

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

CELSO COSTA

Surfaces minimales dans $\mathbf{R}^3$

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 53-91

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__53_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1988-1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURFACES MINIMALES DANS $\mathbb{R}^3$

par Celso COSTA

1. Introduction

Lagrange en 1760, trouve l'équation différentielle d'une surface minimale.

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe avec coordonnées $(u_1, u_2) \in D$, $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ la surface donnée par le graphe de f

$$X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)) .$$

Alors l'aire A de X est donnée par

$$A = \int_D \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 du_2 = \int_D \sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2} du_1 du_2 ,$$

où $g_{ij} = \langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \rangle = \langle X_{u_i}, X_{u_j} \rangle$, $i, j = 1, 2$.

Soit $\eta : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $\eta/\partial D = 0$. Alors

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t, u_1, u_2) = f(u_1, u_2) + t\eta(u_1, u_2)$$

definit une variation à un paramètre de f , avec ∂D fixe. On écrit

$$f^t : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^t(u_1, u_2) = F(t, u_1, u_2) ,$$

alors l'aire $A(t)$ de la surface X_t définie par le graphe de f^t est donnée par

$$A(t) = \int_D [1 + (f_{u_1}^t)^2 + (f_{u_2}^t)^2]^{1/2} du_1 du_2 .$$

Nous avons,

$$f_{u_j}^t = f_{u_j} + t\eta_{u_j}, \quad j = 1, 2 .$$

Alors, en utilisant la notation classique

$$p = f_{u_1}, \quad q = f_{u_2} \quad \text{et} \quad w = (1 + p^2 + q^2)^{1/2} ,$$

on trouve que

$$\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} = A'(0) = \int_D \left[\left(\frac{p}{w}\right)\eta_{u_1} + \left(\frac{q}{w}\right)\eta_{u_2} \right] du_1 du_2 .$$

DÉFINITION 1. — Si $A'(0) = 0$, pour toutes les variations η , avec $\eta/\partial D = 0$, on dit que X est une surface minimale.

On observe que

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \eta \right) = \left(\frac{p}{w} \right) \eta_{u_1} + \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \right) \eta$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \eta \right) = \left(\frac{q}{w} \right) \eta_{u_2} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \right) \eta .$$

Alors

$$A'(0) = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \eta \right) \right] du_1 du_2 - \int_D \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \right) \right] \eta du_1 du_2 .$$

Le premier terme du deuxième membre de l'égalité ci-dessus est nul. Pour montrer cela, on utilise la 1-forme différentielle

$$\zeta = - \left(\frac{q}{w} \eta \right) du_1 + \left(\frac{p}{w} \eta \right) du_2 .$$

Nous avons

$$d\zeta = \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \eta \right) \right] du_1 du_2 .$$

Alors, le théorème de Stokes et $\eta/\partial D \equiv 0$ entraînent que

$$\int_D d\zeta = \int_{\partial D} \zeta = 0 .$$

Donc, si X est une surface minimale, nous avons

$$A'(0) = - \int_D \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \right) \right] \eta du_1 du_2 = 0 .$$

Cela entraîne que

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \right) = 0 .$$

On peut obtenir cette dernière conclusion par des arguments canoniques. Si en un point $p \in D$ nous avons $\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{q}{w} \right) > 0$, par exemple, alors il existe un petit disque $D(p)$ centré sur p tel que la même inégalité est encore vraie. Soit $V(p)$ un autre disque tel que $D(p) \subset V(p) \subset D$. Alors on peut trouver une C^2 -fonction $\eta : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta/D(p) = 1$ et $\eta/D(p) - V(p) = 0$. Avec cette fonction η nous obtenons $A'(0) > 0$. Donc (1.1) est vraie.

L'équation (1.1) développée nous donne l'équation de Lagrange pour les surfaces minimales :

$$(1.2) \quad (1 + f_{u_1}^2) f_{u_2 u_2} + (1 + f_{u_2}^2) f_{u_1 u_1} - 2 f_{u_1} f_{u_2} f_{u_1 u_2} = 0 .$$

2. Surfaces minimales et courbure moyenne

Meusnier en 1776 montre que l'équation (1.2) est équivalente à ce que la courbure moyenne H de la surface X soit nulle.

Soit $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, une fonction de classe C^2 , $X = (X_1, X_2, X_3)$ telle que

$$(2.1) \quad X_{u_1} \wedge X_{u_2} \neq 0.$$

Alors, X définit une *surface locale*, $S = X(D)$, immergée dans $\mathbb{R}^3$. L'espace tangent à S , $T_{X(p)}S$, au point $X(p)$, $p \in D$, est engendré par X_{u_1} et X_{u_2} ;

$$T_{X(p)}S = \{a.X_{u_1} + b.X_{u_2} \in \mathbb{R}^3 ; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Une courbe α de classe C^k , $k \geq 1$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est simplement une fonction $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k . Soit $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^2 , telle que $\alpha(t) \in S$, $\forall t$ et $\alpha(0) = X(p) = q \in S$. Alors, de (2.1), si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit il existe une courbe $\beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow D$, $\beta(t) = (u_1(t), u_2(t))$ telle que $X(t) = X(\beta(t)) = \alpha(t)$. Le vecteur tangent à la courbe $\alpha(t)$ au point $\alpha(t_0)$ est donné par

$$(2.2) \quad \alpha'(t_0) = \left. \frac{dX}{dt} \right|_{t=t_0} = u'_1(t_0).X_{u_1} + u'_2(t_0).X_{u_2}.$$

La longueur L de α est donnée par l'intégrale

$$L = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{dX}{dt} \right| dt.$$

On peut définir une fonction $s : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow [0, L]$, par

$$s(t) = \int_{-\varepsilon}^t \left| \frac{dX}{dt} \right| dt.$$

Nous avons $s'(t) = \left| \frac{dX}{dt} \right| \geq 0$. Si la courbe α est régulière ($\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t$) alors $s'(t) > 0$, la fonction s est strictement croissante et on peut définir l'inverse $t(s)$, $t : [0, L] \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$. Nous avons le diagramme

$$[0, L] \xrightarrow{t(s)} [-\varepsilon, \varepsilon] \xrightarrow{\alpha(t)} \mathbb{R}^3,$$

qui définit une autre courbe $X(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur S . Nous avons

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \text{et} \quad \left| \frac{dX}{ds} \right| = 1.$$

Dans cette condition, on dit que la courbe $X(s)$ est paramétrisée "par longueur d'arc". On a aussi

$$\frac{dX}{ds} = u'_1(s).X_{u_1} + u'_2(s).X_{u_2}$$

et

$$(2.3) \quad \frac{d^2 X}{ds^2} = u''_1(s).X_{u_1} + u''_2(s).X_{u_2} + [u'_1(s)]^2.X_{u_1 u_1} + 2u'_1(s)u'_2(s).X_{u_1 u_2} + [u'_2(s)]^2.X_{u_2 u_2}.$$

D'autre part, soit la fonction $N : S \rightarrow S^2$ donnée en coordonnées locales $(u_1, u_2) \in D$ par,

$$N(u_1, u_2) = \frac{X_{u_1} \wedge X_{u_2}}{|X_{u_1} \wedge X_{u_2}|}.$$

N définit un champ de vecteurs normaux sur la surface S . On appelle N la fonction normale de Gauss. On observe que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$. Alors, de (2.3), on trouve qu'au long de la courbe $X(s)$, on a

$$\left\langle \frac{d^2 X}{ds^2}, N \right\rangle = \sum_{i,j} b_{ij}(X(s)) u'_i(s) \cdot u'_j(s), \quad i, j = 1, 2,$$

où

$$b_{ij} = b_{ij}(X(s)) = \langle X_{u_i u_j}, N \rangle.$$

Si on fait le calcul pour la valeur $t = 0$, correspondant au point $\alpha(0) = X(p) \in S$ et en rappelant que,

$$[s'(t)]^2 = \left| \frac{dx}{dt} \right|^2 = \sum_{i,j} g_{ij} u'_i(t) u'_j(t)$$

et que $\frac{du_i}{ds} = \frac{du_i}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1}$, alors

$$(2.4) \quad \left\langle \frac{d^2 X}{ds^2}, N \right\rangle = \frac{\sum_{i,j} b_{ij}(X(p)) u'_i(0) u'_j(0)}{\sum_{i,j} g_{ij} u'_i(0) u'_j(0)}$$

Le numérateur de l'expression (2.4) est une forme quadratique sur l'espace tangent $T_{X(p)}S$. La matrice de cette forme dans la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$ est donnée par les scalaires b_{ij} . On appelle cette forme la deuxième forme fondamentale $\pi_{X(p)}$ pour la surface S au point $X(p) = q \in S$

$$\pi_q : T_q S \rightarrow \mathbf{R}, \quad \pi_q(v) = \sum_{i,j} b_{ij} v_i v_j, \quad v = v_1 X_{u_1} + v_2 X_{u_2}.$$

On observe que la 2×2 matrice $(b_{ij} = (b_{ij}(q)))$ dépend seulement de X_{u_i} et $X_{u_i u_j}$ au point $q = X(p)$. Donc π_q dépend de la façon dont S est immergée dans $\mathbf{R}^3$ dans un voisinage de $q = X(p)$.

Le dénominateur de l'expression (2.4) est une forme quadratique aussi sur $T_q S$, on appelle cette forme, la première forme fondamentale I_q de la surface S au point $X(p) = q$,

$$I_q : T_q S \rightarrow \mathbf{R}, \quad I_q(v) = \langle v, v \rangle^{1/2}.$$

Donc I_q mesure la longueur des vecteurs tangents à S au point $X(p)$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique dans l'espace $\mathbf{R}^3$.

A cause de l'homogénéité par rapport à $u'_j(0)$ du deuxième membre (tout entier) de (2.4), on voit que ce membre dépend seulement de la direction déterminée par le vecteur $v = u'_1(0)X_{u_1} + u'_2(0)X_{u_2}$. Alors si $T \in T_{X(p)}S$ est un vecteur unitaire, on définit la courbure normale $k(T)$ de S au point $X(p)$ dans la direction T , par

$$(2.5) \quad k(T) = \left\langle \frac{d^2 X}{ds^2}, N \right\rangle = \frac{\pi_q(T)}{I_q(T)}.$$

Si T varie en $T_{X(p)}S$, avec $|T| = 1$, on obtient les valeurs

$$k_1 = \max_T k(T), \quad k_2 = \min_T k(T),$$

qu'on appelle les courbures principales de la surface S au point $X(p)$. Comme ces courbures sont, respectivement, le maximum et le minimum du quotient de deux formes quadratiques, alors les vecteurs directions $v_1, v_2 \in T_{X(p)}S$, $|v_1| = |v_2| = 1$ tels que $k_j = k(v_j)$, $j = 1, 2$, sont orthogonales. On définit alors la courbure moyenne H et la courbure Gaussienne K au point $X(p)$ par, respectivement,

$$(2.6) \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{et} \quad K = k_1 \cdot k_2.$$

Maintenant, on retourne à l'équation (2.4) pour obtenir l'expression pour H et K . Les valeurs maximum et minimum k_1 et k_2 sont les racines μ de l'équation

$$\det(b_{ij} - \mu g_{ij}) = 0.$$

Nous avons, alors que

$$(2.7) \quad \det(g_{ij}\mu^2 - (g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12})\mu + \det(b_{ij})) = 0.$$

Pour la somme et le produit des racines nous avons

$$(2.8) \quad H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2\det(g_{ij})}, \quad K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Soit une surface $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par le graphe d'une C^2 -fonction $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Donc,

$$X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X_{u_1} &= (1, 0, f_{u_1}), \quad X_{u_2} = (0, 1, f_{u_2}), \quad X_{u_1 u_1} = (0, 0, f_{u_1 u_1}) \\ X_{u_1 u_2} &= (0, 0, f_{u_1 u_2}), \quad X_{u_2 u_2} = (0, 0, f_{u_2 u_2}) \\ N &= \frac{X_{u_1} \times X_{u_2}}{|X_{u_1} \times X_{u_2}|} = \frac{1}{w}(-f_{u_1}, -f_{u_2}, 1); \quad w = \sqrt{1 + (f_{u_1}^2 + (f_{u_2})^2)}. \end{aligned}$$

Alors, comme $g_{ij} = \langle X_{u_i}, X_{u_j} \rangle$, $b_{ij} = \langle N, X_{u_i u_j} \rangle$, $i, j = 1, 2$, nous trouvons que

$$g_{11} = 1 + (f_{u_1})^2, \quad g_{12} = g_{21} = f_{u_1} f_{u_2}, \quad g_{22} = 1 + (f_{u_2})^2$$

et

$$b_{11} = \frac{1}{w} f_{u_1 u_1}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{1}{w} f_{u_1 u_2}, \quad b_{22} = \frac{1}{w} f_{u_2 u_2}.$$

Ainsi, nous trouvons

$$(2.9) \quad g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} = \frac{1}{w} \left\{ [1 + (f_{u_1})^2] f_{u_2 u_2} + [1 + (f_{u_2})^2] f_{u_1 u_1} - 2f_{u_1} f_{u_2} f_{u_1 u_2} \right\}.$$

Cette dernière expression avec les résultats (2.8) et (1.2) montrent que la surface S donnée par le graphe est minimale (un point stationnaire pour la fonction aire) si et seulement si sa courbure moyenne H est nulle partout.

Maintenant, si $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$ est une surface dans $\mathbb{R}^3$, à cause de la propriété $X_{u_1} \wedge X_{u_2} \neq 0$, pour chaque point $p \in D$ on peut trouver un voisinage $V(p) \subset D$ tel que $X/V(p)$ soit injective et le morceau de surface $S_1 = X(V(p))$ a une projection injective sur le plan tangent $T_{X(p)}S$. Alors S_1 est donnée par le graphe d'une

fonction définie dans un voisinage du plan $T_{X(p)}S$. Après une isométrie de déterminant positive de l'espace $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que $T_{X(q)}$ est parallèle au plan $X_3 = 0$. C'est facile de voir qu'une isométrie de déterminant positive ne change pas la première forme fondamentale (longueur des vecteurs) ni la deuxième forme fondamentale (la façon comme la surface est immergée dans $\mathbb{R}^3$). Donc on peut élargir la définition de surfaces minimales : (voir définition 1).

DÉFINITION 2. — Soit $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^2 tel que $X_{u_1} \wedge X_{u_2} \neq 0$. Alors la surface immergée $S = X(D)$ est une surface minimale si et seulement si $H = 0$.

3. Exemples de surfaces minimales

On regarde les problèmes suivants :

(A) Trouver une surface minimale donnée par le graphe d'une fonction de classe C^2 , f , de telle façon que les courbes de niveau de f sont des droites.

(B) Quelles sont les surfaces minimales de révolution?

(C) Trouver une solution de l'équation (1.2) par la méthode de séparations de variables.

Solution du problème (A) (Meusnier 1776).

