

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PIERRE BÉRARD

Transplantation et isospectralité II

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 177-188

[<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__177_0>](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__177_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSPLANTATION ET ISOSPECTRALITÉ II

par *Pierre BÉRARD*

I. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

Soit N une variété riemannienne fermée. Soit Δ le laplacien agissant sur les fonctions C^∞ . Le spectre du Laplacien est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies, appelée *spectre de la variété riemannienne N*

$$\text{Spec } N = \{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow +\infty\}.$$

Deux variétés riemanniennes isométriques ont bien sûr le même spectre – elles sont *isospectrales* – et une question naturelle qui se pose est de savoir si deux variétés isospectrales sont toujours isométriques. La réponse, on le sait, est non : il existe des couples de variétés riemanniennes isospectrales, non isométriques. Des exemples sporadiques de tels couples ont été donnés par J. Milnor (1964 : tores plats), M.F. Vignéras (1978 : variétés hyperboliques) et A. Ikeda (1980 : espaces lenticulaires). A partir de 1984, sont apparues des *constructions systématiques* (C. Gordon et E. Wilson : déformations isospectrales non triviales de variétés de dimension > 1 ; T. Sunada : couples de variétés isospectrales non isométriques), ... voir [BD 1] pour plus de détails. Le prototype des résultats obtenus est le théorème suivant, dû à T. Sunada ([SU]) :

1. THÉORÈME. — Soit N une variété riemannienne sur laquelle un groupe fini G opère à gauche isométriquement. On suppose donnés deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 de G qui opèrent sur N sans points fixes et qui vérifient la condition

$$(S) \quad \forall g \in G, \#(\{g\}_G \cap \Gamma_1) = \#(\{g\}_G \cap \Gamma_2)$$

(ici $\#A$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A ; $\{g\}_G$ désigne la classe de conjugaison de g dans G). Alors, les quotients riemanniens $\Gamma_1 \backslash N$ et $\Gamma_2 \backslash N$ (avec les métriques obtenues par passage au quotient) sont isospectraux.

D. DeTurck et C. Gordon ([D-G]) ont étendu la construction de T. Sunada à des situations plus générales : ils considèrent G un groupe de Lie unimodulaire qui agit

isométriquement sur une variété riemannienne complète M et des sous-groupes Γ_1, Γ_2 , discrets, uniformes dans G , qui opèrent librement et proprement discontinûment sur M . La condition (S) du Théorème 1 ci-dessus est remplacée par la condition suivante ([D-G], Formule (1.17), p. 1073)

$$(DG) \quad \forall g \in G, \quad r(G, \Gamma_1; g) = r(G, \Gamma_2; g)$$

avec $r(G, \Gamma; g) := \sum_{\{\gamma\} \in C\{\Gamma\} \setminus C\{g\}} \rho^{(\gamma)}(C(\gamma, \Gamma) \setminus C(\gamma, G))$, où $\rho^{(\gamma)}$ est une mesure ad hoc,

dont l'existence résulte du fait que le groupe $C(\gamma, G)$ est lui-même unimodulaire ([D-G], p. 1069 à 1072). Quand G est fini, $\rho^{(\gamma)}$ est la mesure de comptage et on retrouve la condition (S) de T. Sunada ([D-G], Formule (1.21), p. 1074).

Il est facile de voir que la condition (S) du théorème de T. Sunada traduit exactement l'équivalence des représentations de permutation du groupe fini G sur les quotients $\Gamma_1 \backslash G$, resp. $\Gamma_2 \backslash G$ ([BD 2]). On peut donc se demander : la condition (DG) ci-dessus traduit-elle l'équivalence des représentations quasi-régulières R_i de G dans $L^2(\Gamma_i \backslash G)$? La réponse est positive :

2. PROPOSITION. — Les sous-groupes discrets uniformes Γ_1 et Γ_2 de G vérifient la condition (DG) ci-dessus si et seulement si les représentations quasi-régulières R_1 et R_2 sont équivalentes.

Ceci étant acquis, il est naturel de se demander si l'isospectralité des variétés $\Gamma_1 \backslash M$ et $\Gamma_2 \backslash M$ ([D-G], Theorem 1.16, p. 1072) résulte de l'existence d'un opérateur de transplantation, comme c'est le cas pour les variétés isospectrales construites avec le Théorème de T. Sunada (cf. [BD 2]).

3. THÉORÈME. — Soit G un groupe de Lie unimodulaire qui agit isométriquement sur une variété riemannienne complète (M, m) . Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets uniformes de G qui agissent sur M librement et proprement discontinûment. Si les sous-groupes Γ_1 et Γ_2 vérifient la condition (DG) ci-dessus, il existe un opérateur de transplantation, c'est-à-dire une isométrie T de $L^2(\Gamma_1 \backslash M, dv_m)$ sur $L^2(\Gamma_2 \backslash M, dv_m)$ qui induit une isométrie de $H^k(\Gamma_1 \backslash M, m)$ sur $H^k(\Gamma_2 \backslash M, m)$, pour tout entier k (espaces de Sobolev construits avec les dérivées covariantes successives et les normes ad hoc). En particulier, les variétés $(\Gamma_1 \backslash M, m)$ et $(\Gamma_2 \backslash M, m)$ sont isospectrales.

