SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GEORGE D. RAIKOV

L'asymptotique des valeurs propres pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel périodique perturbé

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 133-139

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__133_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1990–1991 (133–139)

L'ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC UN POTENTIEL PÉRIODIQUE PERTURBÉ

par *George D. RAIKOV*

1. Introduction

Soit $W \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $m \geqslant 2$, une fonction périodique sur un réseau Γ tel que $\mathbb{R}^m/\Gamma$ soit compact. Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ une perturbation qui vérifie les estimations

$$|D^\beta V(x)| \leqslant c_\beta \langle x\rangle^{-\alpha-|\beta|},\ \langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2},\ \forall\beta \in \mathbb{N}^m, \tag{1}$$

pour un $\alpha \in (0,2)$ et des constantes positives c_β.

Sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^m)$, on considère l'opérateur de Schrödinger

$$\mathcal{H} = -\Delta + W + V$$

qui est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Comme la multiplication par V est relativement compacte par rapport à Δ, le spectre esssentiel $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H})$ de l'opérateur $\mathcal{H}$ ne dépend pas de V, et coïncide avec le spectre $\sigma(\mathcal{H}_0)$ de l'opérateur

$$\mathcal{H}_0 := -\Delta + W$$

qui est purement continu. Il est bien connu que $\sigma(\mathcal{H}_0)$ a une structure des bandes, c'est-à-dire on a

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_{\ell},$$

où I_ℓ sont des intervalles compacts qui peuvent être disjoints ou se recouvrir. On note $(\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$, $k = 0, 1, \ldots, K$, les trous dans $\sigma(\mathcal{H}_0)$ telles que

$$\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{k=0}^{K} (\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+), \mathcal{E}_k^+ < \mathcal{E}_{k+1}^-,\ k = 0, 1, \ldots, K \leqslant \infty.$$

Puisque $m \geqslant 2$, le nombre K est fini dans le cas général (*cf.* [SKR]), mais ce n'est pas essentiel pour le problème considéré ici. Remarquons que le premier trou $(\mathcal{E}_0^-, \mathcal{E}_0^+)$ est semi-infini, c'est-à-dire $\mathcal{E}_0^- = -\infty$. Le but de cet exposé est l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{H}$ près d'un point fixé $\mathcal{E}_0^+$ ou $\mathcal{E}_k^\pm$, $k = 1, \ldots, K$.

2. Quelques faits de la théorie de Bloch

Pour formuler notre résultat principal, il faut rappeler brièvement quelques faits de la théorie de Bloch.

On note Ω le domaine fondamental du tore $\mathbb{R}^m/\Gamma$. Soit Γ^* le réseau dual de Γ. Alors Ω^* désigne le domaine fondamental du tore dual $\mathbb{R}^m/\Gamma^*$. Le domaine Ω^* est connu dans la littérature physique comme la zone de Brillouin.

Pour $\theta \in \overline{\Omega}^*$ fixé on introduit l'opérateur

$$\mathfrak{h}_\theta := -\Delta + W \tag{2}$$

avec le domaine

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma) \cong L^2(\Omega) : u_\theta \in H^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)\}$$

où $u_\theta(x) := \exp\{-i\theta \cdot x\}\ u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, et $H^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)$ est l'espace de Sobolev habituel sur la variété $\mathbb{R}^m/\Gamma$.

L'opérateur $\mathfrak{h}_\theta$ est auto-adjoint et elliptique dans $L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)$. Soit

$$E_1(\theta) \leqslant E_2(\theta) \leqslant E_3(\theta) \leqslant \cdots$$

la suite des valeurs propres de $\mathfrak{h}_\theta, \theta \in \overline{\Omega}^*$. Evidemment, toutes les fonctions $E_\ell(\theta), \ell \geqslant 1$, sont continues sur $\overline{\Omega}^*$. En effet, ces fonctions sont analytiques sur $\mathbb{R}^m/\Gamma^*$ hors d'un fermé des points du branchement.

