

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LAURENT GUILLOPÉ

Introduction à l'invariant η

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 103-114

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__103_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1988-1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION À L'INVARIANT η

par Laurent GUILLOPÉ

Soit (X, g) variété riemannienne compacte, $E \rightarrow X$ un fibré hermitien complexe (de rang fini) et $A : \mathcal{C}(E) \rightarrow \mathcal{C}(E)$ un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint d'ordre positif.

Le spectre $\sigma(A)$ de A est discret réel (sans point d'accumulation fini). Afin de mesurer l'asymétrie globale de A à travers son spectre, on introduit la fonction η_A définie par

$$\eta_A(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda > 0} \lambda^{-s} - \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} |\lambda|^{-s},$$

série absolument convergente pour $\Re s > \dim X / \text{ord } A$. L'invariant η de A est défini comme étant (l'invariant spectral) $\eta_A(0)$, dont la finitude est donnée par le

THÉORÈME η . *La fonction η_A admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, régulier en $s = 0$.*

Remarque 0.1. — Le théorème est valable pour A pseudo-différentiel d'ordre positif, ayant une demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\theta}$ (non réelle) d'ellipticité au sens où le spectre du symbole principal $a_p(\Xi)$ est inclus dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+ e^{i\theta}$ pour tout covecteur Ξ de T^*X . Dans la démonstration du th η , on se place dans la catégorie des opérateurs pseudodifférentiels.

Remarque 0.2. — On a

$$\eta_A(s) = \text{tr } A(A^2)^{-(s+1)/2} = \frac{1}{\Gamma((s+1)/2)} \int_0^\infty \text{tr } A e^{-tA^2} t^{(s+1)/2} \frac{dt}{t}$$

soit

$$\eta(A) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^\infty \text{tr } A e^{-tA^2} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Le théorème $_{\eta}$ est donc équivalent à l'existence d'un développement asymptotique de la trace de Ae^{-tA^2} , avec nullité des coefficients des termes les plus singuliers.

On notera la propriété d'invariance par homotétie sur l'opérateur : $\eta(\varepsilon A) = \eta(A)$.

Remarque 0.3. — On n'a pas tenu compte des valeurs propres nulles éventuelles de A , ce qui apparaît regrettable lorsqu'on considère des familles d'opérateurs (A_t) , dont une branche de valeur propre peut croiser 0, auquel cas la variation de η est un entier pair. On introduit $\bar{\eta}(A) = \frac{\dim \text{Ker } A + \eta(A)}{2}$ (considéré souvent modulo $\mathbb{Z}$), l'invariant η réduit. Cet invariant réduit intervient lorsqu'on utilise $\bar{\eta}$ comme phase du déterminant $\det A$.

Remarque 0.4 (Exemple). — Soit (E, ∇) un fibré hermitien avec connexion hermitienne sur $X = S^1$. Si $\partial/\partial\theta$ note le champ de vecteur unitaire sur S^1 , l'opérateur $A = i\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ est autoadjoint. D'autre part, en utilisant une base de la fibre E_{x_0} diagonalisant l'holonomie H_{x_0} (unitairement équivalente à $(e^{i\varphi_j})$), on trivialise de manière naturelle le fibré E , transformant l'opérateur A en la somme $\oplus_j -i\frac{d}{d\theta} + \varphi_j$, qui permet de caculer aisément l'invariant réduit $\bar{\eta} = \frac{\text{rk } E}{2} + \frac{\log \det H}{2i\pi}$.

La preuve du théorème $_{\eta}$, dans sa partie méromorphe, repose sur les résultats de Seeley concernant la fonction ρ d'opérateurs elliptiques semi-bornés (asymétrie totale). Pour obtenir la finitude de $\eta(A)$, on définit, à partir de l'éventuel résidu de la fonction η_A un morphisme de la K -théorie du fibré en sphères cotangentes S^*X dans $\mathbb{C}$, dont la nullité (établie en étudiant sa valeur sur une famille de générateurs de $K(S^*X)$) donnera celle du résidu. La démonstration nécessite de se placer dans la catégorie des opérateurs pseudodifférentiels, où nous avons le théorème $_{\eta}$ modifié :

THÉORÈME $_{\eta}$. — Soit X une variété riemannienne compacte, E fibré hermitien de rang fini sur X et A opérateur pseudodifférentiel d'ordre positif sur $C(E)$, à symbole principal elliptique autoadjoint. La fonction $\eta_A(s)$ est définie pour $\Re s > \dim X / \text{ord } A$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, régulier en $s = 0$.

