

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PETER GREENBERG

Les espaces de bracelets et les complexes de Stasheff

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 111-118

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__111_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES ESPACES DE BRACELETS ET LES COMPLEXES DE STASHEFF

par *Peter GREENBERG*

I. Introduction

Soit \mathbf{H} le demi-plan supérieur (un disque dans toutes nos figures). Un *bracelet* est un ensemble fini d'horocercles $b = \{h_1, \dots, h_{n+1}\}$ tel que les points à l'infini des h_i sont dans l'ordre trigonométrique, et tel que h_i est tangent à h_{i+1} , et h_{n+1} est tangent à h_1 .

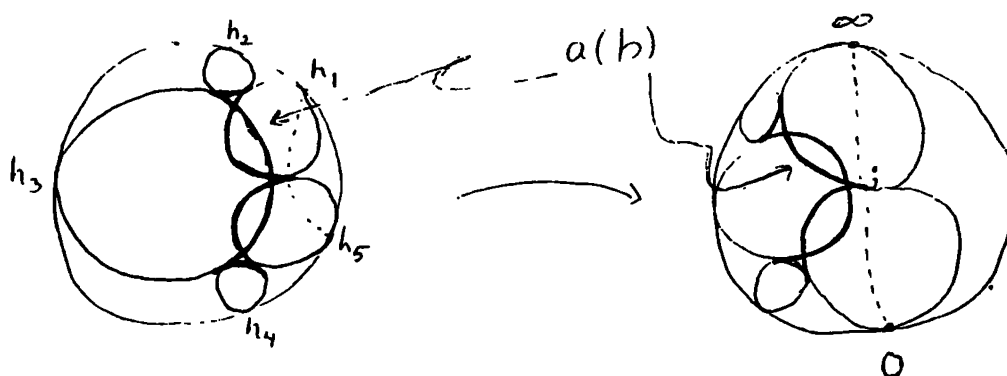



Fig. 1 – Normalisation d'un bracelet

Etant donné un bracelet $b = \{h_1, \dots, h_{n+1}\}$ il existe une unique isométrie de \mathbf{H} dont l'image de $h_1 = \{z \mid \text{Im } z = 1\}$ et dont l'image de h_{n+1} est tangente à 0 ; alors $h_1 \cap h_{n+1} = \{i\}$ et $[-\infty, 0]$ est partagé en n intervalles par les points à l'infini des h_i . L'espace de tels bracelets "normalisés" s'appelle B_n . On veut le comprendre.

On observe d'abord que B_n est une variété C^∞ , difféomorphe à \mathbf{R}^{n-2} . Or, les points à l'infini des h_i , $2 \leq i \leq n-1$, varient librement et leur configuration dans $\partial\overline{\mathbf{H}}$ fixe le bracelet. Nous allons étudier la topologie d'un certain sous-espace de B_n .

Soit $b \in B_n$, et soit $a(b)$ l'arc fermé "horocercle par morceaux" qui parcourt les h_i entre les points d'intersection avec h_{i-1} et h_{i+1} (voir fig. 1, où $a(b)$ est plus foncé). On trouve que la longueur de $a(b)$ est une fonction de Morse sur B_n , avec un seul point singulier, un minimum, le bracelet symétrique invariant par une isométrie de \mathbf{H} d'ordre

$n + 1$. La longueur de cet $\alpha(b)$ minimal est $2(n + 1) \cos(\pi/n + 1)$ (voir l'Appendice).

Si l'arc $\alpha(b)$ est simple (sans points d'autointersection) on dit que b est *propre*. Le sous-espace de B_n (évidemment ouvert) des bracelets propres s'appelle B_n^p . Nous écrivons aussi l'adhérence $\overline{B}_n^p = B_n^p \cup B_n^t$, où B_n^t est l'espace de bracelets tangents, *i.e.* tels que $\alpha(b)$ possède au moins un point d'autointersection, mais tels que tous ces points sont de degré 0 :  (voir fig. 2). Notre but est de détailler la structure des \overline{B}_n^p .