On introduit l'espace hilbertien

$$\mathfrak{L} := \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega^*} \int_{\mathbb{R}^m/\Gamma^*} \oplus L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma) d\theta \tag{3}$$

et l'opérateur

$$\mathfrak{s}_0 := \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega^*} \int_{\mathbb{R}^m/\Gamma} \oplus \mathfrak{h}_\theta d\theta \tag{4}$$

qui est auto-adjoint dans $\mathfrak{L}$. On définit l'opérateur $U : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathfrak{L}$ par

$$(Uf)(x;\theta) := \Sigma_{\gamma\in\Gamma} \exp\{-i\theta\gamma\} f(x+\gamma), \ f \in L^2(\mathbb{R}^m). \tag{5}$$

L'opérateur U est isométrique et on a

$$U\mathcal{H}_0 U^* = \mathfrak{s}_0.$$

Alors on peut décrire les bandes de $\sigma(\mathcal{H}_0)$ explicitement :

$$I_\ell = E_\ell(\overline{\Omega}^*), \ \ell \geqslant 1.$$

De plus, chacun des points $\mathcal{E}_k^-$, $k = 1, \dots, K$, (respectivement, $\mathcal{E}_k^+$, $k = 0, \dots, K$) de la frontière du $\sigma_{ess}(\mathcal{H})$ coïncide avec la valeur maximale (respectivement, minimale) d'une fonction $E_\ell(\theta)$, $\ell \geqslant 1$.

Nous disons que la valeur $\mathcal{E}_k^\pm$ est régulière si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) il n'y a qu'une fonction $E_{k_0}^\pm(\theta)$ de la suite $\{E_\ell(\theta)\}_{\ell \geqslant 1}$ qui prend la valeur $\mathcal{E}_k^\pm$;

ii) la fonction $E_{k_0}^\pm(\theta)$ prend la valeur $\mathcal{E}_k^\pm$ aux points isolés $\theta_{k;j}^\pm, j = 1, \dots, J_k^\pm < \infty$;

iii) la matrice

$$\mathcal{M}_k^\pm(\theta) := \{\mathcal{M}_{k;r,s}^\pm(\theta)\}_{r,s=1}^m$$

où

$$\mathcal{M}_{k;r,s}^\pm(\theta) := \pm\partial^2 E_{k_0}^\pm(\theta)/\partial\theta_r\partial\theta_s, \quad r, s = 1, \dots, m,$$

est définie-positive aux points $\theta = \theta_{k;j}^\pm, j = 1, \dots, J_k^\pm$.

Les valeurs propres de la matrice inverse de $\mathcal{M}_k^\pm(\theta_{k;j}^\pm)$ sont connues dans la littérature physique comme étant les masses effectives aux points $\theta = \theta_{k;j}^\pm$, $j = 1, \dots, J_k^\pm$.

3. Enoncé du résultat principal

Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}$ un ouvert tel que le spectre de T sur $\mathfrak{g}$ soit purement discret. alos $N(\mathfrak{g}|T)$ désigne le nombre des valeurs propres de T situées sur $\mathfrak{g}$, chacune étant comptée suivant sa multiplicité.

Soit $(\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$, $k = 0, 1, \dots, K$ un trou dans $\sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_{ess}(\mathcal{H})$. On se donne $\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$ fixé, et pour tout $\lambda > 0$ assez petit on pose

$$\mathcal{N}_k^-(\lambda) := N(\mathcal{E}_k^- + \lambda, \mathcal{E}|\mathcal{H}), \ k = 1, \dots, K,$$
$$\mathcal{N}_k^+(\lambda) := N(\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^+ - \lambda|\mathcal{H}), \ k = 0, \dots, K.$$

Le théorème suivant contient deux assertions indépendantes suivant respectivement le signe supérieur ou le signe inférieur dans les signes doubles " $\pm$ " et " $\mp$ ".

THÉORÈME PRINCIPAL. — *On suppose que W est périodique sur le réseau Γ et V satisfait (1). De plus, on suppose que l'estimation*

$$\mathrm{vol}\{x \in \mathbb{R}^m : \mp V(x) > \mu\} \geqslant c\mu^{-m/\alpha} \tag{6$_\pm$}$$

est vérifié pour avec une constante positive c, pour tout $\mu > 0$ assez petit et avec le même $\alpha \in (0, 2)$ comme dans (1).