Soit $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ une surface minimale ayant la propriété additionnelle que toutes les courbes de niveau sont des droites. De l'équation des surfaces minimales (1.2) nous avons que

$$(3.1) \quad \Delta f = f_{u_1 u_1} + f_{u_2 u_2} = -(f_{u_1})^2 f_{u_2 u_2} - (f_{u_2})^2 f_{u_1 u_1} + 2 f_{u_1} f_{u_2} f_{u_1 u_2}$$

où Δ est l'opérateur laplacien dans $\mathbb{R}^2$.

Soit une courbe de niveau $\alpha(s)$ de la surface. Comme α est une droite parallèle au plan de coordonnées (u_1, u_2) , il existe $0 \leq \theta \leq \pi$ et $p_0 \in D$ tels que

$$\alpha(s) = p_0 + s(\cos \theta, \sin \theta), \quad f(\alpha(s)) = \text{cte.}$$

Alors, le calcul de la dérivée première et de la dérivée deuxième de $f(\alpha(s)) = \text{cte}$ par rapport à s , donne les équations,

$$\cos \theta f_{u_1} + \sin \theta f_{u_2} = 0$$

et

$$\cos^2 \theta f_{u_1 u_1} + 2 \cos \theta \cdot \sin \theta f_{u_1 u_2} + \sin^2 \theta f_{u_2 u_2} = 0.$$

Si on élimine θ dans ces équations (en rappelant que $0 \leq \theta \leq \pi$) et en utilisant (3.1) on trouve que

$$\Delta f = 0.$$

Finalement, la seule solution du problème $\Delta f = 0$, avec la condition que les courbes de niveau soient des droites, est que

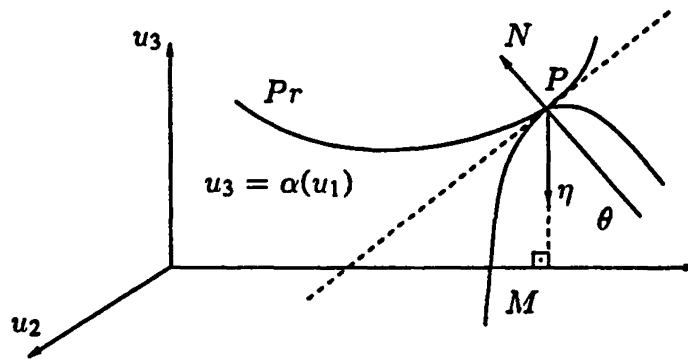
$$f(u_1, u_2) = A \arctan \frac{u_2 - a}{u_1 - b} + B, \quad a, b, A, B \in \mathbb{R}.$$

Le graphe de cette fonction est un plan ($A = 0$) ou la portion d'un hélicoïde d'équation

$$\begin{aligned} u_1 - a &= v_1 \cos v_2 \\ u_2 - b &= v_1 \sin v_2 \\ u_3 - B &= A v_2. \end{aligned}$$

Solution du problème (B) (Meusnier 1776).

Soient $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $u_3 = \alpha(u_1)$ où α est une courbe régulière ($\alpha'(u_1) \neq 0$) de classe C^2 , $\alpha(u_3) > 0$. Alors, la rotation de α autour de l'axe u_1 va engendrer une surface de révolution S . On suppose cette surface minimale.



Dans le dessin ci-dessus M est le méridien de la surface engendrée par la rotation du point P , η est le vecteur normal à la courbe plane M , Pr est la courbe α qui est un parallèle de la surface. En géométrie différentielle classique, on montre (Do Carmo [8]) que ces courbes sont lignes de courbure principales de S . Le méridien M est une courbe plane (un cercle de rayon $u_3 = \alpha(u_1)$). Donc sa courbure est $1/\alpha(u_1)$. La courbure principale de S au point P selon la direction donnée par M sera :

$$(3.2) \quad k_1 = \frac{1}{\alpha(u_1)} \cdot \cos(\pi - \theta).$$

L'équation pour le parallèle Pr est

$$(3.3) \quad \beta(u_1) = (u_1, 0, \alpha(u_1)), \quad \beta'(u_1) = (1, 0, \alpha'(u_1)).$$

Donc

$$\cos \theta = \frac{\langle (1, 0, 0), \beta'(u_1) \rangle}{|\beta'(u_1)|} = \frac{1}{[1 + (\alpha'(u_1))^2]^{1/2}}.$$

De (3.2) nous trouvons

$$(3.4) \quad k_1 = -\frac{1}{\alpha(u_1)[1 + (\alpha'(u_1))^2]^{1/2}},$$

pour la première courbure principale de S au point p .

Pour le parallèle Pr , on observe que le vecteur N appartient au plan (u_1, u_3) et il est normal à la tangente à la courbe Pr . Donc la courbure de Pr est la courbure normale au point p dans la direction définie par Pr . Alors la deuxième courbure principale k_2 coïncide avec la courbure de la courbe β donnée en (3.3). On observe que β n'est pas paramétré, en général, par la longueur d'arc. Sa courbure est (voir Do Carmo [8]),

$$(3.5) \quad k_2 = \frac{\alpha''(u_1)}{[1 + (\alpha'(u_1))^2]^{3/2}}.$$

Comme S est minimale alors $k_1 = -k_2$ et (3.4), (3.5) entraînent que

$$\frac{\alpha''}{1 + (\alpha')^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{soit} \quad \frac{\alpha' \alpha''}{1 + (\alpha')^2} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Maintenant si

$$\omega(u_1) = 1 + [\alpha'(u_1)]^2, \quad \text{alors} \quad \frac{\omega'}{\omega} = 2 \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Donc

$$\log \omega = \log(A\alpha)^2 \implies \omega(u_1) = [A\alpha(u_1)]^2, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$1 + (\alpha')^2 = (A\alpha)^2 \implies \frac{(\alpha')^2}{A^2 \alpha^2 - 1} = 1 \implies \frac{A\alpha'}{(A^2 \alpha^2 - 1)^{1/2}} = \pm A.$$

Donc

$$\cos h^{-1}(A\alpha(u_1)) = \pm Au_1 + B, \quad B \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(u_1) = \frac{1}{A} \cos h(\pm Au_1 + B), \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0.$$

La courbe $\alpha(u_1), u_1 \in \mathbb{R}$ est la chaînette et la surface minimale engendrée est le catenoïde.

Solution du problème (C) (Scherk 1835).

On suppose que la solution de l'équation différentielle (1.2) est de la forme

$$f(u_1, u_2) = h(u_1) + g(u_2),$$

où g et h sont des fonctions de classe C^2 . Alors,

$$f_{u_1} = h_{u_1}, \quad f_{u_2} = g_{u_2}, \quad f_{u_1 u_1} = h_{u_1 u_1}, \quad f_{u_1 u_2} = 0, \quad \text{et} \quad f_{u_2 u_2} = g_{u_2 u_2}.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (1.2) nous avons

$$\frac{h_{u_1 u_1}}{1 + h_{u_1}^2} = -\frac{g_{u_2 u_2}}{1 + g_{u_2}^2}.$$

Le premier membre de l'équation ci-dessus dépend de la variable u_1 et en revanche le deuxième membre dépend de la variable u_2 . Donc, ils sont égaux à une constante $a \in \mathbb{R}$. Pour $a = 0$ la solution sera un plan dans $\mathbb{R}^3$. Pour $a \neq 0$, nous avons

$$h(u_1) = \frac{1}{a} \log \cos au_1, \quad g(u_2) = \frac{1}{a} \log \cos au_2.$$

Alors

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{a} \log \frac{\cos au_2}{\cos au_1}, \quad \cos(au_j) \neq 0, \quad j = 1, 2.$$

La surface décrite par f est la surface de Scherk.

Pour finir cette partie, nous observons que le catenoïde a été découvert par Euler comme surface minimale en 1764. Meusnier en 1776 a découvert l'hélicoïde qui est une surface minimale simplement connexe et engendrée par des droites. Meusnier a donné une nouvelle démonstration de la minimalité du catenoïde. Ces deux exemples plus le plan sont restés les seuls exemples de surfaces minimales plongées dans $\mathbf{R}^3$ et à topologie finie connus jusqu'à 1985. La surface de Scherk, n'est pas définie si

$$u_1 = \frac{(2m-1)\pi}{2a}, \quad u_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Donc la surface de Scherk est de topologie infinie et plongée dans $\mathbf{R}^3$.

Deux problèmes ouverts et qui me semblent très difficiles sont :

Problème 1 : montrer que l'hélicoïde est la seule surface minimale complète plongée dans $\mathbf{R}^3$ et difféomorphe au plan.

Problème 2 : montrer que le catenoïde est la seule surface minimale complète plongée dans $\mathbf{R}^3$ et difféomorphe à un cylindre.

4. Représentations de Weierstrass

On continue à considérer un disque ouvert $D \subset \mathbf{R}^2$ et une surface immergée $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ (i.e. X est une C^2 -fonction et $X_{u_1} \wedge X_{u_2} \neq 0$). On dit que les paramètres $(u_1, u_2) \in D$ sont des paramètres isothermes pour la surface $S = X(D) \subset \mathbf{R}^3$ s'il existe une C^1 -fonction $\lambda : D \rightarrow \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, telle que

$$\langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle = \lambda^2(u_1, u_2), \quad \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0.$$

On a le théorème :

THÉORÈME 4.1. — Soit $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ une surface immergée, X de classe C^k , $k \geq 2$. Alors il existe un C^k -difféomorphisme $\varphi : \tilde{D} \rightarrow D$ tel que $\tilde{X} = X \circ \varphi$ est une surface minimale immergée et les paramètres $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \tilde{D}$ sont des paramètres isothermes.

On remarque que $\tilde{X}(D) = X(D) = S$. Une démonstration de ce théorème dans le cas où on admet en plus que X est minimale peut être trouver dans Ossermann [17]. Avec les hypothèses énoncées une démonstration se trouve dans Spivak [20], vol.4.

PROPOSITION 4.2. Soit $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ une C^2 -surface immergée où $(u_1, u_2) \in D$ sont des paramètres isothermes. Alors

$$(4.2) \quad \Delta X = (2\lambda^2 H)N$$

où $X = (X^1, X^2, X^3)$, $\Delta X^j = X_{u_1 u_1}^j + X_{u_2 u_2}^j$, $j = 1, 2, 3$ et N est le vecteur normal à la surface.

Preuve. — Comme (u_1, u_2) sont des paramètres isothermes pour la surface,

$$(4.3) \quad \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0, \quad \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle$$

La dérivée par rapport à u_1 de (4.3) nous donne

$$\langle X_{u_1 u_1}, X_{u_2} \rangle = \langle X_{u_1}, X_{u_1 u_2} \rangle = 0, \quad \langle X_{u_1 u_1}, X_{u_1} \rangle + \langle X_{u_1 u_2}, X_{u_2} \rangle$$

et la dérivée par rapport à u_2 nous donne

$$\langle X_{u_1 u_2}, X_{u_2} \rangle + \langle X_{u_1}, X_{u_1 u_2} \rangle = 0, \quad \langle X_{u_1 u_2}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_2 u_2}, X_{u_2} \rangle.$$

Les équations ci-dessus entraînent que

$$\langle \Delta X, X_{u_1} \rangle + \langle \Delta X, X_{u_2} \rangle = 0.$$

Donc le vecteur ΔX est parallèle à N . C'est-à-dire $\Delta X = \langle \Delta X, N \rangle N$. Alors,

$$(4.4) \quad \Delta X = \langle X_{u_1 u_1} + X_{u_2 u_2}, N \rangle N = (b_{11} + b_{22})N.$$

D'autre part, de (4.1) et (4.3) on a

$$g_{11} = g_{22} = \lambda^2 \quad \text{et} \quad g_{12} = 0,$$

et de (2.8) on a

$$(4.5) \quad H = \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2b_{12}g_{12}}{2\det(g_{ij})} = \frac{b_{11} + b_{22}}{2\lambda^2}.$$

Finalement, de (4.4) et (4.5), on arrive à

$$\Delta X = (2\lambda^2 H)N.$$

■

COROLLAIRE 4.3. — Soit $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ une C^2 -surface immergée, où $(u_1, u_2) \in D$ sont des paramètres isothermes. Alors X est une surface minimale si et seulement si les coordonnées X^1, X^2, X^3 de X sont des fonctions harmoniques ($\Delta X^j = 0$, $j = 1, 2, 3$).

Remarque. — Le corollaire entraîne que les coordonnées d'une surface minimale sont des fonctions analytiques réelles.

A partir de maintenant on va considérer toujours une surface immergée minimale $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ donnée en paramètres isothermes. Les fonctions coordonnées seront des fonctions harmoniques. On dira simplement que X est une surface minimale (simplement connexe).

Soit $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ une surface minimale, $X = (X^1, X^2, X^3)$. Alors on peut définir les trois fonctions complexes,

$$(4.6) \quad \varphi_j : D \rightarrow \mathbf{C}, \quad \varphi_j = X_{u_1}^j - iX_{u_2}^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

PROPOSITION 4.4. — *Les fonctions φ_j sont holomorphes et*

$$a) \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$$

$$b) |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 = 2\lambda^2 > 0.$$

Preuve. — On a $\Delta X^j = X_{u_1 u_1}^j + X_{u_2 u_2}^j = 0$, $j = 1, 2, 3$. Ces propriétés entraînent que φ_j vérifient la condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\operatorname{Re} \varphi_j) = \frac{\partial}{\partial u_2}(\operatorname{Im} \varphi_j), \quad \frac{\partial}{\partial u_2}(\operatorname{Re} \varphi_j) = -\frac{\partial}{\partial u_1}(\operatorname{Im} \varphi_j).$$

Donc φ_j sont holomorphes, $j = 1, 2, 3$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \varphi_j^2 &= \sum_{j=1}^3 \left[(X_{u_1}^j)^2 - (X_{u_2}^j)^2 - 2i X_{u_1}^j X_{u_2}^j \right] \\ &= \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle - \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle - 2i \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0 \end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^3 |\varphi_j|^2 = \sum_{j=1}^3 \left[(X_{u_1}^j)^2 + (X_{u_2}^j)^2 \right] = \sum_{i=1}^2 \langle X_{u_i}, X_{u_i} \rangle = 2\lambda^2 > 0.$$

■

Maintenant, on va résoudre l'équation (a) de la proposition (4.4). Soit $X = (X^1, X^2, X^3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale telle que $X(D)$ ne soit pas un plan. Ça veut dire, $X^3 \neq \text{cte}$ et $\varphi_3(z)$, $z = u_1 + iu_2$, est une fonction non nulle. Ça entraîne de (a) de la proposition (4.4) que $\varphi_1 - i\varphi_2$ est une fonction non nulle. On remarque qu'il peut y avoir des points isolés $z_0 \in D$, où $\varphi_1(z_0) - i\varphi_2(z_0) = 0$. On définit une paire (g, f) , $g : D \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ par les équations

$$(4.7) \quad g(z) = \frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z) - i\varphi_2(z)}, \quad f(z) = \varphi_1(z) - i\varphi_2(z).$$

Donc g est une fonction méromorphe sur D et f est une fonction holomorphe sur D . D'autre part de (a), proposition (4.4) il s'ensuit que

$$(4.8) \quad (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) = -\varphi_3^2 \quad \text{et} \quad -fg^2 = \varphi_1 + i\varphi_2.$$

Alors, $z_0 \in D$ est un pôle d'ordre m de g si et seulement si z_0 est un zéro d'ordre $2m$ de f . De (a), prop.(4.4) et de (4.7),

$$(4.9) \quad \varphi_1(z) = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \varphi_2(z) = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \varphi_3 = fg.$$

D'autre part de (4.4) si on fixe $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut déduire,

$$(4.10) \quad X^j(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \varphi_j(z) dz + a_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Pour voir ça on observe que, comme D est simplement connexe, $\psi_j(z) = \int_{z_0}^z \varphi_j(z) dz$ définit une fonction holomorphe sur D et $\psi_j' = \varphi_j$. Donc, comme $\psi_j'(z) = \frac{\partial}{\partial u_1}(\operatorname{Re} \psi_j) + i \frac{\partial}{\partial u_1}(\operatorname{Im} \psi_j) = \frac{\partial}{\partial u_1}(\operatorname{Re} \psi_j) - i \frac{\partial}{\partial u_2}(\operatorname{Re} \psi_j)$, on déduit de (4.6) qu'il existe $a_j \in \mathbb{R}$ tels que (4.10) soit vrai.