Une ample (mais non exhaustive!) η -bibliographie, constituée à l'occasion des journées η organisées à Palaiseau sous l'égide de GADGET (17–19 avril 1989), clôt ce texte.

1. Les résultats de Seeley ([5])

Soit A un opérateur pseudo-différentiel classique. Son symbole total a admet (dans chaque carte U de X) un développement $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{\text{ord } A - j}$, où les $a_k(x, \xi)$, ($x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$) sont homogènes en ξ de degré k . On suppose que le symbole principal (défini comme section du fibré $\text{End}(\pi^* E) \rightarrow S^*X$, où π est la projection $S^*X \rightarrow X$) admet un rayon d'ellipticité $\mathbb{R}^+ e^{i\theta}$ (non réel), i.e. rayon ne rencontrant pas le spectre du symbole principal $a_{\text{ord } A}$.

Soit γ un contour de Cauchy (entourant le rayon $\mathbb{R}^+ e^{i\theta}$) pour la fonction μ^z (i.e.

$\mu^z = 1/2i\pi \int_{\gamma} u^z/(\mu - u)du$. La fonction A^{-s} définie par

$$A^{-s} = 1/2i\pi \int_{\gamma} u^{-s}/(A - u)du$$

est à valeurs opérateurs pseudodifférentiels.

Pour $\Re s > \dim X / \text{ord } A$, l'opérateur A^{-s} est de classe trace et la fonction-trace $\rho_A(s) = \text{tr } A^{-s}$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, régulier en $s = 0$. $\rho(A) = \rho_A(0)$ est l'intégrale sur S^*X d'une forme différentielle ω_A , qui, en coordonnées locales, s'exprime comme une expression polynomiale homogène de degré $\dim X$ en les dérivées des composantes homogènes du symbole de A , si l'on considère $\partial_x^\alpha a_{\text{ord } A-j}$ d'ordre d'homogénéité $|\alpha| + j$.

En particulier, si B est un opérateur d'ordre inférieur à $\text{ord } A - \dim X$, $\rho(A) = \rho(A + B)$.

Dans le cas d'un opérateur semi-borné, les fonctions η et ρ coïncident à une somme finie de valeurs propres près, on a donc le corollaire :

COROLLAIRE 1.1. — *Le théorème η est vrai pour A totalement asymétrique i.e. A semi-borné.*

COROLLAIRE 1.2. — *Avec les hypothèses du théorème η , la fonction η_A admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$.*

Preuve. — Les opérateurs $|A| = (A^2)^{1/2}$, $A + 2|A|$ et $A - 2|A|$ sont pseudodifférentiels et semi-bornés. On a

$$\eta_A(s) = \frac{\rho_{A+2|A|}(s) - \rho_{A-2|A|}(s)}{3^{-s} - 1},$$

ce qui permet de conclure avec le corollaire précédent. $\square$

DÉFINITION 1.3. — *On pose $R(A) = \text{Res}(s = 0, \eta_A(s)) \text{ord } A$.*

La normalisation est justifiée par l'égalité

$$\eta_A(s/d) = \eta_{|A|^{1/d}}(s)$$

qui implique $R(A) = R(|A|^{1/d})$. Le résidu $R(A)$ est un invariant local (car égal à $\int_X (\omega_{A+2|A|} - \omega_{A-2|A|}) / \log 3$, au contraire de $\eta(A)$ (dont la finitude a été vue dans le cas de fibrés sur S^1).

2. Asymétrie ([6])

On a deux cas simples où l'asymétrie de l'opérateur A est induite par une décomposition géométrique.

A. Asymétrie spectrale triviale. — On suppose que le fibré E est une somme directe $E_+ \oplus E_-$, stable par une décomposition de A en $A = A_+ \oplus A_-$ avec $\pm A_{\pm}$ semi-bornés positifs. Ceci induit une décomposition de la fonction η_A en la somme de deux fonctions η d'opérateurs semi-bornés, donc régulières en 0 d'après le corollaire 1.2.