Soit $(\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$, $k = 0, 1, \dots, K$, un trou dans $\sigma(\mathcal{H}_0)$. On suppose que la valeur $\mathcal{E}_0^+$

ou $\mathcal{E}_k^{\mp}$, $k = 1, \ldots, K$, est régulière. Alors on a

$$\mathcal{N}_k^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{j=1}^{J_k^{\pm}} \mathrm{vol}\{(x,\theta) \in \mathbf{R}^{2m}, \tag{7$_\pm$}$$
$$\frac{1}{2}(\mathcal{M}_k^{\pm}(\theta_{k;j}^{\pm})\theta, \theta) \pm V(x) < -\lambda\}(1 + 0(1)), \lambda \downarrow 0,$$

où $(,\cdot,)$ désigne le produit scalaire engendré par la métrique euclidienne.

On déduit de l'inégalité (1) avec $\beta = 0$ et de l'estimation $(6)_\pm$ que la quantité à la droite de la relation $(7)_\pm$ est de l'ordre $\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}$ lorsque $\lambda \downarrow 0$.

Des formules asymptotiques qui ressemblent à $(7)_\pm$ mais concernent le cas $m = 1$ ont été obtenues par Zelenko [ZEL] sous des hypothèses trop restrictives. Une amélioration considérable de ces résultats a été anoncée par Khryachtchov [KHR] qui considérait aussi seulement le cas $m = 1$.

Il y a une littérature importante concernant l'asymptotique de $N(-\infty, -\lambda|-\Delta+V)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$ dans le cas $m \geqslant 2$, c'est-à-dire l'asymptotique des valeurs propres isolées de l'opérateur $\mathcal{H}$ avec $W = 0$ (*cf.* [ROZ], [TAM]). Par exemple, le résultat suivant qui sera utilisé plus loin.

PROPOSITION. — *Soit $m \geqslant 2$. On suppose que V satisfait (1). De plus, on suppose que l'estimation* $(6)_+$ *est vérifiée. Alors on a*

$$N(-\infty, -\lambda| - \Delta + V) =$$
$$= (2\pi)^{-m} \mathrm{vol}\{(x,\theta) \in T^*\mathbb{R}^m : |\theta|^2 + V(x) < -\lambda\}(1 + 0(1)), \quad \lambda \downarrow 0.$$

Finalement, nous remarquons que nos résultats sont analogues aux résultats de Deift, Hempel [DE–HE], Alama, Deift, Hempel [AL–DE–HE], Gesztesy, Simon [GE–SI] et Hempel [HE]. Mais ces auteurs étudient l'asymptotique lorsque $g \longrightarrow \infty$ du nombre des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta + W - tV$, $V \geqslant 0$, qui traversent un niveau d'énergie $\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$ fixé lorsque le paramètre t croît de zéro à la valeur g.

4. Résumé de la démonstration du théorème principal

On propose un résumé de la démonstration du théorème principal pour le cas d'un minimum $\mathcal{E}_k^+$, $k = 1, \ldots, K$. Pour simplifier, on suppose que la valeur $\mathcal{E}_k^+$ est prise par la fonction $E_{k_0}^+(\theta)$ en un seul point $\theta_k \in \Omega^*$.

D'abord, on utilise l'opérateur U (*cf.* (5)) pour montrer que l'opérateur $\mathcal{H}$ est équivalent unitairement à l'opérateur

$$\mathfrak{s} := \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{B}$$

où $\mathfrak{s}_0$ est introduit dans (4) et $\mathfrak{B}$ est défini par

$$(\mathfrak{B}g)(x,\theta) =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega^*}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}V(x+\gamma)\int_{\mathbb{R}^m/\Gamma^*}\exp\{i(\theta'-\theta\cdot\gamma\}g(x,\theta')d\theta',\ g\in\mathfrak{L},$$