4. REMARQUE. — En fait, la même méthode montre que les variétés ci-dessus sont fortement isospectrales au sens de [D-G]; en particulier, elles sont p -isospectrales (c'est-à-dire isospectrales pour les Laplaciens agissant sur les p -formes différentielles). Il est facile de voir, également, que la démonstration donnée dans le § III reste valable même si les groupes Γ_i n'agissent pas librement (le quotient est alors un "orbifold").

Dans le § IV, nous illustrons le Théorème 3 dans le cas où G est le groupe d'isométrie de $\mathbb{R}^n$ (resp. du groupe de Heisenberg H_n muni d'une métrique invariante à gauche) et où les sous-groupes Γ_i sont des sous-groupes discrets uniformes de $\mathbb{R}^n$ (resp. H_n).

5. HYPOTHÈSES. — Dans tout le reste de l'article, nous désignerons par G un groupe de Lie unimodulaire qui opère à gauche, par isométries, sur une variété riemannienne complète (M, m) . Nous désignerons génériquement par Γ un sous-groupe discret uniforme (i.e. discret co-compact) de G qui agit de façon *libre et proprement discontinue* sur M avec un quotient $\Gamma \backslash M$ compact (cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire dans l'Appendice).

Je remercie J.P. Labesse pour son aide à propos de la Proposition 2 ([LA]).

II. PREUVE DE LA PROPOSITION 2

Désignons par R_1 (resp. R_2) la représentation quasi-régulière de G sur $L^2(\Gamma_1 \backslash G)$ (resp. $L^2(\Gamma_2 \backslash G)$). Pour $\varphi \in C_0^\infty(G)$ on introduit aussi les opérateurs $R_i(\varphi)$, définis par

$$(1) \quad (R_i(\varphi)f)(x) := \int_G \varphi(g)f(x \cdot g)dg$$

pour $f \in L^2(\Gamma_i \backslash G)$, $x \in \Gamma_i \backslash G$. Les opérateurs $R_i(\varphi)$ sont à trace ([J-L]).

Si les représentations R_1 et R_2 sont équivalentes, on a bien sûr $\text{Trace } R_1(\varphi) = \text{Trace } R_2(\varphi)$ pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Il résulte du lemme de la page 495 de [J-L], que la réciproque est vraie. Pour examiner l'équivalence éventuelle des représentations R_i , il suffit donc de considérer l'égalité des $\text{Trace } R_i(\varphi)$. Il résulte des calculs faits dans [D-G] que l'on a, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(G)$,

$$\text{Trace } R_i(\varphi) = \sum_{\{h\}_G \in \{G\}} \sum_{\{\gamma\} \in C\{\gamma\}_G} \rho^{(\gamma)}(C(\gamma, \Gamma) \backslash C(\gamma, G)) \int_{C(h, G) \backslash G} \varphi(x^{-1}hx)dx$$

où $\{h\}_G$ désigne la classe de conjugaison de $h \in G$, $\{G\}$ l'ensemble de ces classes, etc.

Il résulte immédiatement de cette formule que la condition (DG) du § I implique l'égalité des traces.

Remarque. — La mesure $\rho^{(\gamma)}$ qui apparaît dans la définition de $r(G, \Gamma; g)$ est bien définie parce que $\{g\}_G$ contient un élément de Γ (cf. [D-G] p. 1069). Si ce n'est pas le cas, $r(G, \Gamma; g)$ vaut 0 par définition.

2. LEMME. — Pour tout ouvert relativement compact Ω de G , l'ensemble $A_\Omega = \{\{\gamma\}_G \mid \gamma \in \Gamma \text{ et } \{\gamma\}_G \cap \Omega \neq \emptyset\}$ est fini.

Preuve. — Comme Γ est uniforme dans G , on peut écrire $G = \Gamma D$, avec D relativement compact dans G . Si $x \in G$ est tel que $x^{-1}\gamma x \in \Omega$, on écrit $x = \gamma_1 \delta$, avec $\gamma_1 \in \Gamma$ et $\delta \in D$ et donc, $\gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1 \in D\Omega D^{-1}$, qui est relativement compact dans G , donc $\gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1 \in D\Omega D^{-1} \cap \Gamma$ qui est fini. ■

Soit $\gamma_0 \in \Gamma$. On choisit Ω_0 , un voisinage ouvert relativement compact de γ_0 . Comme $\{\gamma_0\}_G \in A_{\Omega_0}$ qui est fini, on peut trouver une fonction positive ou

nulle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ telle que $\varphi(\gamma_0) = 1$ et $\text{Supp } \varphi \cap \{\gamma\}_G = \emptyset$ dès que $\{\gamma\}_G \neq \{\gamma_0\}_G$, $\gamma \in \Gamma$. On a alors,

$$\text{Trace } R_i(\varphi) = r(G, \Gamma_i; \gamma_0) \int_{C(\gamma_0, G) \setminus G} \varphi(x^{-1} \gamma_0 x) dx$$

où l'intégrale est strictement positive à cause du choix de φ . Ceci démontre que la connaissance de $\text{Trace } R_i(\varphi)$ détermine les $r(G, \Gamma_i, g)$. ■

III. PREUVE DU THÉORÈME 3

1. Dans toute la suite, on suppose que la variété $\Gamma \backslash M$ est compacte; on suppose également, pour simplifier, que la mesure de Haar bi-invariante dg de G , est choisie de telle sorte que $\text{Vol}(\Gamma \backslash G) = 1$.