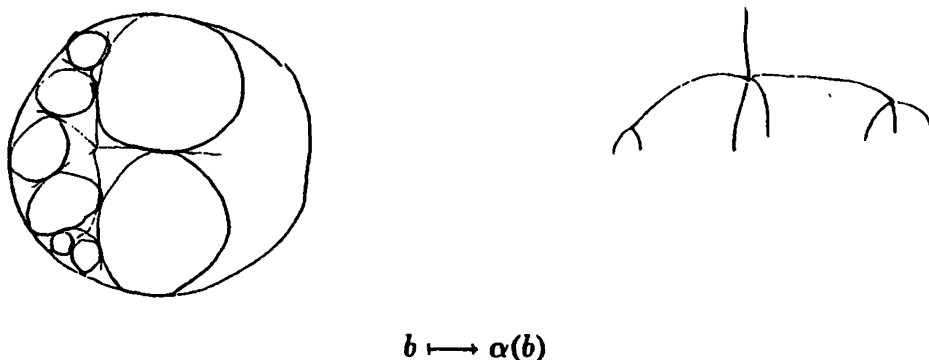


Fig. 2 – Un bracelet tangent et son arbre

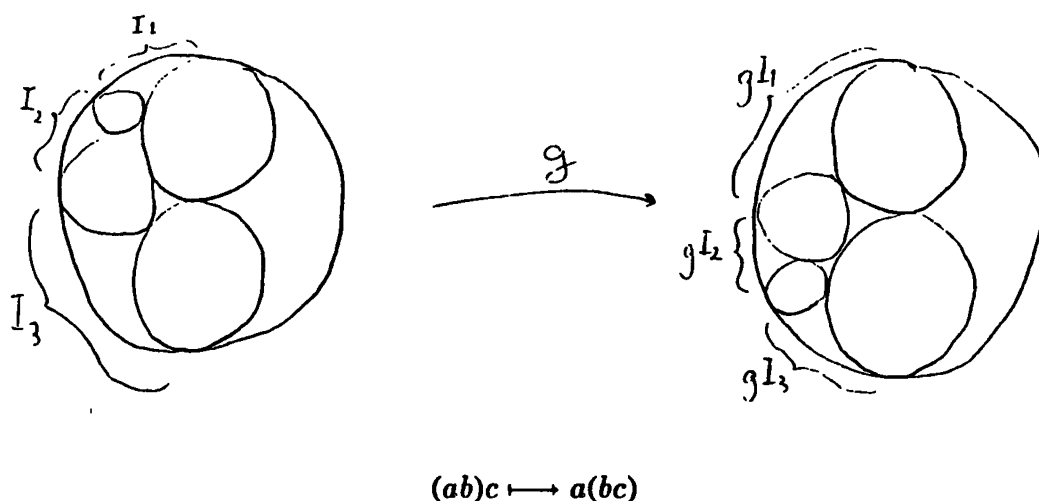
On verra que \overline{B}_n^p est une variété stratifiée (dans un sens faible : \overline{B}_n^p est une union de variétés ouvertes s_α , $0 \leq \dim s_\alpha \leq n - 2$, dont l'adhérence \overline{s}_α est une union de \overline{s}_β , $\dim s_\beta < \dim s_\alpha$). Il y a une strate s_α pour chaque arbre planaire à n racines et une "tête" (voir fig. 2). Or, les complexes de Stasheff, eux aussi, possèdent une face pour chacun de ces arbres. Notre résultat principal est en effet :

3. THÉORÈME. — Soit K_n le complexe de Stasheff ([St], dit "l'associahedron", voir [L]). Alors, il existe un homéomorphisme entre les paires $(K_n, \partial K_n) \rightarrow (\overline{B}_n^p, B_n^t)$ qui envoie les intérieurs des faces sur les strates.

4. COROLLAIRE. — B_n^t est homéomorphe à S^{n-3} , et B_n^p est une $(n - 2)$ -boule ouverte dans B_n .

Démonstration. — On sait (d'après Stasheff [St]) que $(K_n, \partial K_n)$ est homéomorphe à $(\overline{B}^{n-2}, S^{n-3})$. Or, B_n^t est ouvert et la frontière de \overline{B}_n^p est $B_n^t \approx S^{n-3}$, d'où B_n^p est une $(n - 2)$ -boule.