B. Asymétrie microlocale triviale. — Le fibré π^*E (de base S^*X) a une décomposition $\pi^*E = L_+ \oplus L_-$, invariante sous l'action du symbole principal et telle $a_{\text{ord } A}(\Xi)|_{L_{\pm|\Xi}}$ soit positif. Si $\gamma_{\pm}$ est un lacet d'indice 1 par rapport à la partie positive du spectre de $\pm a_{\text{ord } A}(\Xi)|_{\pi^*E|\Xi}$, la projection de $\pi^*E|_{\Xi}$ sur $L_{\pm|\Xi}$ parallèlement à $L_{\mp|\Xi}$ est donnée par $(2i\pi)^{-1} \int_{\gamma_{\pm}} dz / (a_{\text{ord } A}(\Xi) - z)$.

DÉFINITION 2.1. — *L'opérateur A est dit microlocalement trivial si le(s) fibré(s) $L_{\pm}$ sur S^*X est isomorphe à un (des) fibré(s) image-réciproque de fibré sur X .*

Exemple 2.2. — Soit d la différentielle extérieure sur les formes différentielles $\Omega^*(X) = \mathcal{C}(\Lambda^*(X))$, δ son adjoint riemannien. L'opérateur $A = d + \delta$ a pour symbole principal $\xi \wedge + \xi \lrcorner$. Soit $p_{\pm} : L_{\pm} \rightarrow \pi^*\Lambda^{2^*}(X)$ la projection sur les formes de degré pair. Si $p_{\pm}\varphi = 0$, la composante de degré impair de φ est nulle aussi (vu $\xi \wedge \varphi + \xi \lrcorner \varphi = \pm \varphi$), et donc aussi φ . On en déduit que $p_{\pm}$ est un isomorphisme et que A est microlocalement trivial.

En fait, l'opérateur C , opérant par multiplication de $(-1)^k$ sur $\Lambda^k(X)$, anticommute avec $d + \delta$, ainsi le spectre de $d + \delta$ est symétrique et la fonction η_A nulle.

Si X est de dimension impaire orientée, notons par $\omega_X = i^{n+1}e_1 \dots e_{2n+1}$ la forme volume d'orientation (de norme unité) dans le fibré en algèbres de Clifford $\text{Cliff}_{\mathbb{C}}(TX)$ sur X . Le raisonnement fait pour A ne vaut pas, en fait $i\omega_X A$ n'est pas microlocalement trivial (cf. ci-dessous).

Exemple 2.3. — Soit X spinorielle de dimension impaire $2n+1$, $\text{Spin}(X) \rightarrow X$ un fibré principal de fibre $\text{Spin}(2n+1)$, F représentation spinorielle irréductible de $\text{Spin}(2n+1)$ et $F \rightarrow X$ le fibré $\text{Spin}(X) \times F / \text{Spin}(2n+1)$, avec opérateur de Dirac D_X . Notant par $\bullet$ l'action de Clifford sur F , le symbole principal de D_X est $i\xi \bullet$.

LEMME 2.4. — *Soit a l'automorphisme du fibré trivial F de fibre F sur $S^{2n}(\subset \mathbb{R}^{2n+1})$ défini par $a|_{F_{\xi}} = i\xi \bullet$. Le fibré $L_+(F) = \text{Ker}(a - 1)$ engendre la K -théorie réduite $\tilde{K}(S^{2n})$ de la sphère S^{2n} .*

Preuve. — Un générateur de $\tilde{K}(S^{2n})$ est décrit de la manière suivante en termes de groupes, espaces homogènes et représentations Spin ([4], p. 195). De l'inclusion $\text{Spin}(2n) \rightarrow \text{Spin}(2n+1)$, on déduit la restriction au niveau des anneaux de groupe de représentation $R(\text{Spin}(2n+1)) \rightarrow R(\text{Spin}(2n))$. Si Δ_+ note la représentation spinorielle irréductible de $\text{Spin}(2n)$ sur laquelle la forme volume de Clifford opère trivialement, on a plus précisément, en tant que $R(\text{Spin}(2n+1))$ -modules, $R(\text{Spin}(2n)) = R(\text{Spin}(2n+1) + \Delta_+ R(\text{Spin}(2n+1)))$. Considérant la sphère S^{2n} comme espace homogène $\text{Spin}(2n) / \text{Spin}(2n+1)$, on en déduit le fibré associé à la représentation Δ_+ , qui engendre la K -théorie réduite $\tilde{K}(S^{2n})$.