Le groupe G agit sur $M_1 := M \times \Gamma \backslash G$ par $a \cdot (x, \bar{g}) := (a^{-1} \cdot x, \overline{ga})$ où $\bar{a}$ désigne la classe de $a \in G$ dans $\Gamma \backslash G$. En fait, on peut montrer que G agit proprement sur M_1 et que le quotient est homéomorphe à $\Gamma \backslash M$.

2. PROPOSITION. — Sous les hypothèses faites sur G et M , il existe une fonction $\theta \in C_0^\infty(M)$, $\theta \geq 0$, telle que pour tout $x \in M$, $\int_G \theta(g \cdot x) dg = 1$.

Preuve. — Voir Appendice, Proposition 6. ■

Dans ce qui suit, on notera encore θ la fonction θ , vue comme élément de $C_0^\infty(M_1)$; elle vérifie l'identité $\forall \xi = (x, \bar{a}) \in M_1$, $\int_G \theta(g \cdot \xi) dg = 1$.

3. NOTATIONS. — On pose $\mathcal{L}_0 = L_{\text{loc}}^2(M_1)$ et on note $\mathcal{L}_0^G$ le sous-espace de $\mathcal{L}_0$ des fonctions invariantes par l'action de G sur M_1 .

On munit $\mathcal{L}_0$ des semi-normes $p_\theta(f) = \left(\int_{M_1} \theta(x) f^2(x, \bar{a}) dx d\bar{a} \right)^{\frac{1}{2}}$ et $p_\Omega(f) = \left(\int_{\Omega \times \Gamma \backslash G} f^2(x, \bar{a}) dx d\bar{a} \right)^{\frac{1}{2}}$ (où Ω est un ouvert relativement compact de M).

4. LEMME. — Si $\text{Supp } \theta \subset \Omega \subset M$, les semi-normes p_θ et p_Ω sont équivalentes sur $\mathcal{L}_0^G$. De plus, si θ_1 et θ_2 sont toutes deux données par la Proposition 2, alors les semi-normes p_{θ_1} et p_{θ_2} sont égales. La semi-norme p_θ définit une norme sur $\mathcal{L}_0^G$.

Preuve. — Il est clair qu'il existe une constante C telle que $p_\theta \leq Cp_\Omega$. Soit

f une fonction sur M_1 . On peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \Gamma \backslash G} f^2(\xi) d\xi &= \int_{M_1} \mathbf{1}_\Omega(\xi) f^2(\xi) d\xi = \int_{M_1 \times G} \mathbf{1}_\Omega(x) f^2(x, \bar{a}) \theta(g \cdot x) dg dx d\bar{a} \\ &= \int_{M_1 \times G} \mathbf{1}_\Omega(g^{-1} \cdot y) f^2(g \cdot (y, \bar{a} \cdot g^{-1})) \theta(y) dg dy d\bar{a} \\ &= \int_{M \times \Gamma \backslash G \times G} \mathbf{1}_\Omega(g^{-1} \cdot y) f^2(y, \bar{b}) \theta(y) dg dy d\bar{b} \end{aligned}$$

en effet, G opère par isométries sur M , f et $d\bar{a}$ sont G -invariantes. Reste à montrer que l'intégrale $\int_G \mathbf{1}_\Omega(g^{-1} \cdot y) dg$ peut se majorer indépendamment de $y \in \Omega$. Cela résulte du fait que l'ensemble $\{g \in G \mid g \cdot \Omega \cap \Omega \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G (Appendice, Lemme 3).

La suite se démontre de manière analogue. ■

5. LEMME. — Si $f \in \mathcal{L}_0^G$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}^G$ de fonctions continues, G -invariantes sur M_1 , telles que $p_\theta(f - f_n)$ tende vers 0 quand n tend vers ∞ .

Preuve. — On choisit une fonction θ comme ci-dessus. Comme $f \in \mathcal{L}_0$, il existe une suite de fonctions continues φ_n sur M_1 telle que $p_\theta(f - \varphi_n)$ tende vers 0. On considère alors les fonctions sur M_1 définies par $f_n(x) = \int_G \theta(g \cdot x) \varphi_n(g \cdot x) dg$. Si le point x varie dans un compact $K \subset M_1$, l'intégration ci-dessus a lieu sur une partie relativement compacte de G (Appendice, Lemme 3) et l'on en déduit que $f_n \in \mathcal{C}^G$. On peut alors écrire : $f(x) - f_n(x) = \int_G \theta(g \cdot x) (f(g \cdot x) - \varphi_n(g \cdot x)) dg$ puisque $f \in \mathcal{L}^G$, d'où l'on déduit $|f(x) - f_n(x)|^2 \leq \int_G \theta(g \cdot x) |f(g \cdot x) - \varphi_n(g \cdot x)|^2 dg$ puis, par intégration contre θdx , $p_\theta(f - f_n) \leq p_\theta(f - \varphi_n)$. ■

6. PROPOSITION. — L'espace $L^2(\Gamma \backslash M)$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{L}_0^G$ muni de la norme p_θ introduite ci-dessus.