5. Remarque. — Le groupe F de Thomson possède deux descriptions : comme un groupe d'homéomorphismes de $[-\infty, 0]$, et comme un groupe de "changements d'associativité" (voir fig. 6).

Fig. 6 – Un élément $g \in F$

Le deuxième point de vue fait penser qu'on peut construire un $K(F, 1)$ avec les K_n , car ils ont été introduits ([St]) comme paramètres entre des façons différentes d'associer n symboles. Du premier point de vue, on voit (voir [G]) que F agit comme groupe de revêtement sur un espace de fonctions homéomorphe, d'une façon naturelle, à une limite directe $\varinjlim B_{2^n}$. Le théorème lie ces deux points de vue.

Il reste à comprendre le fait que l'action de F ne préserve "qu'à l'infini" la structure combinatoire des $B_{2^n}^!$...


Je remercie Richard Kenyon, qui m'a indiqué une erreur dans une version antérieure, Lucien Guillou pour son aide en topologie, ainsi que Jacques Helmstetter, Gilles Carron et Yves Carrière pour m'avoir aidé avec les résultats de l'appendice.

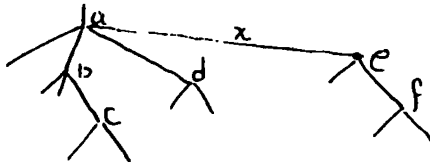
L'organisation de cette note est simple : on construit les K_n avec soin, de telle façon que la preuve du théorème ne soit pas difficile. L'appendice contient une paramétrisation explicite des B_n , comme sous-variétés analytiques de \mathbb{R}^{n+1} , et quelques remarques.

II. Les "Associahedra" de Stasheff

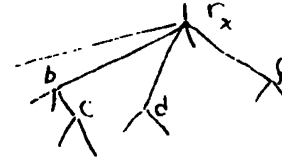
Bien que la construction originale des K_n utilise un calcul des "associations de n symboles", il nous convient de les construire, selon une idée de Boardman, avec des arbres.

Soit \mathcal{A}_n donc l'ensemble des arbres planaires (*i.e.* munis d'un plongement dans \mathbb{R}^2 , défini à isotopie près) avec $n+1$ racines, l'une d'entre elles, la *tête*, distinguée. Pour $\alpha \in \mathcal{A}_n$, soit $n(\alpha)$ l'ensemble des sommets intérieurs (dont la valence est au moins 2) de α ; si $i \in n(\alpha)$ soit n_i le nombre de "directions descendantes", soit la valence

moins 1. Soit $|\alpha| = \sum_{i \in n(\alpha)} (n_i - 2)$. On appelle $T(n) \in \mathcal{A}_n$ l'arbre , défini par $|T(n)| = n - 2$.



(a) un arbre $\alpha \in \mathcal{A}_{10}$
 $n(\alpha) = \{a, b, c, d, e, f\}$
 $n_a = 4, n_b = 3, \text{ etc...}$
 $h_x = a, b_x = e$



(b) la contraction de α par x

Fig. 7

Une arête *intérieure* de $\alpha \in \mathcal{A}_n$ est une arête dont la frontière $\partial x = \{h_x, b_x\}$ se trouve dans $n(\alpha)$. Pour une arête intérieure x de α , soit la *contraction de α par x* l'arbre $\beta \in \mathcal{A}_n$ qu'on obtient en identifiant $x \cup \partial x$ à un sommet r_x (voir fig. 7). Nous écrivons donc $\alpha <_x \beta$, et si $\alpha <_{x_1} \dots <_{x_\ell} \beta$, nous écrivons $\alpha < \beta$. Notons que si $\alpha <_x \beta$, on peut écrire

$$\begin{aligned} n(\alpha) &= \{h_x, b_x, \dots\} \\ n(\beta) &= \{r_x, \dots\} \end{aligned} \tag{8}$$

c'est-à-dire, $n(\beta) = n(\alpha) - \{h_x, b_x\} \cup \{r_x\}$, et puis que $|\beta| = |\alpha| + 1$.