(*cf.* (3)). Donc, on a
$$\mathcal{N}_k^+(\lambda) := N(\mathcal{E},\mathcal{E}_k^+ - \lambda|\mathfrak{s}). \tag{8}$$

Puis, on introduit la fonction propre $\varphi(x,\theta) \in L^\infty(\Omega\times\Omega^*)$ de l'opérateur $\mathfrak{h}_\theta$ (*cf.* (2)) associée à la valeur propre $E_{k_0}^+(\theta)$, telle que
$$\varphi(x,\theta) = \exp\{ix\cdot\theta\}\psi(x,\theta) \tag{9}$$
où $\psi(\cdot,\theta)\in H^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)$ pour chaque $\theta\in\Omega^*$ (en effet, $\psi(\cdot,\theta)\in C^\infty(\mathbb{R}^m/\Gamma)$, $\forall\theta\in\Omega^*$). On suppose que $\psi(\cdot,\theta)$ dépend de θ analytiquement dans un voisinage de θ_k par rapport à la topologie de $L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)$. En outre, on suppose qu'on a
$$\int_\Omega|\varphi(x,\theta)|^2dx = \int_\Omega|\psi(x,\theta)|^2dx = 1,\ \forall\theta\in\Omega^*.$$

L'existence des fonctions propres qui possèdent ces propriétés est montrée dans [WILC].

On prolonge $\psi(x,\theta)$ par périodicité pour tous $x\in\mathbb{R}^m$, et on prolonge la fonction $\varphi(x,\theta)$ selon (9).

On définit l'opérateur $\Phi : L^2(\Omega^*) \longrightarrow L^2(\Omega^*)$ par
$$(\Phi u)(\theta) = \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega^*}\int_{\Omega^*}\int_{\mathbb{R}^m}\overline{\varphi(x,\theta)}V(x)\varphi(x,\theta')u(\theta')dxd\theta',\ u\in L^2(\Omega^*). \tag{10}$$
On pose
$$\mathcal{R}(\lambda) := -\big(E_{k_0}^+(\theta) - \mathcal{E}_k^+ + \lambda\big)^{-1/2}\Phi\big(E_{k_0}^+(\theta) - \mathcal{E}_k^+ + \lambda\big)^{-1/2}. \tag{11}$$
On obtient les estimations
$$\pm N(\mathcal{E},\mathcal{E}_k^+ - \lambda|\mathfrak{s}) \lesseqgtr$$
$$\lesseqgtr \pm N\big(1\mp\varepsilon,\infty|\mathcal{R}(\lambda)\big) + 0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}),\ \lambda\downarrow 0,\ \forall\varepsilon\in(0,1). \tag{12$_\pm$}$$
Pour les avoir, on définit le projecteur orthogonal $P : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ par
$$(Pg)(x,\theta) = \varphi(x,\theta)\int_\Omega\overline{\varphi(x',\theta)}g(x',\theta)dx',\ g\in\mathfrak{L},$$
et on pose $Q := \operatorname{Id} - P$. Alors on a
$$\mathfrak{s} = P\mathfrak{s}P + Q\mathfrak{s}Q + P\mathfrak{B}Q + Q\mathfrak{B}P. \tag{13}$$
L'opérateur $P\mathfrak{s}P$, avec comme domaine $P\mathfrak{L}$ est équivalent unitairement à $E_{k_0}^+ + \Phi$ et on a
$$N(\mathcal{E},\mathcal{E}_k^+ - \lambda|E_{k_0}^+ + \Phi) = N(\mathcal{E} - \mathcal{E}_k^+ + \lambda, 0|E_{k_0}^+ - \mathcal{E}_k^+ + \lambda + \Phi) =$$
$$= N(-\infty,0|E_{k_0}^+ - \mathcal{E}_k^+ + \lambda + \Phi) + 0(1),\ \lambda\downarrow 0, \tag{14}$$

et par le principe de Birman-Schwinger, on obtient

$$N(-\infty,0|E_{k_0}^{+}-\mathcal{E}_k^{+}+\lambda+\Phi)=N\big(1,\infty|\mathcal{R}(\lambda)\big). \tag{15}$$