Preuve. — D'après le lemme précédent, il suffit de considérer des fonctions continues. Soit f une fonction continue sur $\Gamma \backslash M$. On peut la voir comme une fonction continue sur M , Γ -invariante. On considère alors la fonction définie par : $F(x, g) := f(g \cdot x)$. C'est une fonction continue sur $M \times G$ qui passe au quotient en une fonction continue (encore notée F) sur $M \times \Gamma \backslash G$. On a alors : $F(g \cdot (x, \bar{a})) = F(g^{-1} \cdot x, \bar{a}g) = f(agg^{-1} \cdot x)$, d'où l'on déduit que $F \in \mathcal{C}^G(M_1)$.

Réciproquement, si $F \in \mathcal{C}^G(M_1)$, la fonction définie par : $f(x) = F(x, \overline{1_G})$ est continue sur M et Γ -invariante. On vérifie immédiatement que les applications ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. On a donc une bijection $\mathcal{B}$ entre les fonctions continues sur $\Gamma \backslash M$ et les fonctions continues G -invariantes sur M_1 .

Si l'on applique la Proposition 2 ci-dessus au couple (Γ, M) , on obtient une fonction $\sigma \in C_0^0(M)$, $\sigma \geq 0$, telle que $\sum_\Gamma \sigma(\gamma \cdot x) = 1$, pour tout x . Pour $x \in M$, et pour tout $g \in G$, posons $\sigma_x(g) = \sigma(g \cdot x)$. Alors (Appendice, Lemme 4), $\sigma_x \in C_0^0(G)$, et $\sum_\Gamma \sigma_x(\gamma g) = 1$, pour tout $g \in G$.

Pour toute fonction continue sur $\Gamma \backslash M$, vue comme fonction Γ -invariante sur

M , on a $\int_{\Gamma \backslash M} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_M \sigma(x) f(x) dx$. On a un résultat analogue pour les fonctions continues sur $\Gamma \backslash G$, en remplaçant σ par l'une quelconque des fonctions σ_x . Soit maintenant F la fonction continue sur M_1 , G -invariante, qui correspond à la fonction $f : F = B(f)$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} p_\theta(F)^2 &= \int_{M_1} F^2(x, \bar{g}) \theta(x) dx d\bar{g} = \int_M \left(\int_G F^2(x, g) \sigma_x(g) dg \right) \theta(x) dx \\ &= \int_{M \times G} \theta(x) \sigma(g \cdot x) f^2(g \cdot x) dx dg = \left(\int_M f^2(y) \sigma(y) \left(\int_G \theta(g^{-1} \cdot y) dg \right) dy \right) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité des normes L^2 de f et de F . ■

7. NOTATIONS. — On considère maintenant les semi-normes suivantes sur $C^\infty(M_1)$:

$$q_\Omega(f) = \left(\int_{\Omega \times \Gamma \backslash G} (f^2(x, \bar{a}) + |\partial_x f(x, \bar{a})|^2) dx d\bar{a} \right)^{1/2}, \text{ et}$$

$$q_\theta(f) = \left(\int_{M_1} (f^2(x, \bar{a}) + |\partial_x f(x, \bar{a})|^2) \theta(x) dx d\bar{a} \right)^{1/2}$$

où Ω est un ouvert relativement compact de M , où θ est une fonction donnée par la Proposition 2 ci-dessus, et où $\partial_x f(x, \bar{a})$ désigne la différentielle partielle, par rapport à la première variable, de la fonction f sur $M_1 = M \times \Gamma \backslash G$.

On désigne par $\mathcal{L}_1$ (ou encore par $H_{1, \text{loc}}^1(M_1)$) le complété de $C^\infty(M_1)$ pour les semi-normes q_Ω quand Ω parcourt l'ensemble des ouverts relativement compacts de M (c'est un espace de Sobolev "partiel" par rapport à la première variable). On note $\mathcal{L}_1^G$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_1$ qui sont invariants sous l'action de G sur M_1 .

Les résultats ci-dessous sont les analogues, pour $\mathcal{L}_1$, des résultats obtenus précédemment pour $\mathcal{L}_0$ (les démonstrations suivent essentiellement les mêmes lignes).

8. LEMME. — Si $\text{Supp } \theta \subset \Omega \subset M$, les semi-normes q_θ et q_Ω sont équivalentes sur $\mathcal{L}_1^G$. De plus, si θ_1 et θ_2 sont toutes deux données par la Proposition 2, alors les semi-normes q_{θ_1} et q_{θ_2} sont égales. La semi-norme q_θ définit une norme sur $\mathcal{L}_1^G$.

9. LEMME. — Si $f \in \mathcal{L}_1^G$, il existe une suite $\varphi_n \in C^\infty(M_1)^G$ (fonctions C^∞ sur M_1 , invariantes par G) telle que $q_\theta(f - \varphi_n)$ tende vers 0 quand n tend vers ∞ .

10. PROPOSITION. — L'espace $H^1(\Gamma \backslash M)$ est canoniquement isométrique à l'espace $\mathcal{L}_1^G$ muni de la norme q_θ définie ci-dessus.