En résumé, on vient de démontrer le théorème :

THÉORÈME 4.5. — Soit $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale donnée en paramètres isothermes, $z = u_1 + iu_2 \in D$. Alors, il existe une fonction méromorphe g , une fonction holomorphe f sur D et $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$a) \quad X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left[\frac{1}{2} f(1 - g^2), \frac{i}{2} f(1 + g^2), fg \right] dz + a;$$

b) un point $g \in D$ est un pôle d'ordre m de g si et seulement si g est un zéro d'ordre $2m$ de f ;

c) la métrique de X est donnée par

$$I = ds^2 = \lambda^2 (du_1^2 + du_2^2) = \frac{1}{4} (1 + |g|^2)^2 |f|^2 |dz|^2;$$

d) g représente la fonction normale de Gauss de la surface.

Plus précisément, si $\pi : S^2 - \{(1, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ est la projection stéréographique par le pôle nord, alors $N = \pi^{-1} \circ g$.

Réciproquement, s'il existe une paire (g, f) , où g est une fonction méromorphe et f est une fonction holomorphe en D tel que la propriété (b) soit vérifiée alors l'équation (a) définit une surface minimale $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, la métrique est donnée par (c) et g est la normale de Gauss de X .

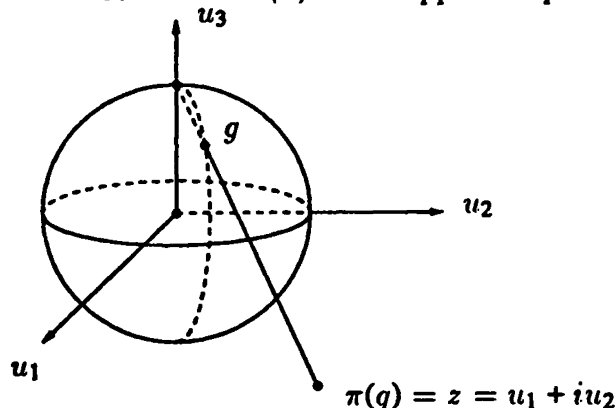
La paire (g, f) est ce qu'on appelle la "représentation de Weierstrass" de la surface minimale X .

Preuve. — Soit $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale. Alors on définit les fonctions analytiques φ_j comme en (4.6) et les fonctions g et f comme en (4.7). Les calculs antérieurs à l'énoncé du théorème montrent que (a) et (b) sont vraies. Pour montrer (c) on observe que de (b) de la proposition (4.4), de (4.7) et (4.8) :

$$\begin{aligned} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 &= [|f| + |fg^2|]^2 = [|\varphi_1 - i\varphi_2| + |\varphi_1 + i\varphi_2|]^2 \\ &= 2(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) = 4\lambda^2. \end{aligned}$$

Cela prouve (c) du théorème.

Pour montrer (d) nous rappelons que $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{(1, 0, 0)\}$ est donné par :



$$g = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3),$$

$$\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2 = 1$$

$$\pi^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2} (2u_1, 2u_2, |z|^2 - 1)$$

Donc,

$$\pi^{-1} \circ g = \frac{1}{1 + |g|^2} (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1) .$$

D'autre part, de (4.4)

$$X_{u_1} \wedge X_{u_2} = \operatorname{Im} \left\{ (\varphi_2 \bar{\varphi}_3, \varphi_3 \bar{\varphi}_1, \varphi_1 \bar{\varphi}_3) \right\} = \frac{|f|^2(1 + |g|^2)}{4} (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1) .$$

Donc

$$N = \frac{X_{u_1} \wedge X_{u_2}}{|X_{u_1} \wedge X_{u_2}|} = \frac{1}{1 + |g|^2} (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1) = \pi^{-1} \circ g .$$

Cela prouve (d) du théorème.

La démonstration de la réciproque est évidente à partir de tout ce qu'on a déjà montré. (exercice!) ■

5. Exemples

5.1. L'hélicoïde.

$D = \mathbb{C}$, $g(z) = -ie^z$ et $f = e^{-z}$. On observe que g n'a pas de pôles et f n'a pas de zéros. Nous avons

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)f = \cosh(z), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)f = -i \sinh(z), \quad \varphi_3 = gf = -i .$$

Alors

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \cosh z dz = \operatorname{Re}(\sinh z) = \cos u_2 \sinh u_1 ,$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \int_0^z -i \sinh z dz = \operatorname{Re}(-i \cosh z) = \sin u_2 \cosh u_1$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \int_0^z -i dz = \operatorname{Re}(-iz) = u_2, \quad z = u_1 + iu_2 .$$

Donc $X = (X^1, X^2, X^3) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface minimale et si on fait un changement de paramètres $\tilde{u}_1 = \sinh u_1$, $\tilde{u}_2 = \frac{1}{A} u_2$, on trouve l'équation de l'hélicoïde qu'on a décrit au paragraphe 3.

5.2. La surface de Scherk.

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{4}{1-z^4}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{2}{1+z^2} = \frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i} & X^1(z) &= \operatorname{Re} \left(i \log \frac{z+i}{z-i} \right) = -\arg \left(\frac{z+i}{z-i} \right) \\ \varphi_2(z) &= \frac{2i}{1-z^2} = \frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1} & \Rightarrow X^2(z) &= \operatorname{Re} \left(i \log \frac{z+1}{z-1} \right) = -\arg \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \\ \varphi_3(z) &= \frac{4z}{1-z^4} = \frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1} & X^3(z) &= \operatorname{Re} \left(\log \frac{z^2+1}{z^2-1} \right) = \log \left(\frac{|z^2+1|}{|z^2-1|} \right) \end{aligned}$$

On voit que $z \in D$ entraîne $|z|^2 - 1 < 0$ et

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z+i}{z-i} \right) = \frac{|z|^2 - 1}{|z-i|^2} < 0, \quad \operatorname{Re} \frac{z+1}{z-1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} < 0$$

Alors, $-3\pi/2 < X^j(z) < -\pi/2$, $j = 1, 2$. Aussi, on peut écrire

$$\cos X^1 = -\cos \arg \left(\frac{z+i}{z-i} \right) = -\frac{\operatorname{Re} \left(\frac{z+i}{z-i} \right)}{\left| \frac{z+i}{z-i} \right|} = \frac{-|z|^2 + 1}{|z+i||z-i|} = \frac{-|z|^2 + 1}{|z^2 + 1|}$$

et

$$\cos X^2 = -\cos \arg \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = -\frac{\operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)}{\left| \frac{z+1}{z-1} \right|} = \frac{-|z|^2 + 1}{|z+1||z-1|} = \frac{-|z|^2 + 1}{|z^2 - 1|}.$$

Donc

$$X^3 = \log \frac{|z^2 + 1|}{|z^2 - 1|} = \log \frac{\cos X^2}{\cos X^1},$$

et on retrouve l'équation de la surface de Scherk donnée au paragraphe 3.

Maintenant, on pose la question : quelle est la "représentation de Weierstrass" du catenoïde? Le problème est que le catenoïde est homéomorphe à $\mathbb{C} - \{0\}$, donc non simplement connexe. Il faut élargir la "représentation de Weierstrass" pour aborder ces domaines. On fera maintenant cette représentation dans le cadre d'un domaine donné par une surface de Riemann non compact, c'est-à-dire une surface compacte orientable de genre $\gamma \geq 0$ et avec des trous.

6. Surfaces comme une variété bidimensionnelle

DÉFINITION 6.1. — Une surface orientée M de classe C^k , $k \geq 1$ est un espace topologique de Hausdorff avec une base dénombrable de voisinage tel que

a) Chaque point de M a un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire il existe une collection $(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in I$, où U_α, V_α sont des ouverts de M et $\mathbb{R}^2$ respectivement, $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ est un homéomorphisme et $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

b) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ alors $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ est un C^k -difféomorphisme de déterminant positif. $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ est ce qu'on appelle un système de coordonnées locales de M et les triplets $(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in I$ donnent un atlas de classe C^k pour M . Avec cet atlas on peut définir en chaque point $q \in M$ un plan tangent bidimensionnel $T_q M$. Si $q \in U_\alpha$, alors la dérivée au point $\varphi_\alpha^{-1}(q) = p$ de φ_α est un difféomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^2$ et $T_q M$.

DÉFINITION 6.2. — Soit M une surface orientée. Une fonction $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion si pour toutes coordonnées locales $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ on a $X_{u_1} \wedge X_{u_2} \neq 0$, $(u_1, u_2) \in V_\alpha$, où $X(u_1, u_2) = X \circ \varphi_\alpha(u_1, u_2)$.

On observe alors que si $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion, d'après le théorème 4.1, on peut considérer que M est munie d'un atlas où tous les systèmes de coordonnées locales sont isothermes.

Si $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion, par le théorème de la fonction inverse, pour chaque point $q \in M$ il existe un voisinage $U(q) \subset M$ tel que $X/U(q) : U(q) \rightarrow X(U(q))$ est un homéomorphisme. Alors, au moins localement on peut identifier M et son image dans $\mathbb{R}^3$. Cela nous permet de définir une métrique sur M , donc la première forme fondamentale et la deuxième forme fondamentale sur M . Alors on a en chaque point de M une courbure gaussienne K et une courbure moyenne H . D'ailleurs ces courbures peuvent être obtenues aussi en utilisant des coordonnées locales.

Si $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion donnée en coordonnées isothermes alors par la proposition 4.2, on a localement

$$\Delta X = (2\lambda^2 H)N.$$

Donc une immersion $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée en coordonnées isothermes est minimale ($H = 0$) si et seulement si l'expression de X en chaque coordonnée locale est une fonction vectorielle harmonique.

DÉFINITION 6.3. — Soit M une surface orientée par un atlas $(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in I$. M est une surface de Riemann si toutes les changements de coordonnées sont des fonctions holomorphes; i.e., si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ alors $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ est holomorphe.

On voit que s'il existe une immersion $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, où M est une surface orientée, on peut toujours considérer M munie d'un atlas formé des coordonnées isothermes. Les coordonnées isothermes, par définition, préservent les angles de deux vecteurs, donc le changement de coordonnées les préservent aussi. Comme une fonction complexe qui préserve des angles et dont le déterminant de la matrice jacobienne est positif (M orientée) est une fonction holomorphe on obtient que M est une surface de Riemann.

D'ici jusqu'à la fin de ce travail, sauf mention contraire, on considère seulement les immersions $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ où M est une surface de Riemann non compacte.

On va développer quelques concepts et propriétés des surfaces de Riemann. Une surface de Riemann M est une variété bidimensionnelle orientée par un atlas formé de coordonnées isothermes locales, où les changements de coordonnées sont des fonctions holomorphes. On dit qu'une fonction continue $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ entre deux surfaces de Riemann M et $\widetilde{M}$ est une fonction holomorphe si pour chaque point $p \in M$ et pour un couple quelconque des coordonnées locales $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$, $\varphi_\beta : V_\beta \rightarrow U_\beta$ de M et $\widetilde{M}$ respectivement, $p \in U_\alpha$, $q = f(p) \in U_\beta$, on a que l'expression locale de f , $\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow V_\beta$ est une fonction holomorphe.

Deux surfaces de Riemann M et $\widetilde{M}$ sont "conformément équivalents", s'il existe un difféomorphisme holomorphe $f : M \rightarrow \widetilde{M}$. On observe que les projections stéréographiques par le pôle nord $(0, 0, 1)$ et par le pôle sud $(0, 0, -1)$, respectivement de la sphère unitaire $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sur le plan complexe $\mathbb{C}$, forment un atlas ayant

deux cartes de coordonnées isothermes. Alors S^2 est une surface de Riemann et $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$, $S^2 - \{(0, 0, -1)\}$ et $\mathbb{C}$ sont conformément équivalents entre eux. Evidemment $\mathbb{C}$ et toute surface compacte orientable sont des surfaces de Riemann.

De la même façon qu'on a défini une fonction holomorphe entre deux surfaces de Riemann, on peut définir une fonction *méromorphe* (fonctions dont les singularités sont des pôles). Par exemple si $f_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ sont deux polynômes alors f_1/f_2 et f_2/f_1 donnent deux fonctions méromorphes en $\mathbb{C}$. On dit aussi qu'une fonction réelle $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est *fonction harmonique* (*sous-harmonique*) si en coordonnées isothermes locales on a $\Delta f = 0$ ($\Delta f \geq 0$).

THÉORÈME FONDAMENTAL 6.4. — *Soit M une surface de Riemann simplement connexe. Alors M est conformément équivalente à $\mathbb{C}$, D ou S^2 , où $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ et $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \|x\| = 1\}$.*

Preuve. — Ahlfors et Sario [1].

DÉFINITION 6.5. — *Une surface de Riemann est :*

- a) *parabolique si son recouvrement universel conforme est $\mathbb{C}$;*
- b) *hyperbolique si son recouvrement universel conforme est D ;*
- c) *elliptique si son recouvrement universel conforme est S^2 .*

DÉFINITION 6.6. — *Soient M une surface de Riemann et $p_0 \in M$. Une fonction de Green, par rapport au point p_0 , est une fonction G , $G(p, p_0) : M \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

- a) *G est harmonique sur $M - \{p_0\}$ et*
- b) *si $\zeta(z)$ sont des coordonnées locales en p_0 telles que $\zeta(0) = p_0$, alors $G(\zeta(z), p_0) = -\frac{1}{2\pi} \log |z| + h(z)$, où h est une fonction harmonique.*

THÉORÈME 6.7. — *Soit M une surface de Riemann non compacte. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a) *M est hyperbolique ;*
- b) *il existe une fonction $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, sous-harmonique non constante et négative ;*
- c) *pour chaque point $p_0 \in M$ il existe une fonction de Green $G(p, p_0)$ avec $G(p, p_0) > 0$.*

Preuve. — L. Bers [3].