Pour définir la représentation spinorielle F de $\mathbb{R}^{2n+1}$, on choisit un axe ξ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ et une forme volume de Clifford $\omega_{\perp}$ dans $\xi^{\perp}$, ce qui induit la représentation $\psi : \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2n+1}) \rightarrow \text{Cliff}(\xi^{\perp}) \simeq \text{End}(F)$ définie sur les générateurs par $\psi(\xi) = i\omega_{\perp}$ et

$\psi|_{\xi^\perp} = id$. Les sous-espaces $\Delta_\pm = \text{Ker}(\omega \mp 1)$ de F sont les composantes irréductibles de F sous l'action de $\text{Spin}(\xi^\perp)$ (ce sont les deux représentations spinorielles irréductibles de $\text{Spin}(\xi^\perp) \simeq \text{Spin}(2n)$).

Ainsi le sous-espace positif F_+ (relativement à l'action de ξ) est Δ_+ et le fibré image réciproque $\pi_* F_+ \rightarrow \text{Spin}(2n+1)$ du fibré $F_+ \rightarrow S^{2n}$ par la projection $\pi : \text{Spin}(2n+1) \rightarrow S^{2n} = \text{Spin}(2n+1)/\text{Spin}(2n)$, de point base ξ ,

$$\pi_* F_+ = \{(\sigma, f), \sigma \in \text{Spin}(2n+1), f \in F, \sigma \xi \bullet f = f\}$$

est trivialisé par le morphisme

$$(\sigma, f) \in \text{Spin}(2n+1) \times \Delta_+ \rightarrow (\sigma, \sigma \bullet f) \in \pi_* F_+,$$

vu que $\sigma \in \text{Spin}(2n+1)$ opère sur $\mathbb{R}^{2n+1} (\subset \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2n+1}))$ suivant $\sigma \xi = \sigma \bullet \xi \bullet \sigma^{-1}$.

On obtient ainsi $F_+ \simeq \text{Spin}(2n+1) \times \Delta_+ / \text{Spin}(2n)$ et le lemme. $\square$

On en déduit que $(F \rightarrow X, D)$ n'est pas microlocalement trivial : sinon, pour $x \in X$, le fibré $L_{+|S^*X_x}$ serait trivial, ce qui n'est pas d'après le lemme.

En tant que $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2n+1})$ -module, $\Lambda^* \mathbb{R}^{2n+1}$ est isomorphe à $2^n(F_+ \oplus F_-)$, où F_+, F_- sont les deux représentations irréductibles de $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2n+1})$, distinguées par l'action (± 1) de la forme volume ω , élément central involutif de l'algèbre de Clifford. L'action de Clifford $\xi \bullet$ sur $\Lambda^* \mathbb{R}^{2n+1}$ s'identifie naturellement à l'action du symbole principal $\xi \wedge + \xi \lrcorner$.

Les représentations $(F_+, \xi \bullet)$ et $(F_-, \omega \xi \bullet)$ ($\xi \in \mathbb{R}^{2n+1}$) sont isomorphes, ainsi $(\Lambda^* \mathbb{R}^{2n+1}, \omega \xi \bullet)$ est isomorphe à $2^{n+1} F_+$, ce qui implique la non trivialité microlocale de $(\Omega(X), i\omega_X A)$ annoncée plus haut.

LEMME 2.5. — Soit A microlocalement trivial. Pour tout $m > 0$, il existe un pseudodifférentiel P_m d'ordre 0 tel que $P_m A P_m^{-1}$ soit un opérateur spectralement trivial, à un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-m$ près

COROLLAIRE 2.6. — Si A est microlocalement trivial, alors η_A est régulière en 0.

