

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

FRANÇOIS LEDRAPPIER

**Mesure harmonique et mesure de Bowen-Margulis**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 7 (1988-1989), p. 135-138

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1988-1989\\_\\_7\\_\\_135\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__135_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1988-1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MESURE HARMONIQUE ET MESURE DE BOWEN-MARGULIS

par *François LEDRAPPIER*

Nous considérons une variété riemannienne compacte  $M$ , à courbures sectionnelles négatives, son revêtement universel  $\widetilde{M}$  et la sphère à l'infini  $\widetilde{M}(\infty)$  de  $\widetilde{M}$ . La propriété de courbure négative fait qu'il est possible de lire plusieurs propriétés de  $M$  sur la sphère à l'infini. Nous présentons ici quelques résultats – et des questions – dans ce sens. Des démonstrations plus détaillées sont dans [7].

### 1. Géométrie à l'infini.

Soit  $\widetilde{M}$  une variété simplement connexe munie d'une structure riemannienne telle qu'en tout point les courbures sectionnelles  $K_x$  vérifient  $-b^2 \leq K_x \leq -a^2 < 0$ . Nous notons  $\widetilde{M}(\infty)$  la sphère à l'infini de  $\widetilde{M}$  (voir par exemple [5]) et pour  $x$  dans  $\widetilde{M}$ ,  $\xi$  dans  $\widetilde{M}(\infty)$ , nous écrivons  $(x, \xi)$  le vecteur unitaire en  $x$  tangent à l'unique géodésique de vitesse unité  $\gamma_{x,\xi}$  partant de  $x$  et finissant vers  $\xi$ . Cette identification est pour tout  $x$  un homéomorphisme entre  $\widetilde{M}(\infty)$  et la sphère unité  $S_x \widetilde{M}$  de l'espace tangent à  $\widetilde{M}$  en  $x$ . Nous nous intéressons à deux fonctions qui décrivent la géométrie de  $\widetilde{M}$  "vue de  $\xi$ " :

*a.* — Pour  $x$  dans  $\widetilde{M}$ ,  $\xi$  dans  $\widetilde{M}(\infty)$ , la fonction de Busemann  $\theta_{x,\xi}$  est une fonction sur  $\widetilde{M}$  définie par

$$\theta_{x,\xi}(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(y, \gamma_{x,\xi}(t)) - t .$$

L'ensemble  $\theta_{x,\xi}^{-1}(\{0\})$  s'appelle l'horosphère du point  $(x, \xi)$  (voir [5] chapitre 3.9).

*b.* — Pour  $x$  dans  $\widetilde{M}$ ,  $\xi$  dans  $\widetilde{M}(\infty)$ , il existe une unique fonction harmonique positive  $k(x, \cdot, \xi)$  sur  $\widetilde{M}$  satisfaisant

1.  $k(x, x, \xi) = 1$
2.  $\lim_{z \rightarrow \chi} k(x, z, \xi) = 0$  si  $\chi$  est un point de  $\widetilde{M}(\infty)$ , distinct de  $\xi$  (voir [1]).

Si  $\widetilde{M}$  est le disque hyperbolique, les fonctions  $k(0, y, \xi)$  et  $e^{-\theta_{0,\xi}(y)}$ , coïncident avec le noyau de Poisson  $\frac{1 - |y|^2}{|y - \xi|^2}$ .

## 2. Comparaison dans le cas du revêtement universel d'une variété compacte.

En général, les deux fonctions introduites plus haut ne sont pas reliées entre elles. Si  $\widetilde{M}$  est le revêtement universel d'une variété compacte  $M$  de courbure strictement négative, la condition de bornitude est automatiquement vérifiée et le cas où ces deux fonctions coïncident a plusieurs caractérisations.

**THÉORÈME 1 [7].** - *Soit  $M$  une variété compacte de courbures sectionnelles strictement négatives. Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*a) Il existe  $x$  dans  $M$ ,  $\xi$  dans  $\widetilde{M}(\infty)$  tels que les fonctions  $k(x, \cdot, \xi)$  et  $\theta_{x,\xi}$  ont les mêmes courbes de niveaux;*

*b) La courbure moyenne des horosphères est constante;*

*c) Pour tous  $x, y$  dans  $\widetilde{M}$ ,  $\xi$  dans  $\widetilde{M}(\infty)$ ,*

$$k(x, y, \xi) = \exp(-h\theta_{x,\xi}(y))$$

*où  $h$  est l'entropie topologique du flot géodésique sur  $SM$ ; et*

*d)  $4\lambda_1 = h^2$ , où  $\lambda_1$  est la borne inférieure du spectre de  $-\Delta$  dans l'espace  $L^2(\widetilde{M}, dV)$ .*

Nous proposons d'appeler asymptotiquement harmoniques les métriques telles que les propriétés équivalentes du théorème 1 sont satisfaites. Rappelons qu'on appelle harmonique une variété où, par exemple, le noyau de la chaleur  $p(t, x, y)$  ne dépend que de  $t$  et de la distance  $d(x, y)$ .

**Question 1.** — Est-ce que en courbure négative, asymptotiquement harmonique implique harmonique? La réponse est oui en dimension 2 et en dimension 3. De fait, en dimension 2 ou 3, les variétés compactes de courbure strictement négative et asymptotiquement harmoniques sont de courbure constante.