PROPOSITION 6.8. — *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine borné, $\varphi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une C^1 -fonction et*

$$U(z_0) = \int_D G(z, z_0) \varphi(z) dz .$$

Alors, U est de classe C^2 et solution du problème $\Delta u = -\varphi$.

Preuve. — Courant-Hilbert [7], vol. 1, page 365.

7. Surfaces minimales de courbure totale finie

DÉFINITION 7.1. — Soit $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ une immersion minimale, où K est la courbure gaussienne de X . La courbure totale $C(M)$ de X est

$$C(M) = \int_M |K| dM.$$

Pour calculer l'intégrale qu'on vient de définir, on calcule d'abord pour un petit voisinage, $U \subset M$ contenu dans un système de coordonnées locales $\zeta(z) : V \subset \mathbf{C} \rightarrow U$. Si $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$, $g_{12} = 0$ est la métrique

$$\int_U |K| dM = \int_V \sqrt{\det(g_{ij})} |K| du_1 du_2 = \int_V \lambda^2 |K| du_1 du_2, \quad z = u_1 + iu_2.$$

Ensuite, on utilise une partition de l'unité du recouvrement de M ainsi obtenu. Cette partition nous permet de définir l'intégrale comme une limite (cette limite peut être infinie).

PROPOSITION 7.2. — Soient $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ une immersion minimale, donnée en paramètres isothermes $u_1 + iu_2 \in D$ où D est simplement connexe et (g, f) la représentation de Weierstrass de X . Alors,

$$a) K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2;$$

$$b) K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda.$$

Preuve. — Si $X = (X^1, X^2, X^3)$, nous avons de (4.4), (4.6), (4.9) et (c) du théorème (4.5)

$$X_{u_1 u_1}^1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[f' - g^2 f' - 2gg'f], \quad X_{u_1 u_1}^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[f' + g^2 f' + 2gg'f]$$

$$X_{u_1 u_1}^3 = \operatorname{Re}[f'g + fg'], \quad X_{u_1 u_2}^1 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[f' - g^2 f' - 2gg'f]$$

$$X_{u_1 u_2}^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[f' + g^2 f' + 2gg'f], \quad X_{u_1 u_2}^3 = -\operatorname{Im}[f'g + fg'],$$

et

$$N = \frac{1}{1+|g|^2} (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1).$$

Alors,

$$b_{11} = \langle X_{u_1 u_1}, N \rangle = \langle -X_{u_2 u_2}, N \rangle = -b_{22} = -\operatorname{Re} g'f$$

$$b_{12} = \langle X_{u_1 u_2}, N \rangle = \langle X_{u_2 u_1}, N \rangle = b_{21} = \operatorname{Im} g'f$$

$$g_{jj} = \langle X_{u_j}, X_{u_j} \rangle = \lambda^2 = \frac{1}{4} [|f|(1+|g|^2)]^2 g_{12} = \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0, \quad 1 = 1, 2.$$

Donc si $\zeta(t) = \zeta_1(t) + i\zeta_2(t)$ est une courbe sur D , la première et deuxième forme fondamentale en $\zeta'(t) = \zeta'_1 + i\zeta'_2(t)$ nous donne

$$I(\zeta'(t)) = \sum_{i,j} g_{ij} \zeta'_i(t) \zeta'_j(t) = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2 |\zeta'(t)|^2$$

et

$$II(\zeta'(t)) = \sum_{i,j} b_{ij} \zeta'_i(t) \zeta'_j(t) = \operatorname{Re} \{ -f g' [\zeta'(t)]^2 \}.$$

La courbure normale de la surface selon la direction $(\zeta'_1(t), \zeta'_2(t))$ est

$$\frac{II(\zeta'(t))}{I(\zeta'(t))} = \left[\frac{2}{|f|(1+|g|^2)} \right]^2 \operatorname{Re} \{ -f g' e^{2i\alpha} \}, \quad \zeta'(t) = |\zeta'(t)| e^{i\alpha},$$

où $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. On en déduit que les valeurs maximales et minimales de la courbure normale, quand α varie entre 0 et 2π , sont respectivement

$$k_1 = \frac{4g'}{|f|(1+|g|^2)^2}, \quad k_2 = -\frac{4g'}{|f|(1+|g|^2)^2}.$$

Donc la courbure gaussienne $K = k_1 k_2$ est

$$(7.1) \quad K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2.$$

D'autre part, de (c) théorème 4.5, nous avons $\lambda = \frac{1}{4}(1+|g|^2)|f|$. Cela donne, après un long calcul :

$$(7.2) \quad \Delta \log \lambda = \frac{1}{\lambda} (\lambda_{u_1 u_1} + \lambda_{u_2 u_2}) - \frac{1}{\lambda^2} (\lambda_{u_1}^2 + \lambda_{u_2}^2) = -\lambda^2 K.$$

■

Nous remarquons que la propriété (b) est vraie seulement avec les faibles hypothèses : $X: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface donnée en paramètres isothermes, voir Spivak, [20].

Maintenant, notre but est d'écrire la représentation de Weierstrass d'une façon plus générale, *i.e.* pour une immersion minimale $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, où M est une surface de Riemann.

THÉORÈME 7.3, "Représentation de Weierstrass" – extension du théorème 4.5. Soit $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion minimale d'une surface de Riemann M dans $\mathbb{R}^3$. Alors, il existe une paire (g, ω) où g est une fonction méromorphe sur M et ω est une 1-forme différentielle holomorphe sur M avec les propriétés suivantes :

$$a) \quad X(p) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{p_0}^p ((1-g^2)\omega, i(1+g^2)\omega, 2g\omega) + \text{cte}, \quad p_0 \text{ fixé};$$

$$b) \quad p \in M \text{ est un pôle d'ordre } m \text{ de } g \iff p \text{ est un zéro d'ordre } 2m \text{ de } \omega;$$

$$c) \quad \pi \circ N = g, \text{ où } N \text{ est la normale de Gauss et } \pi \text{ la projection, stéréographique de } S^2 - \{(0,0,1)\} \text{ sur } \mathbb{C};$$

d) la métrique de M est

$$ds^2 = \frac{1}{4}(1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 .$$

Réciproquement, soit M une surface de Riemann non compacte et (g, ω) un couple où g est une fonction méromorphe et ω une 1-forme différentielle holomorphe sur M telles que (b) soit vérifié et que pour tout chemin fermé $\alpha \subset M$ on a

$$(7.3) \quad \operatorname{Re} \int_{\alpha} ((1 - g^2)\omega, i(1 + g^2)\omega, g\omega) = 0 .$$

Alors, l'équation (a) définit une immersion minimale X de M dans $\mathbf{R}^3$, $\pi^{-1} \circ g$ est la normale de Gauss de X et la métrique est donnée par (d).

Preuve. — Soit $\zeta_{\alpha} : U_{\alpha} \subset \mathbf{C} \rightarrow V_{\alpha} \subset M$ des paramètres isothermes pour M tel que $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$. De la même façon qu'au théorème 4.5 on définit pour chaque α les différentielles

$$\varphi_j^{\alpha} = (X_{u_1}^j - iX_{u_2}^j), \quad j = 1, 2, 3$$

et localement, en supposant que $X(M)$ n'est pas un plan, on définit

$$(7.4) \quad g = \frac{\varphi_3^{\alpha}}{\varphi_1^{\alpha} - i\varphi_2^{\alpha}}, \quad \omega = (\varphi_1^{\alpha} - i\varphi_2^{\alpha})d\zeta_{\alpha}, \quad z_{\alpha} \in U_{\alpha} .$$

On remarque que $\pi^{-1} \circ g$ est la normale de Gauss, donc g est définie globalement par l'expression ci-dessus. D'autre part, si $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$, nous avons

$$\varphi_j^{\beta}(z_{\beta}) = \varphi_j(\psi(z_{\beta})) \cdot \psi'(z_{\beta}) \iff \varphi_j^{\beta} = \varphi_j^{\alpha} \cdot \frac{d\zeta_{\alpha}}{d\zeta_{\beta}},$$

où $\psi = \zeta_{\alpha}^{-1} \circ \zeta_{\beta}$ est la fonction holomorphe que donne le changement de paramètre. Donc, voir Springer [21], il existe des 1-formes différentielles holomorphes φ_j , $j = 1, 2, 3$, globalement définies sur M telles qu'en coordonnées locales ζ_{α} leur représentation soient les $\varphi_j^{\alpha} dz_{\alpha}$, $j = 1, 2$. Cela montre que ω dans (7.8) est une différentielle holomorphe définie sur M .

Maintenant, la suite de la démonstration est exactement identique à celle du théorème 4.6. La seule condition supplémentaire qu'on doit admettre est (7.3). Cette condition "la partie réelle de l'intégrale est nulle" est une condition nécessaire pour que (a) soit bien défini, c'est-à-dire l'intégrale ne dépend pas du chemin reliant p_0 et p . ■

DÉFINITION 7.4. — Soit $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ une immersion, où M est munie de la métrique induite. On dit que X est une immersion complète si toutes les géodésiques de M peuvent être prolongées jusqu'à l'infini; c'est-à-dire si $\alpha \subset M$ est un chemin tel que $\alpha(t) \cap K^c \neq \emptyset$, pour tout compact $K \subset M$, $K \neq M$, alors α a une longueur infinie.

Notre but, maintenant est de démontrer le résultat fondamental :

THÉORÈME 7.5 (R. Ossermann). — Soit $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ une immersion minimale complète avec courbure totale finie. Alors M est conformétement équivalente

à une surface de Riemann compacte $\overline{M}$ moins un nombre fini de points ($M \doteq \overline{M} - \{q_1, \dots, q_N\}$) et la fonction normale de Gauss $g : M \rightarrow S^2$ se prolonge en une fonction méromorphe $\overline{g} : \overline{M} \rightarrow S^2$.

Preuve. — On commence en utilisant un théorème de Huber (voir Huber [13]) qui est le suivant : “soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d’une variété bidimensionnelle orientée M dans $\mathbb{R}^3$, où K est la courbure gaussienne de X et $K^- = \max\{-K, 0\}$. Si $\int_M K^- dM < \infty$ alors $\pi_1(M)$ a un nombre fini de générateurs; c’est-à-dire M est à “connexion finie”.

En utilisant ce résultat de Huber, parce que $K \leq 0$ et $\int |K| dM < \infty$, on obtient que M est topologiquement une surface compacte de genre $\gamma \geq 0$, $\overline{M} = \overline{M}_\gamma$ moins un nombre fini de points ($M \doteq \overline{M} - \{q_1, \dots, q_N\}$). Donc il existe des courbes simples fermées $\gamma_i \subset \overline{B}_i \subset \overline{M}$, où B_i est un disque ouvert, $p_i \in B_i$, $p_j \notin B_i$ si $i \neq j$ et $\gamma_i = \partial B_i$, $i = 1, \dots, N$. Pour finir la première partie du théorème il faut montrer que $\overline{B}_i - \{p_i\}$ est conformément équivalent à $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| \leq 1\} \doteq \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq |z| < \infty\}$. On suppose que

$$(7.5) \quad B_i - \{p_i\} \doteq \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < r_0 \leq \infty\},$$

on va montrer que $r_0 = \infty$. Quelques assertions sont nécessaires.

ASSERTION A. — Soit $B_i - \{p_i\} = B \doteq \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < r_0\}$ choisi en (7.5). Supposons, par l’absurde que, $r_0 < \infty$. Soit $g_{ij} = \delta_{ij} \lambda^2$ la métrique en B . Alors, il existe une fonction harmonique $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\log \lambda \leq h.$$

Preuve. — B est hyperbolique car la fonction $z \in B \mapsto \operatorname{Re}(1 - \frac{1}{z})$ est une fonction sous-harmonique non nulle et négative. Donc, d’après le théorème (6.7), pour chaque $p \in B$ il existe une fonction de Green $G(z, p) > 0$, $G(z, p) = h_p(z) - \frac{1}{2\pi} \log |z - p|$, dans un voisinage de p , où h_p est une fonction harmonique. Soit

$$U(q) = \int_B G_q(z) \Delta \log \lambda du_1 du_2.$$

Alors, U est une fonction bien définie. Pour voir cela, nous prenons un petit disque $B_\varepsilon \subset B$ centré en q . Donc

$$\begin{aligned} \int_B G_q(z) \Delta \log \lambda du_1 du_2 &= \int_{B_\varepsilon} \left[h_p(z) - \frac{1}{2\pi} \log |z - q| \right] \Delta \log \lambda du_1 du_2 \\ &\quad + \int_{B_\varepsilon^c} G_q(z) \Delta \log \lambda du_1 du_2. \end{aligned}$$

Les deux intégrales de droite sont finies, car $\Delta \log \lambda$ est borné sur B_ε et $G_q(z)$ est continue sur $\overline{B_\varepsilon^c}$. Donc U est solution de l’équation de Poisson $\Delta u = -\Delta \log \lambda$, soit $\Delta(U + \log \lambda) = 0$ et $h = U + \log \lambda$ est harmonique. D’autre part de (7.1) et (7.2) nous avons $\Delta \log \lambda \geq 0$. Comme $G(z, q) > 0$ on obtient $U \geq 0$. Donc $h \geq 0$ et $\log \lambda \leq h$. ■

ASSERTION B. — Soient $B = B_i - \{p_i\}$ comme en (7.5) et $g_{ij} = \delta_{ij}\lambda^2$ la métrique en B , donnée par les hypothèses du théorème (7.5). Supposons que $r_0 < \infty$. Alors il existe r_1 , $0 < r_1 < \infty$, une métrique complète $\tilde{g}_{ij} = \mu^2 \delta_{ij}$ sur $\tilde{B} = \{\omega \in \mathbf{C} ; r_1^{-1} < |\omega| < r_1\}$ et une fonction harmonique $\tilde{h} : \tilde{B} \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\log \mu \leq \tilde{h}$.