La définition des K_n se fait par récurrence. Les K_n seront en effet une union des faces fermées f_α , avec $\dim f_\alpha = |\alpha|$, $\alpha \in \mathcal{A}_n$; en plus $K_n = f_{T(n)}$ et $\partial K_n = \bigcup_{\alpha \neq T(n)} f_\alpha$.

Si $\alpha < \beta$, f_α est une face de β . Pour commencer, on définit :

$$K_2 = f_\lambda = f_{T(2)} = * \quad \text{un point}$$

$$K_3 = \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ f_\lambda \quad f_\lambda \end{array} \quad \text{un intervalle .}$$

$f_{T(3)}$

Supposons, maintenant, les f_α définies, $\alpha \in \mathcal{A}_j$, $2 \leq j \leq n - 1$ ainsi que des inclusions $i_{\beta\alpha} : s_\alpha \rightarrow s_\beta$ si $\alpha < \beta$, et puis que $(K_j, \partial K_j) \approx (\bar{B}^{j-2}, S^{j-3})$, et construisons ∂K_n .

Posons, pour $\alpha \in \mathcal{A}_n$, $\alpha \neq T(n)$, $g_\alpha \equiv \prod_{i \in n(\alpha)} f_{T(n_i)}$. Si $\alpha <_x \beta \neq T(n)$, il faut définir $i_{\beta\alpha} : f_\alpha \rightarrow f_\beta$, soit (d'après (8))

$$i_{\beta\alpha} : f_{T(n_a)} \times f_{T(n_b)} \times \prod_{\dots} f_{T(n_i)} \rightarrow f_{T(n_r)} \times \prod_{\dots} f_{T(n_i)} .$$

Sur les derniers facteurs, $i_{\beta\alpha} \equiv \text{id}$; il nous reste à définir $i_{\beta\alpha} : f_{T(n_h)} \times f_{T(n_b)} \longrightarrow f_{T(n_r)}$. Soit V le sous-arbre de α avec x comme seule arête intérieure, qui contient toutes les arêtes qui intersectent x . Alors par définition on a $f_V \equiv f_{T(h)} \times f_{T(b)}$, et par récurrence une inclusion $i_{T(n_r)V} : f_V \rightarrow f_{T(n_r)}$. La composition

$$f_{T(n)} \times f_{T(b)} \xrightarrow{\equiv} f_V \xrightarrow{i_{T(n_r)V}} f_{T(n_r)}$$

définit $i_{\beta\alpha}$.

Selon Stasheff [St], le complexe ∂K_n obtenu est homéomorphe à S^{n-3} ; définissons $K_n = f_{T(n)}$ comme l'intérieur de cette sphère, c'est-à-dire $f_{T(n)}$ est une $(n - 2)$ -cellule dont la frontière est ∂K_n .

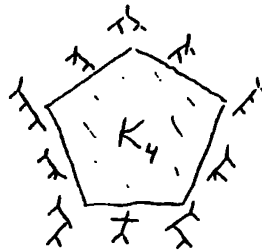


Fig. 9

Stasheff donne des modèles explicites pour les K_n . Voyons maintenant que les \overline{B}_n^p le sont aussi.

III. Les strates des \overline{B}_n^p

Nous définirons maintenant une fonction $\alpha : \overline{B}_n^p \longrightarrow \mathcal{A}_n$, dont les images inverses sont les strates s_α de \overline{B}_n^p , $\alpha \in \mathcal{A}_n$. Soit $b = \{h_i\} \in \overline{B}_n^p$, alors (voir fig. 2) $\alpha(b)$ est l'arbre qui fournit un 1-squelette de $\mathbb{H} - \bigcup_i \text{int}(h_i)$; la tête de $\alpha(b)$ correspond à la région de $\mathbb{H} - \bigcup_i \text{int}(h_i)$ dont le bord est l'axe réel positif. Evidemment, on a $s_{T(n)} = B_n^p$, un ouvert dans B_n . La proposition qui suit nous rappelle la définition des f_α de la section II.