## 3. Mesures à l'infini.

La propriété du théorème 1 étant très forte, nous introduisons une propriété a priori plus faible qui va porter sur certaines mesures à l'infini. Il est bien connu (voir e.g. [1]) qu'il existe une famille  $\{x \rightarrow \mu_x\}$  de mesures de probabilité sur  $\widetilde{M}(\infty)$  indexée par  $\widetilde{M}$  avec la propriété que pour  $x \neq y$ , les mesures  $\mu_x$  et  $\mu_y$  ont les mêmes ensembles négligeables et que la densité  $\frac{d\mu_y}{d\mu_x}$  est donnée par

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = k(x, y, \xi) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } \xi.$$

De même

PROPOSITION 2. — Soit  $M$  une variété compacte de courbure strictement négative,  $\widetilde{M}$  son revêtement universel. Il existe une famille de mesures de probabilité  $\{x \rightarrow \nu_x\}$  sur  $\widetilde{M}(\infty)$  indexée par  $\widetilde{M}$  et une fonction positive sur  $\widetilde{M}$  telles que les mesures  $\nu_x$  ont les mêmes ensembles négligeables et pour  $\nu$ -presque tout  $\xi$  :

$$(*) \quad \frac{d\nu_y}{d\nu_x}(\xi) = \exp(-h\theta_{x,\xi}(y)) \frac{U(y)}{U(x)}.$$

De plus  $\{\nu_x\}$  et  $U$  sont uniques avec cette propriété, à une constante multiplicative près.

L'existence et l'unicité de  $(\nu, U)$  suivent (cf. [7]) de l'unique ergodicité du feuilletage stable du flot géodésique [2].

PROPOSITION 3 [7]. — Avec les notations ci-dessus, les propriétés du théorème 1 sont aussi équivalentes à la propriété e) :

$$e) \mu_x = \nu_x \text{ pour tout } x \text{ de } \widetilde{M}$$

Une autre construction de la famille  $U_x$  peut se faire en imitant [3] : Pour tout  $x$  de  $\widetilde{M}$ , définissons une fonction  $C_x$  sur  $\widetilde{M}(\infty) \times \widetilde{M}(\infty)$  par :

$$C_x(\xi, \eta) = \exp(-\sup\{t : d(\gamma_{x,\xi}(t), \gamma_{x,\eta}(t)) \leq 1\}).$$

La fonction  $C_x$  n'est pas une distance sur  $\widetilde{M}(\infty)$  mais a suffisamment de propriétés pour que les notions de mesure sphérique de Hausdorff ou de dimension de Hausdorff aient un sens ([3]). La dimension de Hausdorff de  $\widetilde{M}(\infty)$  est alors  $h$  et la  $h$ -mesure de Hausdorff de  $\widetilde{M}(\infty)$  est non-nulle et finie ([3]). Il est alors facile de vérifier qu'en prenant pour  $\nu$  cette mesure normalisée et pour  $U$  la mesure totale de  $\widetilde{M}(\infty)$ , la relation (\*) est satisfaite. Il suit de cette construction en particulier que la fonction  $U$  est  $\pi_1(M)$ -invariante et satisfait à une condition de Hölder uniforme.

#### 4. Le problème de rigidité de la mesure harmonique.

Les classes de mesures  $\mu_x, \nu_x$  sont quasi-invariantes et ergodiques pour l'action naturelle du groupe  $\pi_1(M)$  sur  $\widetilde{M}(\infty)$ . Il y a donc a priori trois possibilités :

A) asymptotiquement harmonique,

B) pour tout  $x$ , les mesures  $\mu_x$  et  $\nu_x$  ont les mêmes ensembles négligeables, et

C) pour tout  $x$ , les mesures  $\mu_x$  et  $\nu_x$  sont singulières l'une par rapport à l'autre.

En dimension 2, il se trouve que  $B \Rightarrow A$  :

THÉORÈME 2 [7], (voir également [4]). — Soit  $M$  une surface compacte de courbure négative et supposons que pour un  $x$  de  $\widetilde{M}(\infty)$ , les mesures  $\mu_x$  et  $\nu_x$  ont les mêmes ensembles négligeables. Alors la courbure est constante.

Question 2. — A-t-on  $B \Rightarrow A$  en dimension plus grande?

*Remarque.* — Il suit de [6], [4] qu'en fait le cas  $B$ ) est réalisé dès que la dimension de la mesure harmonique au sens évoqué plus haut est  $h$ .

### Références

- [1] ANDERSON M.T., SCHOEN R. — *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math., 121 (1985), 429–461.
- [2] BOWEN R, MARCUS B. — *Unique ergodicity for horocycle foliation*, Isr. J. Maths, 26 (1977), 43–67.
- [3] HAMENSTADT U. — *A new description of the Bowen-Margulis measure*, à paraître Erg. Th. & Dynam. Sys..
- [4] HAMENSTADT U. — *Time-preserving conjugacies of geodesic flows*, prétirage.
- [5] KLINGENBERG W. — *Riemannian Geometry*, de Gruyter Studies in Maths I, 1982.
- [6] LEDRAPPIER F. — *Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively-curved manifolds*, Bol. Soc. Bras. Math., 19 (1988), 115–140.
- [7] LEDRAPPIER F. — *Harmonic measure and Bowen-Margulis measure*, prétirage.

François LEDRAPPIER  
UNIVERSITÉ DE PARIS VI  
UER 47  
4, place Jussieu  
75055 PARIS (France)