Preuve. — On peut considérer après une transformation conforme de $\mathbf{C}$ que $B \doteq \{z \in \mathbf{C} ; 0 < r_2 < |z| < r_1 < \infty\}$ où $r_2 < 1/r_1$. (Rappel : $\{z \in \mathbf{C} ; 0 < A < |z| < C < \infty\}$ et $\{z \in \mathbf{C} ; 0 < A' < |z| < B' < \infty\}$ sont conformément équivalents $\iff AB' = A'B$). On considère sur ce nouvel ensemble la même métrique et sur $\tilde{B} = \{\tilde{z} \in \mathbf{C} ; r_1^{-1} < |\tilde{z}| < r_1\}$ la métrique $\tilde{g}_{ij}(\tilde{z}) = \lambda^2(\tilde{z}) \cdot \lambda^2(\frac{1}{\tilde{z}})\delta_{ij}$, $\tilde{z} \in \tilde{B} \subset B$. Alors si $\alpha(t) \subset \tilde{B}$ est un chemin, la longueur de $\alpha(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $0 \leq t < 1$, est

$$\ell(\alpha) = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \sqrt{\sum_{i,j} (\tilde{g}_{ij}) u'_i u'_j} dt = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^1 \lambda^2(\alpha(t)) \cdot \lambda^2\left(\frac{1}{\alpha(t)}\right) |\alpha'(t)| dt.$$

Supposons que $\lim_{t \rightarrow 1} |\alpha(t)| = r_1$ ou $\lim_{t \rightarrow 1} |\alpha(t)| = 1/r_1$. Alors, comme toute courbe $\beta(t) \in B$, $r_2 \leq \beta(t) < r_1$, $0 \leq t < 1$, telle que $\lim_{t \rightarrow 1} |\beta(t)| = r_1$ a une longueur infinie (car B est semi-complète), $\ell(\alpha) = +\infty$. Donc $\tilde{B}$ est complète avec la métrique $\tilde{g}_{ij}$. D'autre part, si $\mu^2 = \tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22}$, alors

$$\log \mu(\tilde{z}) = \log \lambda(\tilde{z}) + \log \lambda\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) \leq h(\tilde{z}) + h\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = \tilde{h}(\omega)$$

où h est la fonction harmonique de l'assertion A. ■

ASSERTION C. — Soient $\tilde{B} \subset \mathbf{C}$ un domaine complet pour une métrique $\tilde{g}_{ij} = \mu^2 \delta_{ij}$. Supposons qu'il existe une fonction harmonique $\tilde{h} : \tilde{B} \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\log \mu \leq \tilde{h}$. Alors $\tilde{B}$ est parabolique.

Preuve. — Soit sur $\tilde{B}$ une nouvelle métrique $g'_{ij} = \mu'^2 \delta_{ij}$, où $\mu' = e^{\tilde{h}}$. On voit que $\tilde{B}$ est complet avec g'_{ij} . Soit $\pi : \hat{B} \rightarrow \tilde{B}$ le revêtement universel de $\tilde{B}$. Le diagramme $\hat{B} \xrightarrow{\pi} \tilde{B} \xrightarrow{\tilde{h}} \mathbf{R}$ définit une fonction harmonique $\hat{h} = \tilde{h} \circ \pi : \hat{B} \rightarrow \mathbf{R}$. Soit $H : \hat{B} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle que $\hat{h} = \operatorname{Re} H$. Comme $\hat{B}$ est simplement connexe on peut définir la fonction holomorphe $\psi : \hat{B} \rightarrow \mathbf{C}$,

$$(7.6) \quad \psi(z) = \int_{z_0}^z e^{H(z)} dz.$$

Alors, comme $\psi'(z) = e^{H(z)} \neq 0$, $\forall z$, ψ est un difféomorphisme local de $\hat{B}$ sur son image. Aussi,

$$|\psi'(z)| = |e^{H(z)}| = e^{\hat{h}} = \hat{\mu},$$

où $\hat{g}_{ij} = \hat{\mu}^2 \delta_{ij}$ est la métrique sur $\hat{B}$ induite par la métrique $\tilde{g}_{ij}$. Donc, (7.6) montre que ψ envoie les courbes $\alpha(t)$ de $\hat{B}$ sur les courbes $\psi(\alpha(t))$ sur $\psi(\hat{B})$ en préservant leur longueur (sur $\psi(\hat{B})$ on considère la métrique euclidienne). En particulier ψ envoie les géodésiques de $\hat{B}$ sur des droites de $\psi(\hat{B})$. Comme $\hat{B}$ est complet, alors ψ est injective et $\psi(\hat{B}) = \mathbf{C}$. Cela montre que $\hat{B} \doteq \mathbf{C}$ et $\tilde{B}$ est parabolique. ■

Maintenant, on retourne à la preuve du théorème 7.5. On doit montrer que pour les ensembles $B_i - \{p_i\}$ donné en (7.5) on a $r_0 = \infty$, $i = 1, 2, \dots, N$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $r_0 < \infty$. Dans ce cas $B = B_i - \{p_i\}$ est hyperbolique et il existe (assertion A) une fonction harmonique $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\log \lambda \leq h$, où $g_{i,j} = \delta_{i,j} \lambda^2$ est la métrique de B . A partir de ce résultat on utilise l'assertion B pour trouver un ensemble $\tilde{B} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : 0 < r_1^{-1} < |\tilde{z}| < r_1 < \infty\}$ ayant une métrique complète $\tilde{g}_{i,j} = \delta_{i,j} \mu^2$ sur $\tilde{B}$ et une fonction harmonique $\tilde{h} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\log \mu \leq \tilde{h}$. Avec ces hypothèses sur $\tilde{B}$ on utilise l'assertion C pour conduire que $\tilde{B}$ est parabolique. C'est une contradiction parce que $\tilde{B}$ (un anneau propre) est hyperbolique. Donc $r_0 = \infty$ et $M \doteq \overline{M} - \{q_1, \dots, q_N\}$.

D'autre part, soit $g : \overline{M} - \{q_1, \dots, q_N\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la fonction normale de Gauss. Supposons qu'au point q_j , $1 \leq j \leq N$, g a une singularité essentielle. Alors, dans un voisinage de q_j , g prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}$, un nombre infini de fois, sauf peut-être deux points. Dans ce cas, l'aire de l'image sphérique de g , avec multiplicité, est infinie. Comme cette aire est égale à la courbure totale $\int_M |K| dM$, on arrive à $\int_M |K| dM = \infty$. C'est une contradiction. Donc, il existe une extension méromorphe de g , $\bar{g} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$.

COROLLAIRE 7.6. Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion minimale complète avec courbure totale finie. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que

$$C(M) \int_M |K| dM = 4\pi m$$

Preuve. — Soit $M \doteq \overline{M} - \{q_1, \dots, q_N\}$ donnée par le théorème 7.5 et soit $\bar{g} : \overline{M} \rightarrow S^2$ la fonction normale de Gauss prolongée. $\bar{g}$ est une fonction méromorphe, alors $\forall p, q \in S^2$, nous avons,

$$\#\{g^{-1}(q)\} = \#\{g^{-1}(p)\} = m < \infty.$$

Le nombre de points est calculé avec multiplicité. Comme $K \leq 0$ et que les points $p \in M$ où $K(P) = 0$ sont isolés (voir 7.1), alors,

$$\text{Aire}(g(M)) = \int_M |K| dM = m \cdot \text{Aire}(S^2) = 4\pi m.$$

■

Pour la suite, on a besoin du lemme suivant. Une démonstration peut être trouver dans Osserman [17] ou dans Maclane [15].

LEMMA 7.7. Soient $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ et $f : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \tilde{D}$ et $z = 0$ est une singularité essentielle pour f . Alors, il existe un chemin $\alpha(t) \in \tilde{D}$, $0 \leq t < 1$, tel que $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = 0$ et

$$\int_{\alpha} |f(z)| |dz| < \infty.$$

DÉFINITION 7.8. Une surface de Riemann M est de genre γ et de connectivité N si $M \doteq \overline{M}_\gamma - \{Q_1, \dots, Q_N\}$; c'est-à-dire M est topologiquement une surface

de Riemann compacte de genre γ moins N points. On dit aussi que M est de genre γ et N bouts.

THÉORÈME 7.9 (Osserman). Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion minimale complète d'une surface de genre γ et N bouts dans $\mathbb{R}^3$. Alors,

a) $\int_M K dM \leq 2\pi[\chi(M) - N]$, où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M

b) Si $\int_M K dM = -4\pi$, M est le catenoïde ou la surface de Enneper.

Preuve. — Si $\int_M K dM = -\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $\int_M K dM = -4\pi m > -\infty$. Cela entraîne que M est conformément équivalent à une surface de Riemann compacte de genre $\gamma \geq 0$, $\overline{M}_\gamma$, moins un nombre fini N de points. $M \doteq \overline{M}_\gamma - \{q_1, \dots, q_N\}$. Soient (g, ω) la représentation de Weierstrass de X et $\bar{g}$ la prolongée de g à $\overline{M}_\gamma$. On va montrer que ω se prolonge à $\overline{M}_\gamma$ comme une différentielle méromorphe. Après une rotation de l'immersion dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que $\bar{g}$ est holomorphe et non nulle dans un voisinage $D_1 \cup \dots \cup D_N$, où les $D_j \subset \overline{M}_\gamma$ sont des disques ouverts centrés en q_j , $j = 1, 2, \dots, N$. On suppose par l'absurde qu'il existe j tel que ω a une singularité essentielle en q_j . Comme g n'a pas de pôle en D_j , alors de (b), théorème 7.3, on a que $\omega(z) \neq 0, \forall z \in D_j - \{q_j\}$. Donc par le lemme 7.7, il existe une courbe divergente $\alpha(t)$ en $D_j - \{q_j\}$ telle que

$$\int_\alpha (1 + |g|^2) |\omega| |dz| \leq L \int_\alpha |\omega| |dz| < \infty.$$

où L est tel que $1 + |g(z)| \leq L, \forall z \in D_j$. Alors $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, n'est pas une immersion minimale complète. Cette contradiction montre que ω peut être prolongée à q_j .

D'autre part, comme la métrique complète est donnée par

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 = \frac{1}{4} (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2,$$

et que g est holomorphe en D_j , ω possède un pôle d'ordre $m_j \geq 1$ en chaque q_j , $j = 1, \dots, N$. On va montrer par l'absurde que $m_j \geq 2, \forall j$. S'il existe q_j tel que sur D_j nous avons

$$\omega = \left(\frac{a_1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) dz, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 \neq 0, \quad a_1 \neq 0.$$

Alors, les conditions (7.3) donnent une contradiction. Il suffit de calculer les résidus des formes différentielles $g\omega$, $(1 - g^2)\omega$ et $i(1 + g^2)\omega$. Nous avons donc $m_j \geq 2, j = 1, 2, \dots, N$ et comme $\int_M K dM = -4\pi m$, g a m pôles en M et de (b), théorème 7.3, ω a $2m$ zéros en M . Conclusion : ω est une différentielle méromorphe sur $\overline{M}_\gamma$ avec #Pôles = $m_1 + \dots + m_N \geq 2N$ et avec #Zéros = $2m$. La relation de Riemann donne

$$\# \text{Pôles} - \# \text{Zéros} = \chi(\overline{M}_\gamma) \iff 2N - 2m \leq \chi(\overline{M}_\gamma) = 2 - 2\gamma.$$

Comme $\chi(M) = \chi(\overline{M}_\gamma) - N = 2 - 2\gamma - N$, alors,

$$\int_M K dM = -4\pi m \leq 2\pi[2 - 2\gamma - 2N] = 2\pi[\chi(M) - N].$$

Pour montrer (b), on observe que $\int_M K dM = -4\pi$ entraîne par la formule ci-dessus que $\overline{M}_\gamma = S^2$ et $N = 1$ ou $N = 2$.

Si $N = 2$, on peut prendre $M = \mathbb{C} - \{0\}$ et $\bar{g}(0) = 0$. Comme $\bar{g} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$ est injective nous avons que $g(z) = az$, $a \neq 0$. Aussi les conditions du théorème 7.3 entraîne que ω a un pôle double en $0 \in \mathbb{C}$ et un zéro double en ∞ . Donc $\omega(z) = b/z^2 dz$, $b \neq 0$. Par une rotation suivi d'une homothétie de la surface dans $\mathbb{R}^3$, on peut prendre $b = 1/a$ et $a > 0$,

$$g(z) = az, \quad \omega = \frac{1}{az^2} dz, \quad M = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Par une transformation conforme du plan $z \in \mathbb{C} \rightarrow z/a \in \mathbb{C}$, on obtient $g(z) = z$ et $\omega = 1/z^2 dz$ qui sont la représentation de Weierstrass du catenoïde.

D'autre part, si $N = 1$, $M = \mathbb{C}$, on peut supposer que $g(0) = 0$ et $g(z) = az$, $a > 0$. Dans ce cas là ω n'a pas de zéro sur $\mathbb{C}$; donc le # Pôles de ω est 2. Cela montre que $\omega = b dz$, $b \in \mathbb{R}$. De la même façon (rotation et homothétie) on obtient :

$$g(z) = z, \quad \omega = dz, \quad M = \mathbb{C}.$$

■

Remarque. — Représentation du Weierstrass du catenoïde,

$$g(z) = z, \quad \omega = \frac{1}{z^2} dz, \quad M = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Nous avons

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{z^2})dz, \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}(1 + \frac{1}{z^2})dz, \quad \varphi_3 = \frac{1}{z}dz,$$

φ_1 et φ_2 n'ont pas de période et φ_3 n'a pas de période réelle. $X^i = \operatorname{Re} \int \varphi_i$, donne

$$X^1 = -\frac{u_1}{2} \left(1 + \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\right), \quad X^2 = -\frac{u_2}{2} \left(1 + \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\right), \quad X^3 = \frac{1}{2} \log(u_1^2 + u_2^2).$$

Ces équations donnent le caténoïde avec l'expression du paragraphe 1, après la transformation de coordonnées :

$$u = \frac{1}{2} \log(u_1^2 + u_2^2) \quad \text{et} \quad v = \operatorname{arctg} \frac{u_2}{u_1} - \pi.$$

8. Résultats de Jorge-Meeks [14]

Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale complète et de courbure totale finie. Alors, le théorème 7.5 montre que M est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte de genre $\gamma \geq 0$, moins un nombre fini de points : $M \doteq \overline{M}_\gamma - \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$. De plus, si (g, ω) est la représentation de Weierstrass de X , g et ω se prolongent à $\overline{M}_\gamma$,

$$\bar{g} : \overline{M}_\gamma \longrightarrow S^2 \text{ (fonction méromorphe) ;}$$

$$\bar{\omega} \text{ différentielle méromorphe sur } \overline{M}_\gamma,$$

de telle façon que, après une rotation de X dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que $\bar{g}(q_i) = c_0^i \neq 0$, $c_0^i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, N$, et $\bar{w}$ a un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2 aux points q_i .

En coordonnées locales on peut écrire

$$(8.1) \quad g(z) = c_0^i + c_1^i z + \dots, \quad \bar{w}(z) = \frac{b_n^i}{z^n} + \dots + \frac{b_1^i}{z} + a_0^i + a_1^i z + \dots$$

où $b_n^i \neq 0$, $c_0^i \neq 0$ et $n \geq 2$.