Preuve du corollaire. — On a $P_m A P_m^{-1} = T_m + r_m$, avec T_m spectralement trivial et $\text{ord } r_m < -m$. Le résidu $R(A)$ est un invariant spectral (car $\eta_A = \eta_{P_m A P_m^{-1}}$) et ne dépend que des composantes de degré au plus égal à $\text{ord } A - \dim X$ du symbole de A (ainsi $R(T_m + r_m) = R(T_m)$ si $\text{ord } r_m < \text{ord } T_m - \dim X$) : ainsi pour $m > \dim X - \text{ord } A$, on a $R(A) = R(T_m + r_m) = R(T_m) = 0$. $\square$

Preuve du lemme. — A la décomposition $\pi^* E = \pi^* E_+ \oplus \pi^* E_-$ correspond la décomposition matricielle du symbole a de A

$$\begin{pmatrix} a_+ & b \\ c & a_- \end{pmatrix}$$

avec $\sup(\text{ord } b, \text{ord } c) < \text{ord } a_{\pm} = \text{ord } A$. Dans le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ & b \\ c & a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ + kc & b - a_+k + ka_- - kck \\ c & a_- - ck \end{pmatrix},$$

on choisit le symbole k homogène, tel que

$$\begin{cases} \text{ord } k = \text{ord } b - \text{ord } a_+ (< 0) \\ \text{ord } b - a_+k + ka_- = 0 \end{cases}$$

ce qui est toujours possible grâce au lemme suivant, dont la démonstration est confiée au lecteur

LEMME 2.7. — Soient a_1, a_2 deux matrices d'ordre n_1, n_2 resp. dont les spectres sont disjoints. Alors l'opérateur S défini sur l'espace des matrices d'ordre (n_1, n_2) par $Sk = a_1k - ka_2$ est inversible.

Ainsi par conjugaison par des opérateurs pseudodifférentiels à symboles triangulaires supérieur (comme le précédent) ou inférieur, on fait décroître à volonté les ordres des opérateurs hors de la diagonale de A dans une représentation matricielle adaptée à la décomposition de π^*E . $\square$

3. Le morphisme de K -théorie

Notons par $\text{Vect}(M)$ l'espace des fibrés vectoriels sur l'espace M . Un fibré vectoriel de base compact étant stablement trivial, pour tout P de $\text{Vect}(S^*X)$, il existe un Q dans $\text{Vect } S^*X$ tel que $P \oplus Q \in \pi^* \text{Vect}(X)$. Soit a une section de $\text{Isom}(P \oplus Q)$ dont le noyau positif L_+ soit P (on peut prendre par exemple $p - q$ où p (resp. q) est la projection sur P parallèlement à Q (resp. ...)) et A un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal a et d'ordre positif. On pose $R(P) = R(A)$ et on a la proposition

PROPOSITION 3.1. — L'application R est bien définie sur $K(S^*X)$, s'annulant sur $\pi^*K(X)$.

Preuve. — Soit pour $i = 1, 2$ un fibré Q_i , un pseudodifférentiel A_i d'ordre d_i satisfaisant aux conditions précédemment énoncées. D'après la normalisation choisie pour le résidu $R(A)$, quitte à remplacer A_i par $A_i|A_i|^{\frac{1-d_i}{d_i}}$, on peut supposer $d_i = 1$. Le couple $(P \oplus Q_1 \oplus P \oplus Q_2, A_1 \oplus -A_2)$ est microlocalement trivial : $L_+ = P \oplus Q_2 = \pi^*E_2$. Ainsi $R(A_1 \oplus -A_2) = 0$ et, par additivité de R sur les sommes directes d'opérateurs, on en déduit $R(A_1) = R(A_2)$. Le résidu $R(P)$ est bien défini, autant sur $\text{Vect}(S^*X)$ que sur $K(S^*X)$. L'opérateur A correspondant à un élément de $\pi^* \text{Vect}(X)$, est par construction, microlocalement trivial, et donc à $R(A)$ nul. $\square$

La finitude de η_A en $s = 0$ est alors un corollaire de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — Le morphisme R est identiquement nul sur le quotient $K(S^*X)/\pi^*K(X)$.

Disons qu'un ensemble d'opérateurs pseudodifférentiels $\{A\}$ engendre un espace de K -théorie si la famille $\{L_+(A)\}$ l'engendre. La proposition précédente est établie

en montrant la nullité de R sur des générateurs de la K -théorie, dont une famille est donnée par le lemme topologique général suivant :

LEMME 3.3. — Soit X variété compacte. Le $K_Q(X)$ -module quotient $K_Q(S^*X)/\pi^*K_Q(X)$ est engendré par :

- les opérateurs différentiels d'ordre pair, si $\dim X$ est paire, ([2], p. 267).
- par l'opérateur de signature $\omega_X(d + \delta)$, si $\dim X$ est impaire ([2], p. 263).