Preuve. — On voit facilement que l'application B (définie dans la preuve de la Proposition 6) réalise une bijection de $C^\infty(\Gamma \backslash M)$ sur $C^\infty(M_1)^G$ qui préserve les normes H^1 . ■

11. Il résulte du théorème de Fubini que l'espace $\mathcal{L}_0$ (resp. $\mathcal{L}_1$) est isomorphe à l'espace $L_{\text{loc}}^2(M, L^2(\Gamma \backslash G))$ (resp. $H_{\text{loc}}^1(M, L^2(\Gamma \backslash G))$), via l'application donnée par

$\Phi(f) := \{x \longrightarrow f(x, \cdot)\}.$

Définissons une action A de G sur $L^2_{\text{loc}}(M, L^2(\Gamma \backslash G))$ par $(A(g) \cdot \varphi)(x) = R(g) \cdot (\varphi(g^{-1} \cdot x))$, où R désigne la représentation quasi-régulière de G sur $L^2(\Gamma \backslash G)$. On a alors : $(A(g) \cdot \Phi(f))(x)(\bar{a}) = R(g)(\Phi(f)(g^{-1} \cdot x))(\bar{a}) = f(g^{-1} \cdot x, \bar{a} \cdot g)$. Il en résulte que l'isomorphisme ci-dessus commute aux actions de G .

Fin de la preuve du Théorème I.3. — Il suffit d'appliquer ce qui précède et de remarquer que si les représentations quasi-régulières R_i de G sur les $L^2(\Gamma_i \backslash G)$ sont équivalentes, il existe une isométrie $T : L^2(\Gamma_1 \backslash G) \longrightarrow L^2(\Gamma_2 \backslash G)$ qui entrelace les R_i . Cette isométrie réalise une transplantation de $L^2_{\text{loc}}(M, L^2(\Gamma_1 \backslash G))^G$ sur $L^2_{\text{loc}}(M, L^2(\Gamma_2 \backslash G))^G$ et donc, d'après ce qui précède, une transplantation de $L^2(\Gamma_1 \backslash M)$ sur $L^2(\Gamma_2 \backslash M)$. Cette transplantation induit également une isométrie au niveau des espaces de Sobolev H^1 . ■

IV. DEUX EXEMPLES

Dans ce paragraphe, nous donnons deux illustrations du Théorème I.3 dans un cadre maintenant classique : tores plats et variétés de Heisenberg.

A) Cas des tores plats.

On munit $\mathbf{R}^n$ de la structure euclidienne usuelle et on considère son groupe d'isométries $G = \mathbf{R}^n \rtimes O(n)$, produit semi-direct de $\mathbf{R}^n$ et de $O(n)$ ($(x, A) \cdot (y, B) = (x + Ay, AB)$). On peut identifier un réseau Γ de $\mathbf{R}^n$ à un sous-groupe discret uniforme de G par $\Gamma \ni \gamma \rightarrow (\gamma, Id) \in G$. On a alors le

1. THÉORÈME. — Soient Γ_1 et Γ_2 deux réseaux de $\mathbf{R}^n$.

(i) Les représentations quasi-régulières de $\mathbf{R}^n$ sur $L^2(\Gamma_i \backslash \mathbf{R}^n)$ sont unitairement équivalentes si et seulement si $\Gamma_1 = \Gamma_2$;

(ii) Les représentations quasi-régulières du groupe d'isométries G de $\mathbf{R}^n$ sur $L^2(\Gamma_i \backslash G)$ sont unitairement équivalentes si et seulement si les tores plats $\Gamma_1 \backslash \mathbf{R}^n$ et $\Gamma_2 \backslash \mathbf{R}^n$ sont isospectraux.

Preuve. — L'assertion (i) est évidente : par décomposition en séries de Fourier, les deux représentations sont équivalentes si et seulement si les réseaux duals Γ_1^* et Γ_2^* sont égaux, d'où $\Gamma_1 = \Gamma_2$;

L'assertion (ii) est démontrée par D. DeTurck et C. Gordon ([D-G], Exemples 1.20 (ii), p. 1074) par vérification de la condition (DG) du §I. On peut en donner une démonstration directe en décomposant la représentation quasi-régulière R de G sur $L^2(\Gamma \backslash G)$ quand Γ est un réseau de $\mathbf{R}^n$. On remarque que le tore $\Gamma \backslash \mathbf{R}^n$ agit à gauche

sur $\Gamma \backslash G$; on en déduit la décomposition orthogonale (séries de Fourier) :

$$L^2(\Gamma \backslash G) = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma^*} \mathcal{H}_\lambda, \text{ avec}$$

$$\mathcal{H}_\lambda = \{f \in L^2 \mid f((t, Id) \cdot (\bar{x}, A)) = e^{2i\pi(\lambda, \tau)} f(\bar{x}, A)\}$$

et la représentation quasi-régulière R laisse les $\mathcal{H}_\lambda$ invariants. Il est facile de voir que la restriction de R à $\mathcal{H}_\lambda$ est équivalente à la représentation ρ_λ de G dans $L^2(O(n))$ donnée par :

$$(\rho_\lambda(\tau, \alpha)f)(A) = e^{2i\pi(\lambda, A(\tau))} f(A\alpha).$$

LEMME. — Pour λ et $\mu \in \mathbf{R}^n$, les représentations ρ_λ et ρ_μ sont

(i) équivalentes si $\|\lambda\| = \|\mu\|$;

(ii) étrangères sinon.