Si $D_i \subset \bar{M}_\gamma$ est un petit disque ouvert, $q_i \in D_i$ et $q_j \notin D_i$, $i \neq j$, alors on appelle

$$F_i = X(D_i - \{q_i\}) \subset \mathbb{R}^3$$

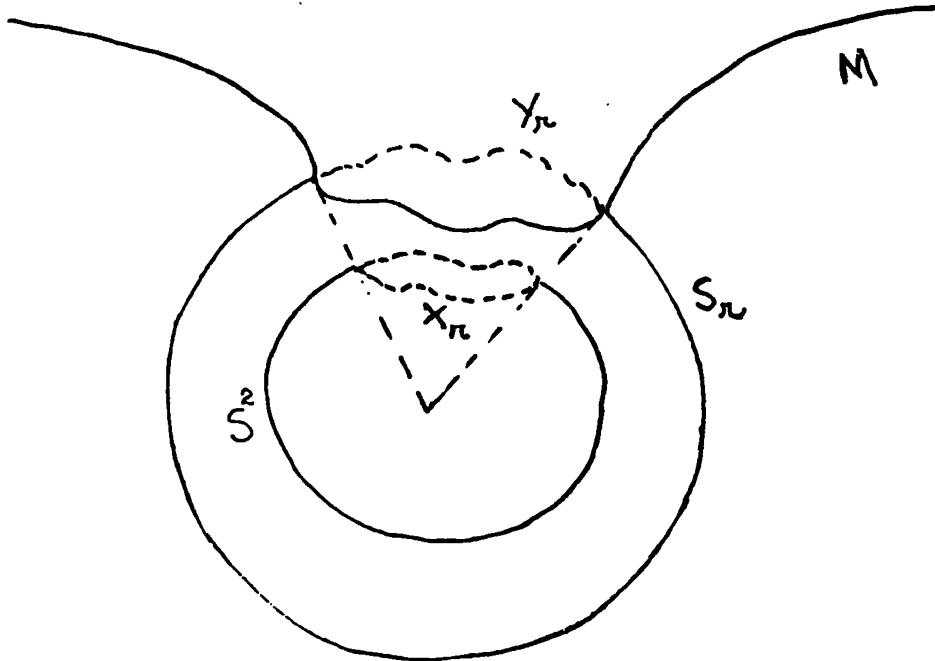
un *bout de la surface* et (8.1) est une paramétrisation du bout.

Soit Y_r , $r > 0$, l'ensemble donné par l'intersection de la sphère $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| = r\}$ et la surface M ($M = X(M)$),

$$Y_r = S_r \cap M.$$

On considère X_r la projection radiale de Y_r sur la sphère $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| = 1\}$. Cela veut dire (voir dessin ci-dessous)

$$X_r = \frac{1}{r} Y_r.$$



THÉORÈME 8.1 (Jorge-Meeks [14]). — Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion minimale complète avec courbure totale finie.

a) Si r est suffisamment grand, alors $X_r = \{\alpha_1^r, \dots, \alpha_k^r\}$ où les α_j^r sont des courbes fermées immergées dans S^2 , $j = 1, 2, \dots, k$.

b) Si $r \rightarrow \infty$, α_j^r converge de façon C^∞ vers une géodésique, avec multiplicité, de S^2 .

Preuve. — Topology, vol. 22, 1983.

COROLLAIRE 8.2. — Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale complète plongée et de courbure totale finie. Alors, les vecteurs normaux aux bouts de la surface sont parallèles. Donc, après une rotation de M dans $\mathbb{R}^3$ on peut supposer que les valeurs du vecteur normal au bout de la surface sont 0 ou ∞ .

Preuve. — Soit $M \doteq \overline{M}_\gamma - \{q_1, \dots, q_N\}$ et $\bar{g} : \overline{M}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ la normale de Gauss de M prolongée à $\overline{M}_\gamma$. Si, par l'absurde, $\bar{g}(q_i), \bar{g}(q_j) \in S^2$ ne pas pas parallèles, alors $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ où F_i et F_j sont les bouts de la surface associés aux points q_i et q_j respectivement. C'est une conséquence géométrique immédiate du théorème 8.1. Mais $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ est impossible car la surface est plongée. ■

THÉORÈME 8.3. — Soit M une surface minimale complète dans $\mathbb{R}^3$ avec N bouts et courbure totale finie. Alors

$$\int_M K dM \leq 2\pi(\chi(M) - N)$$

et l'égalité est vraie si et seulement si les bouts (chacun isolément) sont plongés.

Preuve. — L'inégalité ci-dessus a été prouvée au théorème 7.9. On va regarder le cas d'égalité.

Soit $M \doteq \overline{M}_\gamma - \{q_1, \dots, q_N\}$ et $F_j \subset \mathbb{R}^3$ le bout associé à q_j . Par le théorème 8.1

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} [F_j \cap S_r] = \lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_j^r = \beta_j \subset S^2$$

où β_j est une géodésique avec multiplicité $I_j \geq 1$. Comme la convergence ci-dessus est C^∞ , alors la courbure totale de la courbe Γ_j^r ($\int_{\Gamma_j^r} k ds$, k = courbure de Γ_j^r) converge vers $2\pi I_j$. Soit $M_r = \frac{1}{r}(M \cap B_r)$, où $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| < r\}$. Alors, comme le vecteur courbure de la géodésique β_j est dans un plan qui contient cette géodésique et que ce plan est le plan tangent à F_j à l'infini, la courbure géodésique totale de Γ_j^r converge vers $2\pi I_j$ quand $r \rightarrow \infty$.

Donc le théorème de Gauss-Bonnet pour M avec N bouts donne :

$$\int_{M_r} K dM + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j^r} k_g dt = 2\pi\chi(M_r) = 2\pi\chi(M).$$

Si $r \rightarrow \infty$ dans la formule ci-dessus, nous avons :

$$\int_M K dM + \sum_{j=1}^N 2\pi I_j = 2\pi\chi(M).$$

D'autre part, on voit facilement que Γ_j^r est un cercle plongé pour r suffisamment grand si et seulement si $I_j = 1$. Donc, ce résultat et l'égalité ci-dessus montrent que l'égalité du théorème est vraie si et seulement si les bouts sont plongés. ■

EXEMPLES 8.4 (Jorge–Meeks [14]). — On va décrire des exemples de surfaces minimales complètes dans $\mathbf{R}^3$ conformément équivalent à la sphère S^2 moins N points $N = 1, 2, \dots$ avec tous les bouts plongés.

On fait l'identification $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et

$$M = \mathbf{C} \cup \{\infty\} - \{q_1, \dots, q_N\}; \quad q_j \in \mathbf{C}, \quad q_j^{N+1} = 1$$

$$\omega(z) = \frac{dz}{(z^{N+1} - 1)^2}, \quad g(z) = z^N.$$

On observe que ω a un pôle d'ordre 2 en chaque q_j et g est holomorphe dans un voisinage de q_j . Donc si une courbe $\alpha(t) \subset M$, $0 \leq t < 1$ diverge vers le point q_j (c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = q_j$) alors la longueur de α est infinie

$$\int_{\alpha} (1 + |g|^2) |\omega| = +\infty.$$

Donc la surface est complète (il faut encore montrer l'existence de la surface). Nous avons

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega = \frac{1 - z^{2N}}{2(z^{N+1} - 1)^2} dz, \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega = \frac{i(1 + z^{2N})}{2(z^{N+1} - 1)^2} dz,$$

et

$$\varphi_3 = g\omega = \frac{z^N}{(z^{N+1} - 1)^2} dz.$$

Donc, (voir théorème 7.3) (g, ω) est la représentation de Weierstrass d'une immersion minimale de M dans $\mathbf{R}^3$ si et seulement si, pour chaque courbe fermée simple $\gamma_j \subset \mathbf{C}$, autour du point q_j ,

$$(8.2) \quad 0 = \operatorname{Re} \int_{\gamma_j} \varphi_k = \operatorname{Re} [2\pi i \operatorname{res}(\varphi_K, q_j)] = -2\pi \operatorname{Im} [\operatorname{res}(\varphi_K, q_j)], \quad k = 1, 2, 3,$$

où $\operatorname{res}(\varphi_K, q_j)$ est le résidu de la différentielle φ_K au point q_j .

La preuve de (8.2) est un long calcul en coordonnées locales (sans aucune difficulté majeure) et peut être trouvé dans Barbosa–Colares [2] ou Jorge–Meeks [14].

On remarque que la courbure totale est $\int |K| dM = 4\pi$ ordre $g = 4\pi N$ et par le théorème 8.3 les bouts sont plongés.

THÉORÈME 8.5 (Jorge–Meeks). — Soit $M = S^2 - \{q_1, \dots, q_N\}$ où $3 \leq N \leq 2$. Alors, M ne peut pas être plongée dans $\mathbf{R}^3$ comme une surface minimale complète.

Preuve. — Voir [14].

CONJECTURE. — Le théorème est vrai pour $\forall N \geq 3$.

THÉORÈME 8.6 (R. Schoen). — Soit $M = \overline{M}_\gamma - \{q_1, q_2\}$ où $\overline{M}_\gamma$ est une surface de Riemann de genre $\gamma \geq 1$. Alors, M ne peut pas être immergée dans $\mathbf{R}^3$ comme une surface minimale complète ayant les bouts plongés.

Preuve. — (R. Schoen [19]).

PROBLÈME. — Le même énoncé du théorème 8.6 est encore vrai si $\overline{M}_\gamma$ est non orientable? (exemple : $\overline{M}_\gamma$ la bouteille de Klein).

9. Surfaces minimales de genre un (fonctions elliptiques)

Soit $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, tels que $\lambda_1 \neq 0$ et $\text{Im}(\lambda_3/\lambda_1) > 0$. Alors $L(\lambda_1, \lambda_3) = \{m\lambda_1 + n\lambda_3 \in \mathbb{C}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ définit un réseau de $\mathbb{C}$.

Une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une *fonction elliptique* du réseau $L(\lambda_1, \lambda_3)$ si

$$f(z + \Omega) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall \Omega \in L(\lambda_1, \lambda_3).$$

On remarque qu'une fonction elliptique f non constante doit avoir des pôles. Sinon f serait une fonction bornée dans un domaine fondamental du réseau, donc une fonction constante.

Soit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L(\lambda_1, \lambda_3)$ la projection canonique. Alors, $\mathbb{C}/L(\lambda_1, \lambda_3)$ est un tore avec la structure complexe de surface de Riemann induite par π . Donc le diagramme

$$(9.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2 \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathbb{C}/L(\lambda_1, \lambda_3) & & \end{array}$$

montre qu'une fonction elliptique en $\mathbb{C}$ par rapport au réseau $L(\lambda_1, \lambda_2)$ définit une fonction méromorphe $\tilde{f}$ du tore $\mathbb{C}/L(\lambda_1, \lambda_3)$ et vice-versa. D'autre part, si on considère $z = u_1 + iu_2$ des paramètres globaux sur $\mathbb{C}$, alors dz est une différentielle sur $\mathbb{C}$ et $\omega = f dz$ sera une *différentielle elliptique* si f est une fonction elliptique. On remarque qu'un diagramme identique à (9.1) nous permet d'associer une différentielle elliptique par rapport au réseau $L(\lambda_1, \lambda_3)$ à une différentielle méromorphe sur le tore $\mathbb{C}/L(\lambda_1, \lambda_3)$. Pour une surface de Riemann compacte $\overline{M}_\gamma$ de genre $\gamma \geq 0$ on a pour une fonction méromorphe g et pour une différentielle méromorphe ω sur M_γ , les formules de Riemann

$$\# \text{ pôles de } g = \# \text{ zéros de } g, \quad \# \text{ pôles } \omega - \# \text{ zéros } \omega = \chi(\overline{M}_\gamma).$$

Donc, pour un tore $\overline{M}_1$, $\chi(\overline{M}_1) = 0$, nous avons $\# \text{ pôles} = \# \text{ zéros}$, soit pour les fonctions méromorphes, soit pour les différentiels méromorphes. Donc dans un *domaine fondamental* D qui définit le tore $\mathbb{C}/L(\lambda_1, \lambda_3)$, par exemple

$$(9.2) \quad D = \{a\lambda_1 + b\lambda_3 \in \mathbb{C}; 0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1\},$$

le nombre de pôles ($\# \text{ pôles}$) et le nombre de zéros ($\# \text{ zéros}$), avec multiplicité, d'une fonction elliptique f de $L(\lambda_1, \lambda_3)$ ou d'une différentielle elliptique $\omega = \tilde{f} dz$ de $L(\lambda_1, \lambda_3)$ sont égales. On dit que deux points z_1 et z_2 sont congruents si $z_1 - z_2 \in L$. On écrit $z_1 \equiv z_2$.

PROPOSITION 9.1. — Soient $L = L(\lambda_1, \lambda_3) \subset \mathbb{C}$ un réseau, f_1, f_2 deux fonctions elliptiques de L et D le domaine (9.2).

a) Si f_1 et f_2 ont les mêmes points de D comme pôles avec la même multiplicité et les mêmes points de D comme zéros avec la même multiplicité alors $f_1/f_2 = \text{cte}$.

b) Si f_1 et f_2 ont le même ensemble $\{z_1, \dots, z_k\} \subset D$ comme pôles et dans un voisinage de z_j , f_1 et f_2 ont la même partie principale, cela veut dire $f_s = \sum_{n=1}^{n_j} \frac{b_n^j}{(z-z_j)^n}$, $b_n^j \neq 0$, $j = 1, \dots, k$, $s = 1, 2$, alors $f_1 - f_2 = \text{cte}$.

Preuve. — On observe que le quotient f_1/f_2 et la différence $f_1 - f_2$ sont des fonctions elliptiques (voir définition). Par hypothèse, ces fonctions n'ont aucun pôle. Ainsi f_1/f_2 et $f_1 - f_2$ sont des fonctions holomorphes et périodiques. Donc elles sont bornées. Cela entraîne que $f_1 - f_2 = \text{cte}$, $f_1/f_2 = \text{cte}$.

PROPOSITION 9.2. — Soient f une fonction elliptique par rapport au réseau $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que la courbe $\alpha(t)$ définie par les segments de droite que relie, b à $b + \lambda_1$, $b + \lambda_1$ à $b + \lambda_1 + \lambda_3$, b à $b + \lambda_3$ et $b + \lambda_3$ à $b + \lambda_1 + \lambda_3$ ne contienne aucun pôle de f . Alors

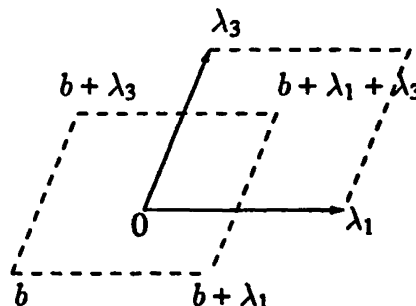
$$\sum_{z \in U} \text{res}(f, z) = 0,$$

où $U \subset \mathbb{C}$ est l'ouvert bordé par α et $\text{res}(f, z)$ est le résidu de f en z .

