.*

■ Il suffit de considérer la transplantation opérant sur les fonctions  $L^2$  et  $H^1$  qui sont  $\tau$ -invariantes (problème de Neumann) ou sur les fonctions de  $L^2$  et  $H_0^1$  qui sont  $\tau$ -anti-invariantes (problème de Dirichlet). ■

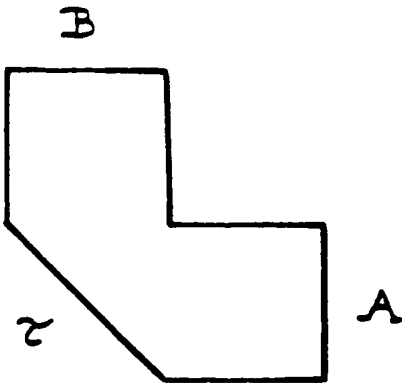
**REMARQUE.** — *La matrice  $T^D$  du paragraphe A tient compte des changements de signe dus à l'anti-invariance sur  $\mathcal{M}_I$  (changements de signes dans les colonnes) ou sur  $\mathcal{M}_{II}$  (changements de signes dans les lignes).*

Plus précisément, la brique  $\mathcal{P}$  correspondant à la partie  $\mathcal{B}^u$  de la brique  $\mathcal{B}$ , on peut voir le domaine  $\mathcal{D}_I$  (resp.  $\mathcal{D}_{II}$ ) comme fabriqué avec  $\mathcal{B}_1^u, \mathcal{B}_2^l, \mathcal{B}_3^l, \mathcal{B}_4^u, \mathcal{B}_5^l, \mathcal{B}_6^u, \mathcal{B}_7^l$  (resp. avec  $\mathcal{B}_1^l, \mathcal{B}_2^u, \mathcal{B}_3^u, \mathcal{B}_4^l, \mathcal{B}_5^u, \mathcal{B}_6^l, \mathcal{B}_7^u$ ); ceci correspond aux changements de signes dans les colonnes 2, 3, 5, 7 et dans les lignes 1, 4, 5, 7. On passe ainsi de la matrice  $T$  (ou  $T^N$ ) ci-dessus à la matrice  $T^D$ .

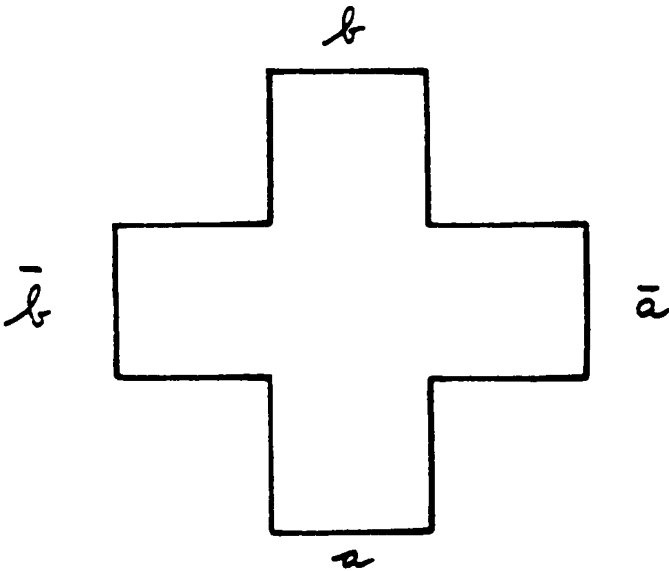
### Bibliographie

- [BD] BÉRARD P. — Transplantation et Isospectralité I, Séminaire Théorie Spectrale et Géométrie 90-91 Institut Fourier 1991.
- [BU] BUSER P. — *Cayley graphs and planar isospectral domains*, Proc. Taniguchi Symp. "Geometry and Analysis on manifolds", Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, New York 1339 (1988), 64-77.
- [G-W-W] GORDON C.S., WEBB D., WOLPERT S. — One can't hear the shape of a drum, Annonce de Recherche 1991.