10. PROPOSITION. — s_α est difféomorphe à $\prod_{i \in n(\alpha)} B_{n_i}^p$, et donc est une variété C^∞ ouverte, de dimension $|\alpha|$.

Démonstration. — Pour cette preuve, donnons à l'ensemble $n(\alpha)$ des sommets intérieurs l'ordre \leftarrow "de haut en bas, de gauche à droite" (voir fig. 7, où l'ordre alphabétique des éléments de $n(\alpha)$ est aussi l'ordre \leftarrow).

Nous définissons $F_\alpha : \prod_{i \in n(\alpha)} B_{n_i}^p \longrightarrow s_\alpha$: soit $(b_i) \in \prod B_{n_i}^p$,

$(b_i) = (b_1, \dots, b_{\#n(\alpha)})$, $i \leftarrow i + 1$. D'abord, on construit b_1 . Alors, on descend à la région dans $\mathbf{H} - \cup \text{int}(h_i)$ qui correspond au sommet 2. Elle est bordée par deux horocercles de b_1 ; normalisons-les, puis mettons b_2 dedans. On continue ainsi (voir fig. 11); F_α est bien-définie, et bijective. ■

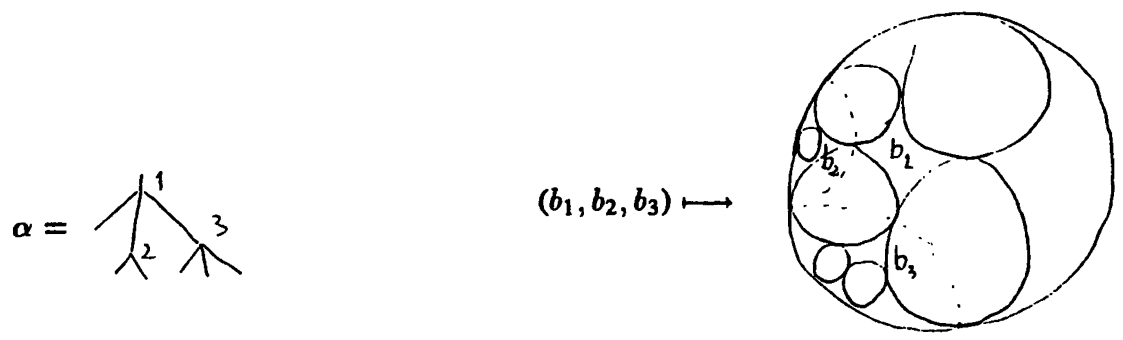


Fig. 11

Démonstration du théorème 3. — Enoncé : il existe un homéomorphisme $\overline{B}_n^p \rightarrow K_n$ qui envoie \overline{s}_α sur f_α , $\alpha \in \mathcal{A}_n$.

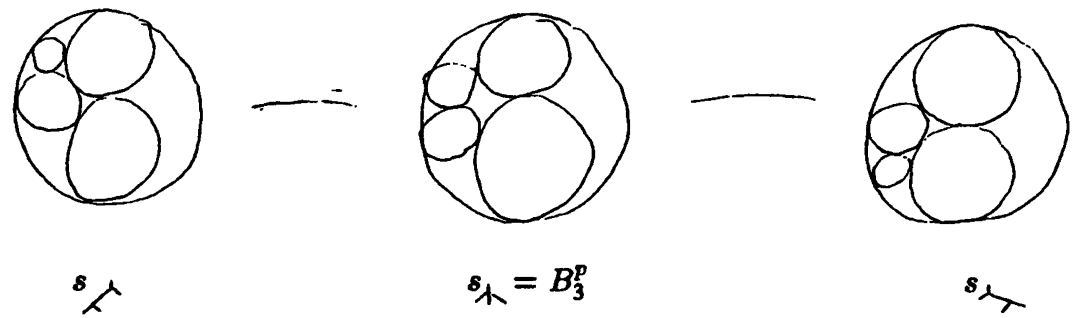
Par récurrence : commençons avec $n = 2, n = 3$:

$n = 2$

$$K_2 = * = f_{T(2)}, \quad B_2 = B_2^t = \overline{B}_2^p = \left\{ \text{diagram of a circle with two smaller circles inside} \right\}$$

$n = 3$

$$K_3 = \text{diagram of a tree with root 1 and children 2, 3, where 2 has two children of its own}$$



Supposons par récurrence, que pour $\alpha \in \mathcal{A}_j$, $2 \leq j \leq n - 1$ on a un homéomorphisme $h_\alpha : f_\alpha \rightarrow \overline{s}_\alpha$ tel que si $\alpha < \beta$, $h_\beta \circ i_{\beta\alpha} = h_\alpha$. On définit $h : \partial K_n \rightarrow B_n^t$ en écrivant $f_\alpha = \prod f_{T(x_i)}$, $s_\alpha = \prod B_{n_i}^p$, $h|_{\text{int} f_\alpha} \equiv \prod h_{T(n_i)}$. Par récurrence, h est un homéomorphisme. Alors, B_n^t est homéomorphe à un S^{n-3} . Mais aussi, B_n^t est la frontière (topologique) de B_n^p dans $B_n = \mathbf{R}^{n-2}$, et donc B_n^p est une boule ouverte dans B_n . D'où l'existence d'une extension de h à K_n . ■

Références

- [B] BROWN K. — *Finiteness properties of groups*, J. Pure and Applied Alg., 44 (1987), 45–75.
 [G] GREENBERG P. — *Primer on CPP geometry*, Preprint, Bielefeld, 1991.
 [L] LEE C.W. — *The associahedron and triangulations of the n -gon*, Europ. J. Comb., 10 (1989), 551–560.
 [St] STASHEFF J. — *Homotopy associativity of H -spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 275–292; *ibid* 108 (1963), 293–312.

Appendice – Géographie des Bracelets

Pour ceux que cela intéresse, on donne ici une paramétrisation des espaces B_n . Nous présentons seulement les résultats de certains calculs, dont les détails apparaîtront (peut-être) ailleurs.

Soit $b \in B_n$. L'arc $a(b)$ (voir fig. 1) se divise en $n+1$ sous-arcs $a_i \subset h_i$. Soit ℓ_i la longueur de l'arc $a_i(b)$, et soit $\ell(b) = (\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$. L'application ℓ est un plongement de B_n dans $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$. En posons $n=2$, on trouve $\ell(b) = (1, 1, 1)$ (il n'y a qu'un seul bracelet). Avec $n=3$, on trouve $\ell(b) = (\ell_1(b), 2/\ell_1(b), \ell_1(b), 2/\ell_1(b))$. Or, le plongement $p_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{R}^+)^4$ défini par $p_3(\sigma) = (\sigma, 2/\sigma, \sigma, 2/\sigma)$ fournit une paramétrisation de B_3 . En général, on trouve :

A.1. Résultat. — Soit $p_n : (\mathbb{R}^+)^{n-2} \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ définie par

$$p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}) = \left(\sigma_1, \frac{1+\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1+\sigma_3}{\sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_{j-2}+\sigma_j}{\sigma_{j-1}}, \dots, \frac{\sigma_{n-4}+\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-3}}, \right. \\ \left. \frac{1+\sigma_{n-3}}{\sigma_{n-2}}, \sigma_{n-2}, \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_j\sigma_{j+1}} + \dots + \frac{1}{\sigma_{n-2}} \right).$$

Alors p_n est un plongement, dont l'image est $\ell(B_n)$.