D'autre part, le spectre essentiel de l'opérateur $Q\mathfrak{s}Q$ avec le domaine $\mathfrak{L}_{1:=Q\mathfrak{b}(\mathfrak{s})}$ est situé hors du fermé $[\mathcal{E},\mathcal{E}_k^{-}]$ et, par conséquent, on a

$$N(\mathcal{E},\mathcal{E}_k^{+}-\lambda|Q\mathfrak{s}Q_{|\mathfrak{L}_1})=0(1),\ \lambda\downarrow 0. \tag{16}$$

Maintenant, les estimations $(12)_\pm$ résultent de (13) – –(16); la présence de deux derniers termes dans (13) entraîne l'apparition du nombre $\varepsilon\neq 0$ et du reste $0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha})$ dans $(12)_\pm$.

L'étape suivante est la localisation par rapport à θ. Plus précisèment, on choisit un domaine quelconque $\mathcal{O}\subset\Omega^*$ tel que $\theta_k\in\mathcal{O}$ et on définit l'opérateur $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\lambda)$ par analogie avec $\mathcal{R}(\lambda)$ (*cf.* (10) – (11)) en remplaçant Ω^* par $\mathcal{O}$. Alors on a

$$\begin{gathered}\pm N\big(1\mp\varepsilon,\infty|\mathcal{R}(\lambda)\big)\leqslant\pm N\big(1\mp\varepsilon',\infty|\mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\lambda)\big)+\\ +0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}),\ \lambda\downarrow 0,\ \forall\varepsilon\in(0,1),\ \forall\varepsilon'\in(\varepsilon,1).\end{gathered} \tag{17$_\pm$}$$

On choisit des coordonnées sur $\mathcal{O}$ telles que $\theta_k=0$, et on introduit l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda):=-\Big(\frac{1}{2}(\mathcal{M}_k^{+}(\theta_k)\theta,\theta)+\lambda\Big)^{-1/2}\tilde{\Phi}_{\mathcal{O}}\Big(\frac{1}{2}(\mathcal{M}_k^{+}(\theta_k)\theta,\theta)+\lambda\Big)^{-1/2} \tag{18}$$

où l'opérateur $\tilde{\Phi}_{\mathcal{O}}$ est défini par

$$(\tilde{\Phi}_{\mathcal{O}}u)(\theta)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathbb{R}^m}\exp\{i(\theta'-\theta)\cdot x\}V(x)u(\theta')dxd\theta',\ u\in L^2(\mathcal{O}). \tag{19}$$

Alors on a

$$\begin{gathered}\pm N\big(1\mp\varepsilon,\infty|\mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\lambda)\big)\leqslant\pm N\big(1\mp\varepsilon',\infty|\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda)\big)+\\ +0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}),\ \lambda\downarrow 0,\ \forall\varepsilon\in(0,1),\ \forall\varepsilon'\in(\varepsilon,1).\end{gathered} \tag{20$_\pm$}$$

Pour vérifier $(20)_\pm$, on écrit

$$\begin{gathered}\overline{\varphi(x,\theta)}\varphi(x,\theta')\equiv\exp\{i(\theta'-\theta)\cdot x\}\overline{\psi(x,\theta)}\psi(x,\theta')=\\ =\exp\{i(\theta'-\theta)\cdot x\}/\operatorname{vol}\Omega+\\ \exp\{i(\theta'-\theta)\cdot x\}\Big(\sum_{\gamma'\in\Gamma^*}\overline{\psi_{\gamma'}(\theta)}\psi_{\gamma'}(\theta')-\operatorname{vol}\Omega\Big)/(\operatorname{vol}\Omega)^2+\\ +\sum_{\gamma'\in\Gamma^*,\gamma''\in\Gamma^*,\gamma'\neq\gamma''}\exp\{i(\theta'-\theta+\gamma'-\gamma'')\cdot x\}\overline{\psi_{\gamma'}(\theta)}\psi_{\gamma''}(\theta')/(\operatorname{vol}\Omega)^2\end{gathered}$$

où

$$\psi_{\gamma'}(\theta):=\int_{\Omega}\exp\{i\gamma'\cdot x\}\psi(x,\theta)dx,\gamma'\in\Gamma^*,\ \theta\in\overline{\Omega}^*.$$