La preuve du lemme n'est pas difficile. L'assertion (i) est claire; pour l'assertion (ii), on prend le Laplacien de la fonction $t \rightarrow \rho_\lambda(t, Id)f$, pour $f \in L^2(O(n))$ et on peut conclure. ■

B) Cas des variétés de Heisenberg.

On désigne par H_n le groupe de Heisenberg de dimension $(2n+1)$. On appelle *variété de Heisenberg* toute variété de la forme $(\Gamma \backslash H_n, g)$ où la métrique g se remonte en une métrique invariante à gauche sur H_n et où Γ est un sous-groupe discret uniforme de H_n . C. Gordon a montré ([G] Proposition 2.16, p. 86) qu'il suffit de se limiter aux variétés de Heisenberg "de type T " c'est-à-dire aux variétés $(\Gamma \backslash H_n, g)$ pour lesquelles la métrique g est représentée par une matrice diagonale de la forme $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, 1)$ dans la base canonique de l'algèbre de Lie de H_n et pour lesquelles $\Gamma = \{\gamma(x, y, t) : (x, y) \in \mathcal{L} \text{ et } t \in c\mathbf{Z}\}$ où $c \in \mathbf{R}_+^*$ et où $\mathcal{L}$ est un réseau de $\mathbf{R}^{2n}$ tel que pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathcal{L}$ on ait $\langle x, y' \rangle \in c\mathbf{Z}$ (le produit scalaire usuel de x et y' dans $\mathbf{R}^n$; cette condition garantit que Γ est bien un sous-groupe). Un tel groupe Γ est l'image par un automorphisme de H_n d'un groupe de type Γ_r unique avec $r = \{r_1, \dots, r_n\}$ où les entiers naturels r_i vérifient les conditions de divisibilité $r_1 \mid r_2 \dots \mid r_n$ et où $\Gamma_r = r_1\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus r_n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \dots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ ([G-W] § 2, p. 254 et suivantes). On pose alors $|\Gamma| = r_1 \dots r_n$. L'analogue de l'assertion (i) du Théorème 1 ci-dessus est la

2. PROPOSITION. — La représentation quasi-régulière R^Γ de H_n sur $L^2(\Gamma \backslash H_n)$, pour un groupe $\Gamma = \Gamma(\mathcal{L}, c)$, de type T , se décompose en

$$R^\Gamma = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{L}^*} f_\tau \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}^*} |k|^n |\Gamma| \pi_{\frac{k}{c}}$$

où les f_τ et les π_a sont les représentations irréductibles usuelles de H_n ([G-W] Lemma 3.7, p. 259).

En particulier, les représentations R^Γ et $R^{\Gamma'}$ sont équivalentes si et seulement si les groupes Γ et Γ' sont égaux.

Etant donnée une métrique invariante à gauche g sur H_n , on peut considérer son groupe d'isométries. Si l'on pose

$$K_g = \{\Phi \in \text{Aut}(H_n) : \Phi^*g = g\}$$

on a ([D-G], p. 1091)

PROPOSITION. — *Le groupe d'isométrie de (H_n, g) est le produit semi-direct $G = H_n \rtimes K_g$.*

Etant donnés une métrique g de type T sur H_n et deux sous-groupes discrets uniformes de type T , Γ_1 et Γ_2 de H_n , on se pose la question de l'équivalence des représentations quasi-régulières du groupe d'isométrie G de (H_n, g) sur $L^2(\Gamma_i \backslash G)$.

Dans [G], C. Gordon donne une condition nécessaire pour que deux variétés de Heisenberg de type T , $(\Gamma(\mathcal{L}, c) \backslash H_n, g)$ et $(\Gamma(\mathcal{L}', c') \backslash H_n, g)$ soient p -isospectrales pour tout p (c'est-à-dire isospectrales pour les Laplaciens opérant sur les p -formes différentielles). Cette condition ([G], Condition (P2), Lemma 5.2 et Lemma 5.3 p. 91) s'écrit :

Il existe une bijection $\theta : \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{L}'^*$ telle que,
pour tout $\tau \in \mathcal{L}^*$, il existe $\Phi \in K_g$ telle que $\theta(\tau) = \Phi^*\tau$.

Dans [D-G] (Appendix A p. 1089), D. DeTurck et C. Gordon montrent que les variétés de Heisenberg p -isospectrales construites dans [G] vérifient toutes la conditions (DG) du § I. On peut préciser ce résultat par le

3. THÉORÈME. — *Les représentations quasi-régulières R^Γ et $R^{\Gamma'}$ de $G = H_n \rtimes K_g$ sur $L^2(\Gamma(\mathcal{L}, c) \backslash G)$ et $L^2(\Gamma(\mathcal{L}', c') \backslash G)$ sont équivalentes si et seulement si*

- (i) $c = c'$, et
- (ii) les réseaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ vérifient la condition ci-dessus.