Quelques remarques suivent :

1. — Des paramétrisations p_n , on tire des équations qui définissent les $\ell(B_n)$; on trouve facilement, par exemple, que

$$B_4 = \left\{ (\ell_1, \dots, \ell_5) \mid \ell_2 = \frac{1+\ell_4}{\ell_1}, \ell_3 = \frac{1+\ell_1}{\ell_4}, \ell_5 = \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_1\ell_2} \right\}.$$

2. — En posant $L(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = \sum_1^{n+1} \ell_i$, la longueur de l'arc $a(b)$ est $L(\ell(b))$. On trouve que la fonction $L \circ p_n$ est de Morse, avec un seul point singulier, un minimum. Le bracelet minimal b_{\min} est symétrique, invariant par un élément de $\text{Isom}(\mathbb{H})$ d'ordre $n+1$, et $p_n(b_{\min}) = (2 \cos \pi/n+1, \dots, 2 \cos \pi/n+1)$, $L p_n(b_{\min}) = 2(n+1) \cos(\pi/n+1)$.

3. — Le plongement p_n nous fournit une action curieuse de $\mathbb{Z}/n+1$ sur $(\mathbb{R}^+)^{n-2}$. Or, si $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = \ell(b)$, $b \in B_n$ alors il existe $b' \in B_n$ tel que $\ell(b') = (\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{n+1}, \ell_1)$, et donc l'automorphisme *rot* de $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$, défini par

$rot(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = (\ell_2, \dots, \ell_{n+1}, \ell_1)$ envoie $\ell(B_n)$ à lui-même, donnant ainsi un automorphisme d'ordre $n + 1$ de $(\mathbb{R}^+)^{n-2} = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2})\}$.

Soit $\{\ell_i\}$ les fonctions "coordonnées" de \mathbb{R}^{n+1} . Alors, $\ell_i rot(p_n(\sigma)) = \ell_{i+1}(p_n(\sigma))$, $\ell_{n+1} rot(p_n(\sigma)) = \ell_1(p_n(\sigma))$, $\sigma \in (\mathbb{R}^+)^{n-2}$. On trouve, par exemple, avec $n = 5$

$$rot(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left(\frac{1 + \sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2 \sigma_3} + \frac{1}{\sigma_3} \right)$$

un automorphisme d'ordre 6.

4. — On peut examiner les strates (ou plutôt leurs extensions comme sous-variétés analytiques de B_n) avec l'aide des plongements p_n . Soit par exemple

$\alpha = \begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix}$; on considère $s_\alpha \in B_5$ (voir fig. A.2). Si $b \in s_\alpha$, la proposition 10 exprime b comme $b = (b_1, b_2) \in B_3 \times B_3$.

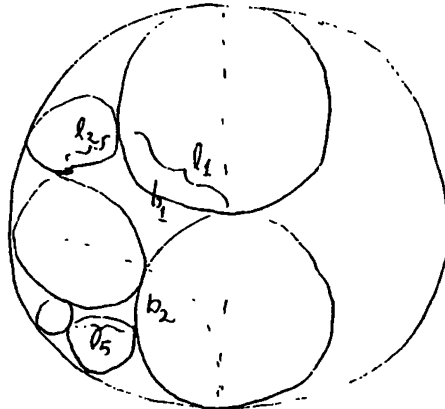
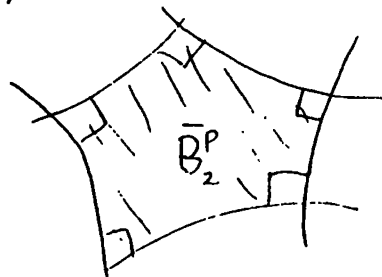


Fig. A.2 – Un bracelet de s

On trouve donc $\ell_2 = 2/\ell_1$, $\ell_3 = \ell_1 + \ell_5$ d'où $\sigma_2 = 1$, et alors $p_5^{-1} \ell(s_\alpha)$ est un ensemble ouvert dans $\{(\sigma_1, 1, \sigma_3)\}$.

On peut aussi calculer que dans $(\mathbb{R}^+)^5$ les strates de dimension 1 de B_2 s'intersectent en formant un angle de $\pi/2$:



D'où (et des autres calculs) la conjecture que les \overline{B}_n^p sont des variétés stratifiées dans le sens de Whitney ("condition (b)", par exemple).