Preuve. — Comme le nombre de pôles de f est un nombre fini sur U , alors

$$\int_{\alpha} f dz = \sum_{z \in U} \text{res}(f, z).$$

Mais, comme f est elliptique



$$\int_b^{b+\lambda_1} f(z) dz = \int_{b+\lambda_3}^{b+\lambda_1+\lambda_3} f(z+\lambda_3) dz = \int_{b+\lambda_3}^{b+\lambda_1+\lambda_3} f(z) dz, \quad \int_{b+\lambda_1}^{b+\lambda_1+\lambda_3} f(z) dz = \int_b^{b+\lambda_3} f(z) dz.$$

Alors,

$$\int_{\alpha} f d\gamma = 0.$$

■

Soit f une fonction elliptique dans un réseau $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ et $z_1, \dots, z_k$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, l'ensemble de pôles de f dans un domaine fondamental de L , $r_i =$ ordre du pôle z_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Alors, on appelle ordre de f le nombre : ordre $(f) = \sum_{i=1}^k r_i$.

COROLLAIRE 9.3. — Il n'existe pas de fonctions elliptiques d'ordre 1.

DÉFINITION 9.4 (P -fonction de Weierstrass). — Soit $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ un

réseau. Alors, la fonction

$$(9.3) \quad P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\Omega \in L \\ \Omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right\}$$

est la fonction P de Weierstrass.

PROPOSITION 9.5. — *La fonction P de Weierstrass est une fonction elliptique pair d'ordre 2.*

Preuve. — voir E. Neville [16], page 21, 22.

On remarque que la propriété d'être d'ordre 2 pour la fonction P est immédiate de l'expression (9.3). On voit aussi par (9.3) que P est une fonction paire ($P(z) = P(-z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$). C'est facile de voir que la fonction dérivée $f'(z)$ d'une fonction elliptique $f(z)$ est aussi une fonction elliptique. Ainsi on a que P' est une fonction elliptique impaire, d'ordre 3 et les pôles de P' sont exactement les points de L . On définit

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\lambda_3}{2}$$

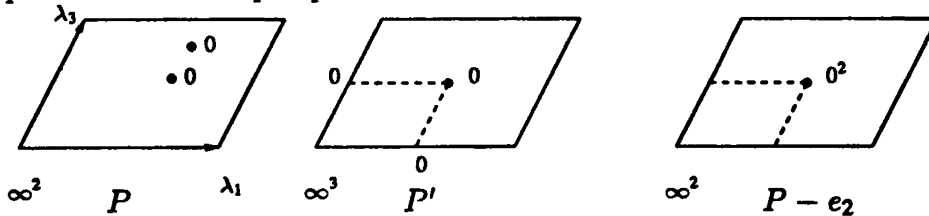
et

$$e_j = P(\omega_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Comme P' est impair et $\omega_j \equiv -\omega_j, \forall j$, alors $P'(\omega_j) = P'(-\omega_j) = -P'(\omega_j)$, d'où

$$P'(\omega_j) = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

Donc, si on considère la fonction elliptique $P(z) - e_j$, cette fonction a des pôles doubles aux points du réseau et zéros doubles aux points $z \equiv \omega_j$, on représente ci-dessous les pôles et zéros de quelques-unes de ces fonctions



Par un processus d'intégration, on peut définir une fonction presque-elliptique $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tel que :

$$\zeta(z) = -\frac{1}{z} = -\int_0^z (P(z) - \frac{1}{z^2}) dz \iff \zeta'(z) = -P(z).$$

La fonction $\zeta(z)$ est une fonction impaire, ζ a des pôles simples aux points du réseau L et comme $-\zeta'(z) = P(z)$ il existe deux constantes $\eta_1, \eta_3 \in \mathbb{C}$ telles que

$$\zeta(z + \lambda_j) = \zeta(z) + 2\eta_j, \quad j = 1, 3, \quad \lambda_j = 2\omega_j, \quad j = 1, 3.$$

on observe que

$$\omega_j = -\omega_j + 2\omega_j \iff \zeta(\omega_j) = \zeta(-\omega_j) + 2\eta_j \iff \zeta(\omega_j) = \eta_j, \quad j = 1, 3.$$

Donc, si on pose $\eta_2 = \zeta(\omega_2)$ on obtient :

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \text{ et } \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

On peut montrer aussi la formule d'addition suivante :

$$\zeta(z_1 \pm z_2) = \zeta(z_1) \pm \zeta(z_2) + \frac{1}{2} \frac{P'(z_1) \mp P'(z_2)}{P(z_1) - P(z_2)} .$$

D'autre part, la fonction P vérifie la relation différentielle

$$(9.4) \quad (P')^2 = 4(P - e_1)(P - e_2)P - e_3 .$$

Cette égalité est facile à vérifier car nous avons de chaque côté des fonctions qui ont les mêmes pôles et les mêmes zéros avec la même multiplicité. Donc les fonctions diffèrent par une constante multiplicative. Cette constante peut-être calculée en regardant le développement de Laurent au point $0 \in \mathbb{C}$.

Au point $0 \in \mathbb{C}$, nous avons

$$(9.5) \quad P(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots, \quad a_n \in \mathbb{Z} .$$

De (9.4) et (9.5) on tire

$$(9.6) \quad P'^2 = 4P^3 - g_2 P - g_3, \quad \frac{-1}{4} g_2 = \sum_{i < j} e_i e_j, \quad \frac{1}{4} g_3 = e_1 e_2 e_3 .$$

Donc,

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 .$$

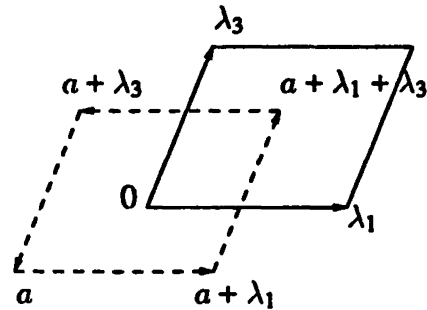
Facilement, on peut montrer aussi que

$$(9.7) \quad \frac{L_k}{P(z) - e_k} = P(z - \omega_k) - e_k, \quad L_k = (e_s - e_k)(e_t - e_k),$$

(s, k, t) permutation de $(1, 2, 3)$.

En faisant l'intégrale de la fonction ζ sur un chemin α qui est le bord d'un domaine fondamental du réseau, de telle façon que $\alpha \cap L(\lambda_1, \lambda_3) = \emptyset$. Alors,

$$\int_{\alpha} \zeta(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(\zeta, 0) = 2\pi i$$



$$\begin{aligned} \int_a^{a+\lambda_1} \zeta(z) dz - \int_{a+\lambda_3}^{a+\lambda_1+\lambda_3} \zeta(z) dz &= \int_a^{a+\lambda_1} \zeta(z) dz - \int_a^{a+\lambda_1} \zeta(z + \lambda_3) dz \\ &= \int_a^{a+\lambda_1} \zeta(z) dz - \int_a^{a+\lambda_1} [\zeta(z) + 2\eta_3] dz = 2\eta_3 \lambda_1 . \end{aligned}$$

De la même façon

$$\int_{a+\lambda_1}^{a+\lambda_1+\lambda_3} \zeta(z) - \int_a^{a+\lambda_3} \zeta(z) = 2\eta_1 \lambda_3 .$$

Donc, nous trouvons la relation de Legendre :

$$(9.8) \quad \eta_3 = \tau \eta_1 - \frac{\pi}{\lambda_1} i, \quad \tau = \lambda_3 / \lambda_1.$$

Finalement, on a les développements en série (voir Tannery-Molk [1], vol. III, page 138)

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\pi^2}{12\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}, \quad \frac{\eta_1}{\omega_1} + e_1 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}, \\ \frac{\eta_1}{\omega_1} + e_2 &= -\frac{2\pi^2}{\omega_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}}, \quad \frac{\eta_1}{\omega_1} + e_3 = -\frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}}, \\ q &= e^{i\pi\tau}, \quad \tau = \lambda_3 / \lambda_1. \end{aligned}$$

10. Immersions minimales de genre un

Pour construire des surfaces minimales de genre un et N bouts, on choisit d'abord un réseau $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ de $\mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda_3/\lambda_1) > 0$. Ensuite, on prend le tore $\overline{M}_1 = \mathbb{C}/L$, avec la structure conforme donnée par la projection $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$. Cette projection transforme les fonctions elliptiques et les différentielles elliptiques de L sur, respectivement, des fonctions méromorphes et des différentielles méromorphes de $\overline{M}_1$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}/L = M_1 \\ \text{fonctions elliptiques} & \longrightarrow & \text{fonctions méromorphes} \\ \text{diff. elliptiques} & \xrightarrow{\pi} & \text{diff. méromorphes} \end{array}$$

Donc maintenant le travail est de choisir des points $q_1, \dots, q_N \in \overline{M}_1$ et une paire de Weierstrass (g, ω) où g est une fonction méromorphe sur M_1 (fonction elliptique de L) et ω est une différentielle méromorphe sur M_1 (différentielle elliptique de L) telle que les conditions du théorème (7.3) soient vérifiées.

Avant d'énoncer le prochain théorème on pose une définition

DÉFINITION 10.1. — Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion minimale complète de courbure totale finie avec $M \doteq \overline{M}_\gamma - \{q_1, \dots, q_N\}$. Soit $F_j = X(D_j - \{q_j\})$ un bout plongé de l'immersion, où $D_j \subset \overline{M}_\gamma$ est un disque centré sur q_j . On peut supposer que $g(q_j) = 0$, après une rotation de X dans $\mathbb{R}^3$. Donc la représentation de Weierstrass locale $(g; \omega)$ est donnée (le bout étant plongé) par :

$$g(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, \quad \omega(z) = \frac{b_2}{z^2} + c_0 + c_1 z + \dots, \quad a_n \neq 0, b_2 \neq 0, n \geq 1.$$

On dit que le bout plongé F_j est du type catenoïde si $n = 1$ et F_j est un bout plat d'ordre $n - 1$ si $n > 1$.

On observe que pour un bout plat la différentielle méromorphe $g\omega$ est holomorphe au point q_j . Donc la coordonnée $X_3^j = \text{Re} \int_{z_0}^z g\omega$ converge vers une valeur constante

quand $z \rightarrow q_j$. Ainsi géométriquement le bout F_j est asymptote à un plan parallèle au plan xy .

THÉORÈME 10.2 (Costa), [4]. — *Il existe une immersion minimale de genre un et trois bouts tels que :*

- a) *Les bouts sont plongés, deux bouts sont de type catenoïdes et un bout est plat.*
- b) *Les vecteurs normaux aux bouts sont parallèles.*

Preuve. — Soient le réseau $L(1, i) = \{m + ni ; m, n \in \mathbf{Z}\}$, le tore $\overline{M}_1 = \mathbf{C}/L(1, i)$ avec la structure complexe induite, par la projection canonique $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/L(1, i)$ et la paire (g, ω) donnée par

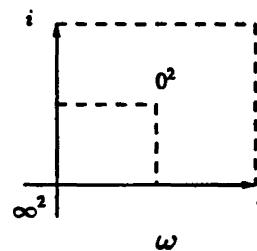
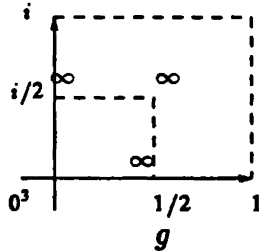
$$g = \frac{a}{p'} , \quad \omega = Pdz , \quad a \in \mathbf{R} ,$$

où P est la fonction de Weierstrass et $a \in \mathbf{R}$ une constante qui sera définie plus tard. Nous allons montrer que (g, ω) est la représentation de Weierstrass d'une immersion

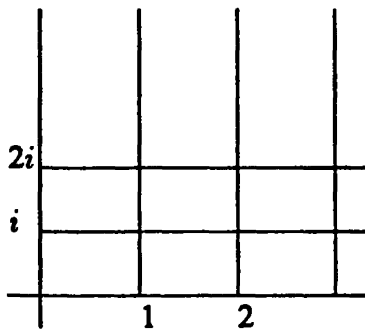
$$X : M \rightarrow \mathbf{R}^3 , \quad M = \overline{M}_1 - \{\pi(0), \pi(1/2), \pi(i/2)\}$$

avec les propriétés de l'énoncé.

On donne ci-dessous la position des pôles et zéros de ω sur $\overline{M}_1$



Exemple. — $0 \in \mathbf{C}$ est un point où g a un zéro d'ordre 3.



$\xrightarrow{\pi}$

$$M = \overline{M}_1 - \{q_1, q_2, q_3\} , \quad q_1 = \pi\left(\frac{1}{2}\right) , \quad q_2 = \pi(0) , \quad q_3 = \pi\left(\frac{i}{2}\right) .$$

On observe que aux bouts F_j associés aux points q_j , $j = 1, 2, 3$, nous avons, le tableau

	q_1	q_2	q_3	$q' = \pi(\frac{1+i}{2})$
g	∞	0^3	∞	∞
ω	régulier $\neq 0$	∞^2	régulier $\neq 0$	0^2

comme la métrique est donnée par $\lambda = \frac{1}{2}(1 + |g|^2)(\omega)$ on voit que si l'immersion existe elle est complète et au point q' l'immersion est bien définie (voir (b) théorème 7.3).

Maintenant, on doit montrer que pour tout chemin fermé $\alpha \subset M$ on a :

$$\operatorname{Re} \int_{\alpha} g\omega = 0, \operatorname{Re} \int_{\alpha} (1 - g^2)\omega = 0 \text{ et } \operatorname{Re} \int_{\alpha} i(1 + g^2)\omega = 0.$$

On observe que les deux dernières conditions sont équivalentes à $\int_{\alpha} g^2\omega - \overline{\int_{\alpha} \omega} = 0$, où la barre est la conjugaison complexe. Donc on doit montrer que (g, ω) satisfait

$$(10.1) \quad \operatorname{Re} \int_{\alpha} g\omega = 0 \text{ et } \int_{\alpha} g^2\omega = \overline{\int_{\alpha} \omega}, \forall \alpha \subset M \text{ fermé.}$$

Il est suffisant de montrer (10.1) pour les chemins $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ où α_i est un chemin fermé autour du point q_i , $i = 1, 2, 3$ et β_1, β_2 sont les générateurs de l'homologie du tore.