Preuve. —

La preuve n'est pas difficile, mais elle est un peu longue, aussi n'en donnerons nous qu'un résumé. Dans tout ce qui suit, on note G le groupe d'isométrie $H_n \rtimes K_g$ de (H_n, g) et on désigne par $\Gamma = \Gamma(\mathcal{L}, c)$ un sous-groupe discret uniforme de type T . Etant donné $\gamma \in \Gamma$, on note L_γ la multiplication à gauche par γ dans G (ou dans H_n) et L_γ^* l'action associée sur les fonctions. On note R^Γ l'action de G sur les fonctions sur $\Gamma \backslash G$: $(R^\Gamma(g_1)f)(\bar{g}) = f(\overline{g g_1})$.

On peut identifier $L^2(\Gamma \backslash G)$ à l'espace $\mathcal{H} = \{f \in L^2_{\text{loc}}(G) \mid L_\gamma^* f = f, \forall \gamma \in \Gamma\}$. Le centre Z de H_n agit à gauche sur $\mathcal{H}$; on en déduit la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{h \in Z} \mathcal{H}_h$$

$$\mathcal{H}_h = \{f \in L^2_{\text{loc}}(G) \mid \forall \gamma \in \Gamma, L_\gamma^* f = f \text{ et } \forall t \in Z, L_t^* f = e^{2i\pi \frac{h}{t}} f\}$$

où les espaces $\mathcal{H}_h$ sont laissés invariants par R^Γ .

a) Analyse de R^Γ agissant sur $\mathcal{H}_0$.

Etant donnés τ une forme linéaire sur l'algèbre de Lie de H_n , nulle sur le centre, et $\gamma(\xi, \eta, \zeta)$ dans H_n , on note $\tau(\xi, \eta) = \tau \circ \log(\gamma(\xi, \eta, \zeta))$. On identifie les éléments de $\mathcal{L}^*$ à des formes linéaires sur l'algèbre de Lie de H_n , nulles sur le centre. Le tore $\mathcal{L} \backslash \mathbb{R}^n$ agit par L^* sur $\mathcal{H}_0$ et on en déduit la décomposition orthogonale :

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{L}^*} \mathcal{H}_{0,\tau}$$

$$\mathcal{H}_{0,\tau} = \{f \in \mathcal{H} \mid L_{\gamma(\xi,\eta,\zeta)}^* f = e^{2i\pi\tau(\xi,\eta)} f\}$$

et on peut identifier $\mathcal{H}_{0,\tau}$ à $\mathbb{C} f_\tau \otimes L^2(K_g)$, où f_τ est le caractère de H_n associé à $\tau \in \mathcal{L}^*$. La restriction de R^Γ à $\mathcal{H}_{0,\tau}$ est unitairement équivalente à la représentation ρ_τ de G dans $L^2(K_g)$ donnée par :

$$(\rho_\tau(\delta, \alpha)F)(\varphi) = e^{2i\pi\varphi^*\tau(\delta)} F(\varphi\alpha).$$

On peut alors vérifier le

4. LEMME. — *Etant données deux formes linéaires τ et σ sur l'algèbre de Lie de H_n , nulle sur le centre, les représentations ρ_τ et ρ_σ définies ci-dessus sont :*

- (i) *équivalentes s'il existe $\Phi \in K_g$ telle que $\Phi^*\tau = \sigma$;*
- (ii) *étrangères sinon.*

b) Analyse de R^Γ agissant sur $\mathcal{H}_k, k \neq 0$.

Notons $\mathcal{L}_1$, resp. $\mathcal{L}_2$ les projections du réseau $\mathcal{L}$ sur le premier, resp. le second facteur de la décomposition $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. La condition pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathcal{L}$ on a $\langle x, y' \rangle \in c\mathbb{Z}$, imposée à $\mathcal{L}$, permet de montrer que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des réseaux. Considérant alors l'action $L_{\gamma(0,y,0)}^*$ sur les fonctions de $L_{\text{loc}}^2(G)$, on obtient :

5. LEMME.

- (i) $L_{\gamma(0,y,0)}^*, y \in \mathbb{R}^n$ laisse stable $\mathcal{H}_k$ si et seulement si $y \in \frac{c}{k}\mathcal{L}_1^*$;
- (ii) on a la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H}_k = \bigoplus_{b \in \mathcal{L}_2^* \bmod \frac{c}{k}\mathcal{L}_1} \mathcal{H}_{k,b}$$

$$\mathcal{H}_{k,b} = \{f \in \mathcal{H}_k \mid L_{(0,y,0)}^* f = e^{2i\pi\langle b,y \rangle} f\}.$$

On montre ensuite le

6. LEMME. — *L'espace $\mathcal{H}_{k,b}$ est isométrique (à un facteur près) à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n \times K_g)$. De plus,*

- (i) $R^\Gamma \mid \mathcal{H}_k$ et $R^\Gamma \mid \mathcal{H}_{k'}$ sont étrangères si et seulement si $k \neq k'$;
- (ii) $R^\Gamma \mid \mathcal{H}_{k,b}$ et $R^\Gamma \mid \mathcal{H}_{k,b'}$ sont équivalentes pour tous $b, b' \in \mathcal{L}_2^*$; elles sont alors équivalentes à $\pi_{\frac{c}{k}} \otimes \rho$ sur $L^2(\mathbb{R}^n \times K_g)$, où ρ est la représentation régulière de K_g .

Ceci achève la preuve du Théorème 3. ■

APPENDICE

Le but de cet appendice est d'établir les résultats utilisés dans les paragraphes précédents. Sans doute ces résultats sont-ils connus; ne les ayant pas localisés dans la littérature, nous en esquissons les démonstrations.