Les deux derniers termes à droite sont négligeables : le premier d'entre eux est égal à zéro pour $\theta=\theta'$, et les gradients par rapport à x des fonctions de phase $(\theta'-\theta+\gamma'-\gamma'')\cdot x$ dans le deuxième terme ne s'annulent pas si diam $\mathcal{O}$ est assez petit. De plus, ici on a utilisé la relation $\operatorname{vol}\Omega\operatorname{vol}\Omega^*=(2\pi)^m$.

Finalement, on introduit l'opérateur $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)$ par analogie avec $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda)$ (*cf.* (18) – (19)) en remplaçant le domaine $\mathcal{O}$ par $\mathbb{R}^m$, et on vérifie l'estimation

$$\pm N\big(1 \mp \varepsilon, \infty|\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda)\big) \leqslant \pm N\big(1 \mp \varepsilon', \infty|\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\big) + \\ + 0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}),\ \lambda \downarrow 0,\ \forall\varepsilon \in (0,1),\ \forall\varepsilon' \in (\varepsilon, 1). \qquad (21)_{\pm}$$

Le principe de Birman-Schwinger implique que

$$N\big(1-\varepsilon, \infty|\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\big) = N\big(-\infty, -\lambda| - \Delta + (1-\varepsilon)^{-1}\tilde{V}\big), \forall\varepsilon \in (-1,1), \qquad (22)_{\pm}$$

où $\tilde{V}(x) = V\Big(\big(\tfrac{1}{2}\mathcal{M}_k^{\pm}(\theta_k)\big)^{1/2}x\Big)$.

En combinant $(8), (12)_{\pm}, (17)_{\pm}$ et $(20)_{\pm} - (22)_{\pm}$ et en appliquant le résultat de la proposition, on obtient $(7)_{\pm}$.

Bibliographie

[AL–DE–HE] ALAMA S., DEIFT P.A., HEMPEL R. — *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$*, Commun. Math. Phys., **121** (1989), 291–321.

[DE–HE] DEIFT P.A., HEMPEL R. — *On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$*, Commun. Math. Phys., **103** (1986), 461–490.

[GE–SI] GESZTESY F., SIMON B. — *On a theorem of Deift and Hempel*, Commun. Math. Phys., **116** (1988), 503–505.

[HE] HEMPEL R. — *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H \pm \lambda W$ in a spectral gap of H*, J. Reine Angew. Math., **399** (1989), 38–59.

[KHR] KHRYASHCHEV S.V. — *Asymptotics of the discrete spectrum of the perturbed Hill operator*, Zap. Nauchn. Seminarov LOMI, **147** (1985), 188–189 (en russe); J. Sov. Math. **37** (1987) 908–909.

[ROZ] ROZENBLJUM G.V. — *An asymptotic of the negative discrete spectrum of the Schrödinger operator*, Mat. Zametki, **21** (1977), 399–407 (en russe); Math. Notes **21** (1977) 222–227.

[SKR] SKRIGANOV M.M. — *Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **171** (1985), 122 pp. (en russe).

[TAM] TAMURA H. — *Asymptotic formulas with sharp remainder estimates for bound states of Shrödinger operators*, J. d'Anal. Math., **I:40** (1981), 166–182; **II:41** (1982) 85–108.

[WILC] WILCOX C.H. — *Theory of Bloch waves*, J. d'Anal. Math., **33** (1978), 146–167.

[ZEL] ZELENKO L.B. — *Asymptotic distribution of the eigenvalues in a lacuna of the continuous spectrum of a perturbed Hill operator*, Mat. Zametki, **20** (1976), 341–350 (en russe); Math. Notes **20** (1976) 750–755.

G. D. RAIKOV
Section of Mathematical Physics
Institute of Mathematics
Bulgarian Academy of Sciences
P.O.B. 373
1090 Sofia (Bulgaria)