Grâce à ce lemme, on peut montrer le cas de la dimension paire à partir de la dimension impaire. Soit A différentiel sur X et Q un opérateur pseudodifférentiel sur $C^\infty(F \rightarrow S^1)$ d'ordre $\text{ord } A$ et d'indice 1 (un tel opérateur n'est pas différentiel car tout opérateur différentiel sur S^1 est d'indice nul). L'opérateur

$$A \bowtie Q = \begin{pmatrix} A \otimes 1 & 1 \otimes Q^* \\ 1 \otimes Q & -A \otimes 1 \end{pmatrix}$$

opérant sur $C^\infty(E \otimes F \oplus E \otimes F \rightarrow M \times S^1)$ vérifie $\eta_{A \bowtie Q} = \text{Ind } Q \eta_A$ (si $\tilde{Q}$ est inversible, $A \bowtie \tilde{Q}$ est conjugué à son opposé par $\begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ -Q^* & 0 \end{pmatrix}$), mais n'est pas pseudodifférentiel (en raison de l'absence de décroissance du symbole de Q dans les directions conormales à S^1). Soit $B = -i\partial/\partial\theta$ et

$$Q(A) = e^{-i\theta} (B + (|B|^{\text{ord } A} + |A|)^{1/\text{ord } A}) + B - (B^{\text{ord } A} + |A|)^{1/\text{ord } A}.$$

Alors $A \bowtie Q(A)(|B| + |A|^{1/\text{ord } A})^{\text{ord } A - 1}$ est pseudodifférentiel, avec une fonction η égale à celle de A (en utilisant la propriété précédente dans une décomposition spectrale de A). Ainsi η_A est-elle régulière en $s = 0$.

En ce qui concerne la dimension impaire, la nullité de la fonction R sur les opérateurs de Grassmann–Dirac est démontrée de diverses manières :

* à la Atiyah–Patodi–Singer (qui introduisirent l'invariant η) Le groupe de cobordisme orienté en dimension impaire étant fini, on peut (quitte à prendre un nombre fini d'exemplaires de X , ce qui est sans importance pour examiner la nullité de l'invariant local $R(A)$) supposer que X borde une variété M . L'invariant η_A apparaît comme un terme correcteur à la formule de l'indice classique pour un problème elliptique naturellement associé à A sur la variété M .

* à la Gilkey On utilise la théorie des invariants orthogonaux, pour affirmer que R est l'intégrale d'une forme dans l'anneau engendré par les formes de Pontriagin, donc de dimension multiple de 4. L'intégrant sur X de dimension impaire, on obtient la nullité de R .

* à la Bismut En utilisant la supersymétrie grassmannienne (i.e. une $\mathbb{Z}_2$ -graduation convenable), on montre que les intégrants des termes les plus singuliers intervenant dans le développement de $\text{tr}(Ae^{-tA^2})$ en temps petit sont identiquement nuls (cette propriété n'est pas générique dans l'espace des opérateurs pseudodifférentiels, bien que l'intégration sur X donne toujours zéro).

Nous allons dans le paragraphe suivant esquisser largement la première démarche, pour le cas particulier de l'opérateur $\omega_X(d + \delta)$ sur $\Omega^*(X)$.

4. Le problème elliptique à bord d'Atiyah–Patodi–Singer

En général (voir [3] par *ex.*), un problème elliptique ("classique") sur une variété M à bord $X = \partial M$ est donné par un opérateur $D : \mathcal{C}(E \rightarrow M) \rightarrow \mathcal{C}(F \rightarrow M)$ et une condition au bord, représentée (dans le cas d'un opérateur D d'ordre 1) par un opérateur d'ordre 0 $B : \mathcal{C}(E \rightarrow M) \rightarrow \mathcal{C}(G \rightarrow \partial M)$ local (par exemple, projection sur la composante tangentielle dans le cas de l'opérateur d'Euler). Le problème (D, B) est elliptique si, en sus de l'ellipticité de D à l'intérieur, une condition dite de Lopatinski–Schapiro, est vérifiée. Sur ∂M , le symbole principal d_1 de D est de la forme