Rappelons les hypothèses : M est une variété riemannienne complète sur laquelle le groupe G (localement compact, unimodulaire) agit à gauche par isométries; Γ est un sous-groupe discret uniforme de G qui agit sur M librement et proprement discontinûment.

1. LEMME. — *Etant donnés $x \in M$ et une suite $\{\gamma_n\}$ d'éléments de Γ , la suite $\{\gamma_n \cdot x\}$ ne peut converger dans M que si la suite $\{\gamma_n\}$ est constante à partir d'un certain rang.*

Preuve. — Si la suite $\{\gamma_n \cdot x\}$ converge vers $y \in M$, on considère les deux cas $y \in \Gamma \cdot x$ et $y \notin \Gamma \cdot x$; on en tire une contradiction avec le fait que le groupe Γ agit de façon libre et proprement discontinue sur M . ■

2. LEMME. — *Soient K_1, K_2 deux compacts de M . Alors, l'ensemble $A_\Gamma(K_1, K_2) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est fini.*

Preuve. — Par l'absurde en utilisant le Lemme 1. ■

3. LEMME. — *Soient K_1, K_2 deux compacts de M . Alors, l'ensemble $A_G(K_1, K_2) := \{g \in G \mid g \cdot K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G .*

Preuve. — On utilise le fait que Γ est uniforme et on écrit $G = \Gamma \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est compact dans G , puis on utilise le Lemme 2. ■

4. LEMME. — *Pour $x \in M$ (fixé), l'application $R_x : G \longrightarrow M, g \longmapsto g \cdot x$, est propre.*

Preuve. — On écrit $R_x^{-1}(K) = A_G(\{x\}, K)$ et on utilise le Lemme 3. ■

5. PROPOSITION. — *Le groupe G agit proprement sur M . La projection canonique $p : M \longrightarrow G \backslash M$ est continue et ouverte. De plus, l'espace topologique $G \backslash M$ est séparé et localement compact (il est compact si $\Gamma \backslash M$ l'est).*

Preuve. — Classique. ■

6. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses faites sur G et M , il existe une fonction $\theta \in C^\infty(M)$, $\theta \geq 0$ telle que, pour tout compact $K \subset G \backslash M$, $p^{-1}(K) \cap \text{Supp} \theta$ est compact dans M , et pour tout $x \in M$, $\int_G \theta(g \cdot x) dg = 1$ (si*

$G \backslash M$ est compact, alors θ est à support compact).

Preuve. — Du fait que M est une variété, donc localement compacte et dénombrable à l'infini, on déduit qu'il en est de même pour $G \backslash M$ et en particulier que cet espace est paracompact. Considérant des familles $\{U_x \subset U'_x\}_{x \in M}$ d'ouverts relativement compacts de M , et leurs projections sur $G \backslash M$, on trouve deux recouvrements ouverts localement finis, $\{V_i\}$ et $\{V'_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ de $G \backslash M$, avec $\overline{V_i} \subset V'_i$ et deux familles localement finies d'ouverts relativement compacts de M , $\{W_i\}$, $\{W'_i\}$, avec $\overline{W_i} \subset W'_i$, $p(W_i) = V_i$, $p(W'_i) = V'_i$.

On peut donc trouver des fonctions $\varphi_i \in C_0^\infty(W'_i)$, avec $\varphi_i \equiv 1$ sur W_i . La fonction donnée par $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x)$ est bien définie et C^∞ . L'assertion sur le support suit du choix des W'_i . Appliquant le Lemme 4, on voit que l'intégrale $\tilde{\varphi}(x) = \int_G \varphi(g \cdot x) dg$ existe pour tout $x \in M$ (en fait on intègre sur un compact de G) et on voit que $\varphi > 0$ (car $\{V_i\}$ est un recouvrement de $G \backslash M$). On pose alors $\theta(x) = \varphi(x)/\tilde{\varphi}(x)$, qui a les propriétés requises. Cette preuve s'inspire de la preuve du Lemme de la page 18 de [BR]. ■

Bibliographie

- [BD 1] BÉRARD P. — *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque, 177-178 (1989), 127-154.
- [BD 2] BÉRARD P. — *Transplantation et Isospectralité I.*, à paraître dans Math. Annalen 1992.
- [BR] BRUHAT F. — *Représentations des groupes localement compacts*, Ec. Normale Sup. Paris, 1971.
- [D-G] DETURCK D., GORDON S. — *Isospectral Deformations II : Trace Formulas, Metrics, and Potentials*, Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), 1067-1095.
- [GO] GORDON S. — *Riemannian manifolds isospectral on functions but not on 1-forms*, J. Differential Geom., 24 (1986), 79-96.
- [G-W] GORDON S., WILSON E. — *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Michigan Math. J., 33 (1986), 253-271.
- [J-L] JACQUET, H. - LANGLANDS, R. — *Automorphic Forms on $GL(2)$* , Lecture Note in Math. n° 114 Springer, 1970.
- [LA] LABESSE J. P. — Lettre, 27 Novembre 90.
- [SU] SUNADA T. — *Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds*, Annals of Math., 121 (1985), 169-186.

Pierre BÉRARD
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
 pberard@frgren81.bitnet