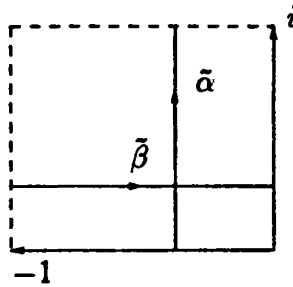
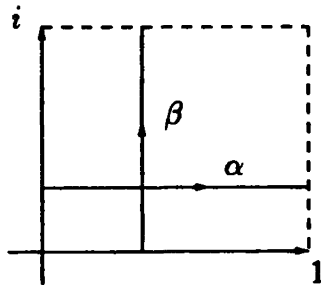
Avant de donner la preuve de (10.1) on a besoin d'un lemme :

LEMME 10.3. — Pour le réseau $L = L(1, i) = \{m + ni; m, n \in \mathbb{Z}\}$ on a

$$a) e_1 = -e_3 > 0, e_2 = 0,$$

$$b) 2\eta_1 = \pi, 2\eta_3 = -\pi i.$$

Preuve. — On considère le réseau $\tilde{L} = L(i, -1) = \{mi - n, m, n \in \mathbb{Z}\}$. $\tilde{L}$ est obtenu de L par une rotation d'angle $\pi/2$, dans le sens antihoraire. De (9.3) on voit que les fonctions P et $\tilde{P}$ de Weierstrass associées aux réseaux L et $\tilde{L}$, respectivement, sont égales.



$$\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}.$$

Donc,

$$\int_{\tilde{\alpha}} \tilde{P}dz = -\left[\tilde{\zeta}(z)\right]_{\tilde{\alpha}} = -\zeta(\tilde{\alpha}(1)) + \zeta(\tilde{\alpha}(0)) = -2\eta_1$$

$$(10.2) \quad \int_{\tilde{\alpha}} \tilde{P}dz = \int_{\beta} Pdz = -\left[\zeta(z)\right]_{\beta} = -\zeta(\beta(1)) + \zeta(\beta(0)) = -2\eta_3.$$

De (9.9) on voit que $q = e^{i\pi\tau}$, $\tau = i$, $\tilde{q} = e^{i\pi\tilde{\tau}}$, $\tilde{\tau} = \frac{-1}{i} = i \iff q = \tilde{q}$, donc, comme $\omega_1 = 1/2$, $\tilde{\omega}_1 = i/2$, on a

$$(10.3) \quad \tilde{\eta}_1 = -i\eta_1$$

De (10.2), (10.3) et de la relation de Legendre (9.8) on a

$$\eta_3 = i\eta_1 - \pi i \iff -i\eta_1 = i\eta_1 - \pi i \iff \eta_1 = \frac{\pi}{2}, \iff \eta_3 = -\frac{\pi}{2}i.$$

D'autre part, de (9.9), pour le réseau L on a que $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi}$, $2\eta_1$ et $2\eta_1 + e_j$, $j = 1, 2, 3$ sont réels $\Rightarrow e_1, e_2, e_3 \in \mathbf{R}$.

Ainsi comme $e_2 = \tilde{e}_2$, où $e_2 = P(\omega_2)$, $\tilde{e}_2 = \tilde{P}(\tilde{\omega}_2)$. En utilisant le développement en série de $\eta_1/\omega_1 + e_2$ de (9.9) on a

$$\frac{\tilde{\eta}_1}{\tilde{\omega}_1} + \tilde{e}_2 = -\left[\frac{\eta_1}{\omega_1} + e_2\right] \iff -\pi + \tilde{e}_2 = -\pi - e_2 \iff e_2 = 0.$$

Finalement comme $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_i \in \mathbf{R}$, $e_2 = 0 \iff e_1 = -e_3$. Aussi la formule (9.9) pour $\eta_1/\omega_1 + e_3$ montre que $e_3 < 0$. ■

ASSERTION A. — (10.1) est vérifié pour des chemins fermés $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ autour des points q_1, q_2 et q_3 respectivement.

Preuve. — On a de (9.4), (9.7) et lemme (10.3) que

$$(10.4) \quad g\omega = \frac{aP}{P'} dz = \frac{aPP'}{4(P-e_1)(P-e_2)(P-e_3)} dz = \frac{a}{4} \frac{P' dz}{(P-e_1)(P-e_3)} \\ = \frac{a}{4(e_1-e_3)} \left[\frac{P'}{P-e_1} - \frac{P'}{P-e_3} \right] dz \\ = \frac{a}{4(e_1-e_3)^2} \left\{ \frac{P'[P(z-e_1)-e_1]}{e_1-e_2} + \frac{P'[P(z-\omega_3)-e_3]}{e_3-e_2} \right\} dz$$

et

$$(10.5) \quad g^2\omega = \frac{a^2}{4(e_1-e_3)^2} \left\{ \frac{P(z-\omega_1)-e_1}{e_1-e_2} + \frac{P(z-\omega_3)-e_3}{e_3-e_2} \right\} dz$$

Calcul des résidus de $g\omega$ aux points q_j , $j = 1, 2, 3$. —

De (9.5) on a localement, $(P'(\omega_1) = 0)$

$$(10.6) \quad P'[P(z-\omega_j)-e_j] = [P''(\omega_j)(z-\omega_j) + \dots] \left[\frac{1}{(z-\omega_j)^2} - e_1 + o(z-\omega_j)^2 \right].$$

De (9.6) on a

$$2P'P'' = 12P^2P' - g_2P' \iff P'' = 6P^2 - \frac{1}{2}g_2 \Rightarrow P''(\omega_j) \in \mathbf{R}, j = 1, 2, 3.$$

Donc de (10.5) et (10.6) et du lemme (10.3) on obtient que

$$(10.7) \quad \text{Res}_{\omega_j} g\omega = \frac{a}{4(e_1-e_3)^2(e_j-e_2)} \text{res}\{P'[P(z)-\omega_j]-e_j\} \in \mathbf{R}.$$

De (9.5), on a aussi localement au point $q_2 = \pi(0)$,

$$P'[P(z - \omega_j) - e_j] = \left[-\frac{2}{z^3} + o(z)^3\right] \left[\frac{P''(\omega_j)}{2!} + o(z)^3\right].$$

Donc

$$(10.8) \quad \text{Res}_{z=0} g\omega \in \mathbb{R},$$

et de (10.7) et (10.8)

$$\text{Re} \int_{\alpha_j} g\omega = \text{Re} [2\pi i \text{res}_{q_j}(g\omega)] = 0.$$

Calcul des résidus de $g^2\omega$ et ω . —

De (10.5) et (9.5) on a

$$\text{Res}_{q_j} g^2\omega = \text{Res}_{q_j} \omega = 0 \Rightarrow \int_{\alpha_j} g^2\omega = \overline{\int_{\alpha_j} \omega} = 0.$$

■

ASSERTION B. — Soit $\beta_1, \beta_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ donnés par $\beta_1(t) = Ci + t$, $\beta_2(t) = C + it$, où $0 < C < 1/2$. Alors (10.1) est vérifié pour β_j , $j = 1, 2$ et une certaine constante $a > 0$. (a est la constante qui apparaît dans la définition de g , au début de la preuve du théorème).

Preuve. — De (10.4) et du lemme (10.3) on a,

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_{\beta_j} g\omega &= \frac{a}{4(e_1 - e_3)} \text{Re} \left[\int_{\beta_j} \frac{P'}{P - e_1} dz - \int_{\beta_j} \frac{P'}{P - e_3} dz \right] \\ &= \frac{a}{4(e_1 - e_3)} [\log |P - e_1| - \log |P - e_3|]_{\beta_j}, \end{aligned}$$

comme $P - e_k$, $k = 1, 3$ est une fonction périodique et $\beta_j(0) \equiv \beta_j(1)$,

$$\text{Re} \int_{\beta_j} g\omega = 0.$$

D'autre part, du lemme (10.3) on a :

$$\int_{\beta_1} \omega = \int_{\beta_1} P(z) dz = -\pi, \quad \int_{\beta_2} \omega = \int_{\beta_2} P(z) dz = \pi i$$

et de (10.5),

$$\begin{aligned} \int_{\beta_1} g^2\omega &= \frac{a^2}{4(e_1 - e_3)^2} \left\{ \frac{-\pi - e_1}{e_1 - e_2} + \frac{-\pi - e_3}{e_3 - e_2} \right\}, \\ \int_{\beta_2} g^2\omega &= \frac{a^2}{4(e_1 - e_3)^2} \left\{ \frac{\pi i - e_1 i}{e_1 - e_2} + \frac{-\pi - e_3 i}{e_3 - e_2} \right\}. \end{aligned}$$

Comme $e_1 = -e_3 > 0$ et $e_2 = 0$, on a

$$\int_{\beta_1} g^2\omega = \frac{-a^2}{8e_1^2}, \quad \int_{\beta_2} g^2\omega = \frac{-a^2 i}{8e_1^2}, \quad \overline{\int_{\beta_1} \omega} = -\pi, \quad \overline{\int_{\beta_2} \omega} = -\pi i.$$

Donc, si $a = 2e_1\sqrt{2\pi}$ alors $\int_{\beta_j} g^2 \omega = \overline{\int_{\beta_j} \omega}$, $j = 1, 2$. Cela montre (10.1) pour les chemins qui engendrent l'homologie du tore. ■

Cet exemple d'une surface minimale de genre un et trois bouts ayant toutes les conditions nécessaires pour être globalement plongée; a été donnée dans ma thèse de doctorat au IMPA au début de l'année 1983. Après cet événement plusieurs mathématiciens on voulu résoudre la question du plongement global de cette surface. D. Hoffman et W. Meeks ont construit en 1984 une image de cette surface en utilisant un ordinateur. L'image a révélé plusieurs symétries de la surface et a suggéré son plongement global. En s'inspirant de cette image ils ont trouvé une preuve mathématique du plongement de la surface.

THÉORÈME 10.4 (Hoffmann-Meeks, [10]). — *La surface donnée par le théorème 10.2 est "globalement" plongée.*

Preuve. — Voir Hoffmann-Meeks [10] et Hoffmann [9].

Appelons $S(i)$ la surface donnée au théorème 10.2. On verra plus tard la raison de cette dénomination.

DÉFINITION 10.5. — *Deux surfaces minimales M et $\overline{M}$ dans $\mathbf{R}^3$ sont égales s'il existe un mouvement rigide et une homothétie de $\mathbf{R}^3$ qui envoie M sur $\overline{M}$.*

Nous avons un théorème d'unicité pour $S(i)$.

THÉORÈME 10.6 (Costa [5]). — *$S(i)$ est la seule surface minimale complète plongée dans $\mathbf{R}^3$ avec courbure totale finie, genre un deux bouts catenoides et un bout plat.*

Hoffmann et Meeks ont aussi annoncer, voir Hoffmann-Meeks [12] l'existence d'une famille à un paramètre $S(iy)$, $y > 1$ de surfaces minimales plongées de genre un et trois bouts catenoides. Chaque surface $S(iy)$, $y > 1$, est conformément équivalente au tore $\mathbf{C}/L(1, iy)$, $L(1, iy) = \{m + niy \in \mathbf{C}; m, n \in \mathbf{Z}\}$, moins les points $q_1 = \pi(1/2)$, $q_2 = \pi(0)$, $q_3 = \pi(iy/2)$, $\pi : \mathbf{C} \rightarrow M/L(1, iy)$ la projection canonique.

Récemment nous avons montré

THÉORÈME 10.7 (Costa [6]). — *Les surfaces $S(iy)$, $y \geq 1$ sont toutes les surfaces minimales plongées dans $\mathbf{R}^3$ avec courbure totale 12π .*

D'autre part, on pourra aussi regarder la surface $S(i)$ donnée par le théorème 10.2 du point de vue des fonctions algébriques. Dans ce cas, le tore $\mathbf{C}/L(1, i)$ est la surface de Riemann de genre un M_1 définie par la fonction algébrique

$$\eta^2 = z(z^2 - e_1^2), \quad e_1 > 0,$$

et la représentation de Weierstrass (g, ω) , est

$$g = \frac{a}{\eta}, \quad \omega = \frac{z}{\eta} dz.$$

Les points q_1, q_2, q_3 enlevé de M_1 sont $q_1 = \infty, q_2 = e_1, q_3 = -e_1$ et M_1 est obtenue en collant deux copies du plan $\mathbb{C}$, d'où on a enlevé les segments de droites $]-\infty, -a]$ et $[0, a]$.

Soit maintenant la surface de Riemann de genre $k \geq 1$, $\overline{M}_k$ définie par la fonction algébrique

$$\eta^{k+1} = z^k(z^2 - C^2) \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad , \quad C > 0 \quad .$$

La surface M_k est obtenue en collant les segments de droite $[-\infty, -C]$ et les segments de droites $[0, C]$ sur $k+1$ copies du plan complexe. Soit $M_k = \overline{M}_k - \{\infty, a, -a\}$ et la paire (g, ω)

$$g = \frac{a}{\eta} \quad , \quad \omega = \left(\frac{z}{\eta}\right)^k dz \quad .$$

THÉORÈME 10.8 (Hoffmann-Meeks [11]). — *Pour chaque $k \geq 1$ la paire (g, ω) ci-dessus est la représentation de Weierstrass d'une surface minimale plongée dans $\mathbb{R}^3$. Pour chaque $k \geq 1$, M_k est de genre k , deux bouts catenoïdes, un bout plat et courbure totale $4\pi[k+2]$.*

Bibliographie

- [1] AHLFORS L.V., SARIO L. — *Riemann surfaces*, Princeton University Press, New Jersey, 1960.
- [2] BARBOSA L, COLARÈS G. — *Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$* , Lecture Notes in Math. Springer, 1195, 1986.
- [3] BERS L. — *Riemann surfaces*, Notes New-York University, Lecture Notes in Math. Springer, 17,18, 1957-58.
- [4] COSTA C.J. — *Example of a complete minimal immersion in $\mathbb{R}^3$ of genus one and three embedded ends*, Bol. soc. Brasileira de Matematica, 15 (1984), .
- [5] COSTA C.J. — *Uniqueness of complete minimal surfaces*, J. Differential Geometry, 1989 (à paraître).
- [6] COSTA C.J. — *Classification of complete minimal surfaces of total curvature 12π* , (Preprint).
- [7] COURANT R., HILBERT D. — *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, Interscience, New-York, 1962.
- [8] DO CARMO, MANFREDO. — *Differentiable curves and surfaces*, Prentice-Hall, New-Jersey, 1976.
- [9] HOFMANN. — *Mathematical Intelligencer*, 1987.
- [10] HOFMANN D., MEEKS W. — *A complete embedded minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with genus one and three ends*, J. Differential Geom., 21 (1985), .
- [11] HOFMANN D., MEEKS W. — *The global theory of properly embedded minimal surfaces*, (Preprint).
- [12] HOFMANN D., MEEKS W. — *On parameters families of minimal surfaces*, (in preparation).
- [13] HUBER A. — *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., 32 (1957), 13-72.

- [14] JORGE L., MEEKS W. — *The topology of complete minimal surfaces of finite total curvature*, Topology, **22** (1983), .
- [15] MACLANE G. — *On asymptotic values*, Abstract 603-166, Notices Am. Math. Society, **10** (1963), 482-483.
- [16] NEVILLE E. — *Elliptic functions : a primer*, Pergamon Press, 1971.
- [17] OSSERMANN R. — *A survey of minimal surfaces*, Dower Publications, 1986, 2ème édition.
- [18] OSSERMANN R. — *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Ann. of Math., (2)**80** (1964), 340-364.
- [19] SCHOEN R. — *Uniqueness, symetry and embeddeness of minimal surfaces*, J. Differential Geom., **18** (1983), .
- [20] SPIVAK M. — *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, **4** (1979), .
- [21] SPRINGER. — *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley Publish, 1979.
- [22] TANNERY J. et MOLK R. — *Fonctions elliptiques*, Vol. 1, 2, 3 et 4, Chelsca, .

Celso COSTA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Departamento de geometria
(Centro)
24000 - NITEROI - RJ
BRÉSIL