Pierre BÉRARD  
 Institut Fourier  
 UNIVERSITÉ GRENOBLE I  
 B.P.74  
 38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex  
 (France)  
 PBERARD@FRGREN81.Bitnet



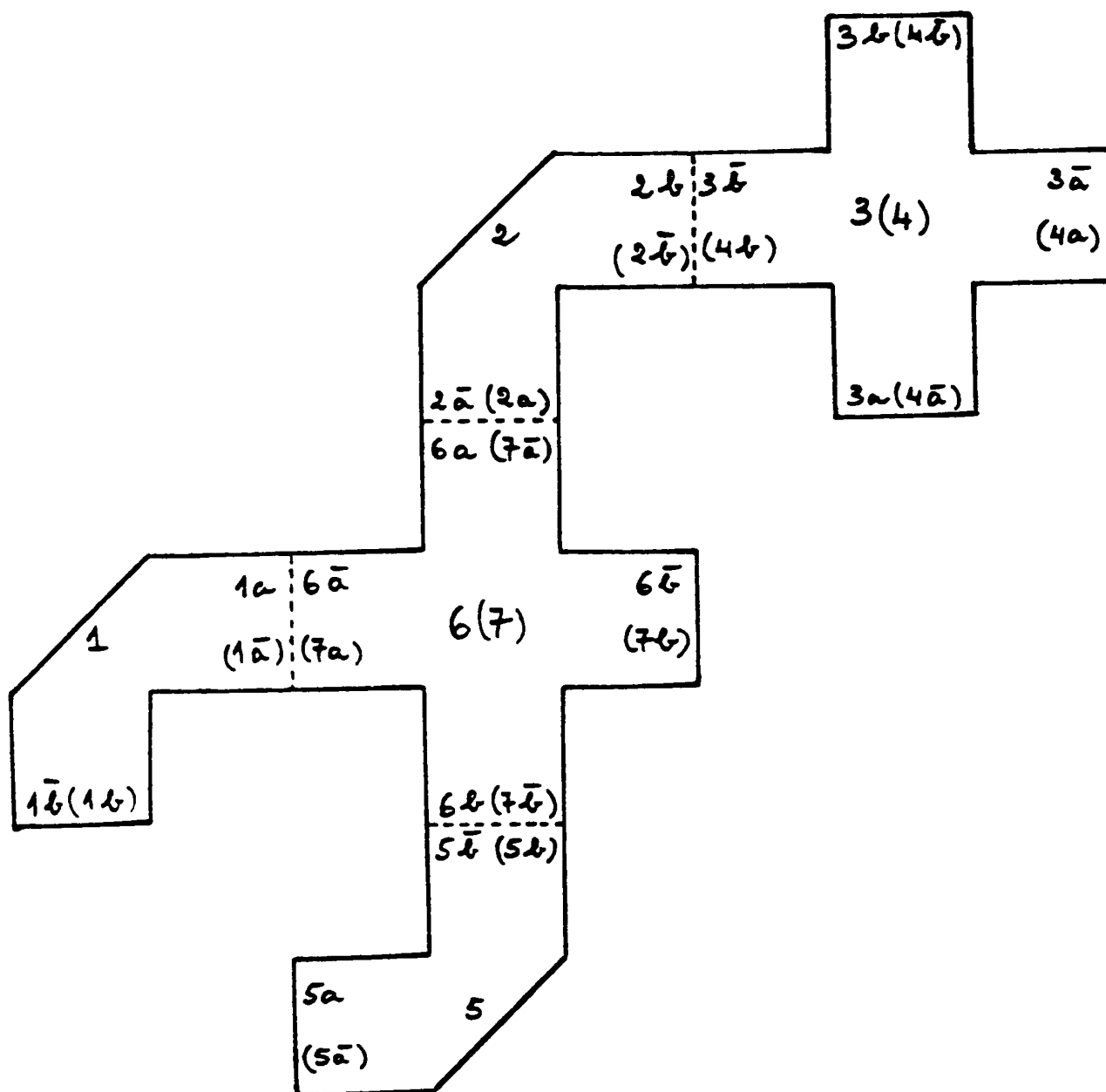
Brique  $\mathcal{P}$

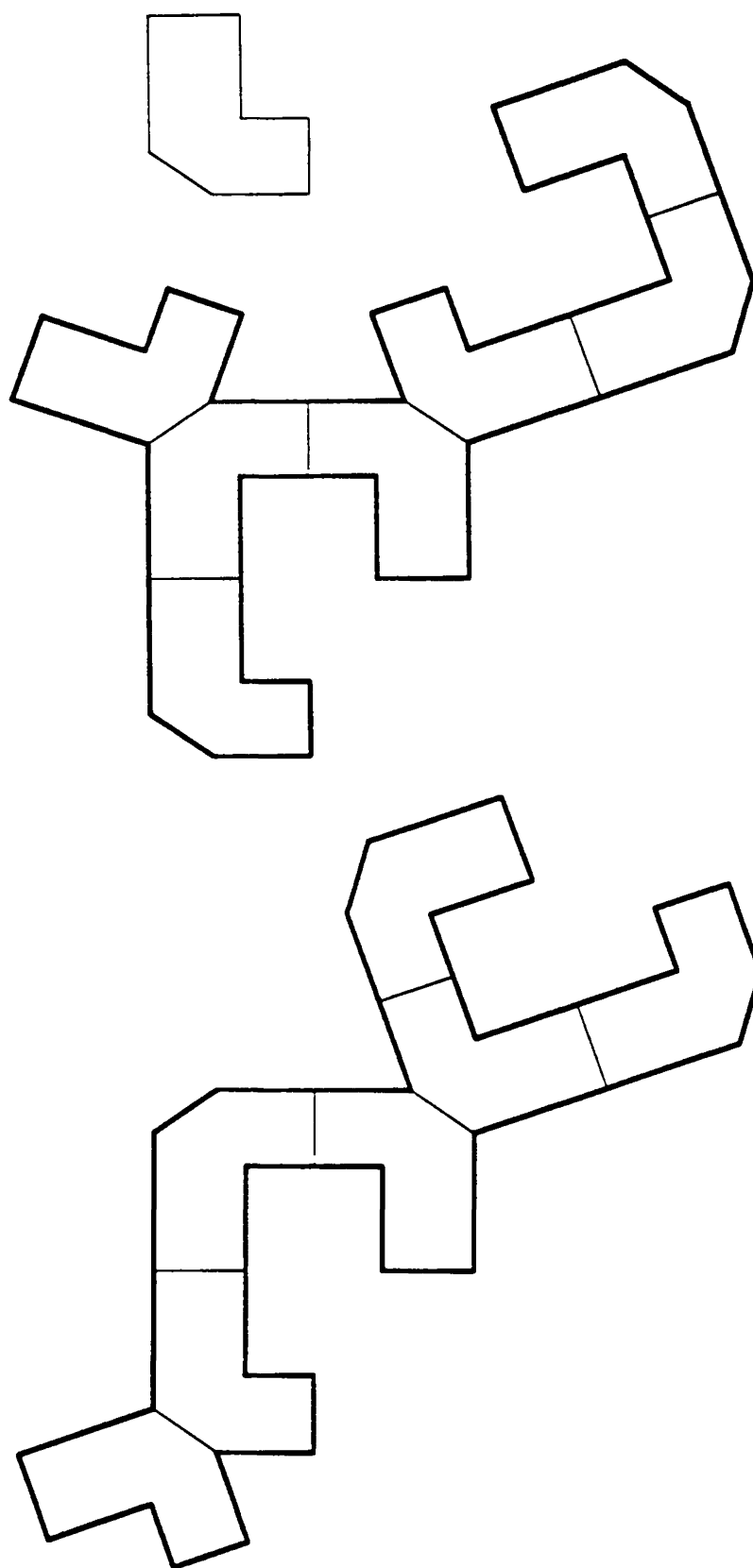


Brique  $\mathcal{B}$

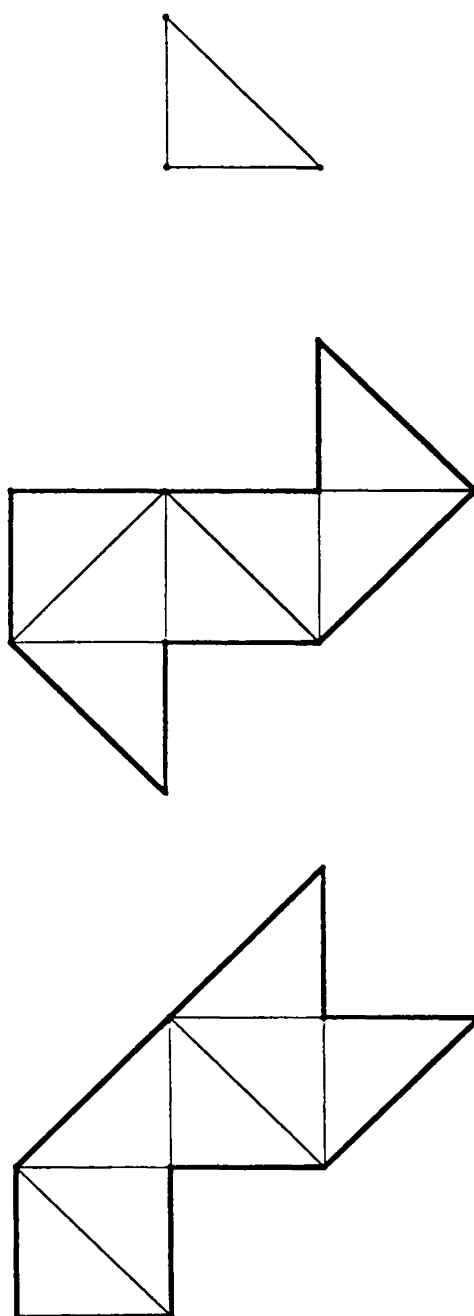




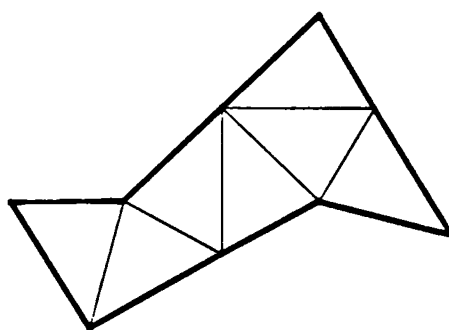
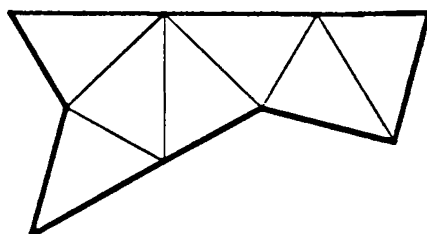
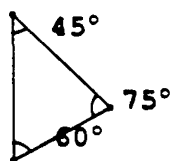

 Domaine  $\mathcal{D}_{II}$



Domaines plans isospectraux, d'après Gordon, Webb, Wolpert (Bull. Amer. Math. Soc. 1992); les domaines sont faits de 7 briques de base, toutes identiques, mais avec des combinaisons différentes.



Domaines plans ayant mêmes fréquences de vibrations (dûs à Conway-Doyle et Buser-Semmler, à la suite de travaux de Gordon, Webb, Wolpert: Bulletin American Mathematical Society, 1992 à paraître).  
Les deux domaines sont faits de sept briques de base (triangle rectangle isocèle), avec des combinaisons différentes.



Domaines plans ayant mêmes fréquences de vibrations (dûs à Conway-Doyle et Buser-Semmler, à la suite des travaux de Gordon-Webb-Wolpert: Bulletin American Mathematical Society, à paraître 1992).

Les deux domaines sont faits à partir de sept briques de base (triangle d'angles  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $75^\circ$ ), avec deux combinaisons différentes.