$$d_1(x, \xi_n dn + \xi) = \beta(\xi_n + a_1(\Xi))$$

avec $\Xi = (x, \xi) \in T^*X$, dn vecteur conormal à ∂M , $\beta \in \text{Hom}(\pi^*E|_{\Xi}, \pi^*F|_{\Xi})$ et $a_1 \in \text{End}(\pi^*E|_{\Xi})$. Si $b(\Xi) : \pi^*E|_{\Xi} \rightarrow \pi^*G|_{\Xi}$ est le symbole principal de B et $K_+(a_1)|_{\Xi}$ la somme des espaces propres généralisés de $a_1(\Xi)$ à valeurs propres de partie réelle positive, la condition de Lopatinski–Schapiro énonce l'inversibilité de $b(\Xi)$ opérant de $K_+(a_1)|_{\Xi}$ dans $\pi^*G|_{\Xi}$, condition qui implique, si elle est vérifiée, la trivialité microlocale de $\pi^*E|_{\partial M}$ relativement au symbole principal a_1 .

On munit la variété M d'une métrique riemannienne de type produit au voisinage de son bord. Soit $\frac{\partial}{\partial n}$ le vecteur normal (et dn son dual) à X , $\omega_X, \omega_M = dn\omega_X$ les formes volumes dans les algèbres de Clifford $\text{Cliff}(T^*X), \text{Cliff}(T^*M)$. On introduit $\Lambda^\pm(M) = \text{Ker}(\omega_M \bullet \mp 1)$ et on considère l'opérateur de signature $D_M = d + \delta : \mathcal{C}(\Lambda^+(M)) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda^-(M))$.

L'application, qui associe à la forme $\varphi \in \Lambda^*(X)$ la forme $\varphi \pm \omega_M \varphi$ de $\Lambda(M)|_X$, est un isomorphisme de $\Lambda^*(X)$ sur $\Lambda^\pm(M)|_X$, qui induit un isomorphisme de $p^*\Lambda^*(X)$ sur $\Lambda^\pm(M)$ au voisinage de X (p notant la projection normale sur le bord, projection définie sur un voisinage de ∂M). Dans ce voisinage, le symbole principal d_M de D_M (rapporté à $p^*\Lambda^*(X)$ via les isomorphismes précédents) est de la forme

$$d_M(\xi_n dn + \xi) = i\omega_X \bullet (-\xi_n + \omega_X \xi \bullet), \xi \in T^*X.$$

(en fait, D_M étant un opérateur naturel, on a $D_M \simeq dn \bullet (\frac{\partial}{\partial n} + \omega_X(d + \delta)_X)$) et, pour toute condition au bord, la condition de Lopatinski–Schapiro n'est pas vérifiée, vu la non trivialité microlocale de $A_X = i\omega_X(d + \delta)_X$ vue dans la partie 2.

Atiyah–Patodi–Singer introduisent la condition au bord B sur $\mathcal{C}(\Lambda^*(X))$ consistant en la projection L^2 sur l'espace positif relativement à l'opérateur A_X .

On a alors le théorème :

THÉORÈME 4.1 ([1]). - *Le problème (D_M, B) est Fredholm et*

$$(*) \quad \text{Ind}(D_M, B) = \int_M \omega_{D_M} - \bar{\eta}(A_{\partial M})$$

où ω_{D_M} est la forme canonique intervenant dans le théorème de l'indice pour l'opérateur D_M sur la variété close double de M .

La finitude de l'invariant $\eta(A)$ est implicite dans l'énoncé du théorème 4.1

Preuve. — (Résumé) L'indice du problème elliptique (D_M, B) a une expression en termes d'opérateurs de la chaleur :

$$\text{Ind}(D_M, B) = \text{tr}(e^{-tD_M D_M^*} - e^{-tD_M^* D_M}),$$

où $D_M D_M^*$ a pour domaine

$$\{u \in L^2, D_M u \in L^2, Bu = 0, D_M D_M^* u \in L^2, B^* D_M u = 0\}$$

On construit une paramétrice de ces opérateurs de la chaleur en recollant une paramétrice intérieure $e_i(t)$ et une paramétrice du collier $e_C(t)$. La première est obtenue à partir d'une paramétrice sur la variété double, la seconde à partir du problème (D_M, B) sur le cylindre $C_\infty = \mathbb{R}^+ \times X$, où l'étude se fait explicitement par séparation des variables en fonction de la théorie spectrale de l'opérateur sur la tranche X i.e. $i\omega_X(d_X + \delta_X)$. On a ainsi la formule de trace asymptotique

$$\text{Ind}(P, B) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_M e_i(t) + \int_C e_C(t).$$

L'intégrant du premier terme a un développement asymptotique (intégrable) comme il résulte de la théorie sur une variété close. Le second est, à un terme exponentiellement petit près, équivalent à $e_\infty(t) = \int_{C_\infty} e_{C_\infty}(t)$ pour lequel on a

$$\int_0^\infty (e_\infty(t) + \frac{\dim \text{Ker } A}{2}) t^s \frac{dt}{t} = -\frac{\Gamma(s+1/2)}{2s\sqrt{\pi}} \eta_A(2s).$$

L'existence du développement asymptotique pour $e_\infty(t)$ d'après (*) fournit le prolongement méromorphe de η_A , ainsi que sa finitude en $s = 0$: ainsi pour l'opérateur $i\omega_X(d + \delta)_X$ (non microlocalement trivial) le résidu R est nul. $\square$

Références

- [1] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry I.*, Mat. Proc. Camb. Soc., 77 (1975), 43-69.
- [2] GILKEY P. — *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.
- [3] HÖRMANDER L. — *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [4] HUSEMOLLER D. — *Fibre bundles*, Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [5] SEELEY R. — *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. in Pure Math., 10 (1967), 288-307.
- [6] WODZICKI M. — *Spectral asymmetry and zeta functions*, Inv. Math., 66 (1982), 115-135.

η -bibliographie

- [1] ATIYAH M. — *The logarithm of the Dedekind η -function*, Math. Ann., 278 (1987), 335-380.
- [2] ATIYAH M., DONNELLY H., SINGER I. — *Geometry and analysis of Shimizu L -functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 79 (1982), 5751-5752.

- [3] ATIYAH M., DONNELLY H., SINGER I. — *Eta invariants, signature defects of cusps and values of L-functions*, Ann. Math., **118** (1983), 131-177.
- [4] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry*, Bull. London Math. Soc., **5** (1973), 229-234.
- [5] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry I*, Mat. Proc. Camb. Soc., **77** (1975), 43-69.
- [6] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry II*, Mat. Proc. Camb. Soc., **78** (1975), 405-432.
- [7] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry III*, Mat. Proc. Camb. Soc., **79** (1976), 71-99.
- [8] BISMUT J-M., BOST J-B. — *Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes*, Preprint I.H.E.S., (1988), .
- [9] BISMUT J-M., CHEEGER J. — *Invariants éta et indice des familles pour des variétés à bord*, C. R. Acad. Sci. Paris, **305** (1987), 127-130.
- [10] BISMUT J-M., CHEEGER J. — *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones*, A paraître dans J. Func. Anal., (1989), .
- [11] BISMUT J-M., CHEEGER J. — η -invariants and their adiabatic limits, J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 33-70.
- [12] BISMUT J-M., FREED D. — *The analysis of elliptic families II. Dirac operators, éta invariants and the holonomy theorem*, Commun. Math. Phys., **107** (1986), 103-163.
- [13] BRÜNING J., SEELEY R. — *An index theorem for regular singular operators*, Amer. J. Math., (1987), .
- [14] BRÜNING J. — L^2 -index theorems for certain complete manifolds, A paraître dans J. Differential Geo., **0**, .
- [15] BURGHELEA D., KAPPELER T. — *On the determinant for elliptic differential operators in vector bundles over S^1* , Preprint, (1989), .
- [16] CHEEGER J. — *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geo., **18** (1983), 575-657.
- [17] CHEEGER J., GROMOV M. — *On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume*, Differential geometry and complex analysis, Vol. dedicated to H. E. RAUCH, (1985), 115-154.
- [18] CHEEGER J. — *Eta invariants, the adiabatic approximation and conical singularities*, J. Differential Geo., **26** (1987), 175-221.
- [19] CHOU A. W. — *The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive curvatures*, Tans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 1-40.
- [20] DAI X. — *Ph. D. Thesis, SUNY at Stony Brook*, , **0**, .
- [21] DONNELLY H. — *Spectral geometry and invariants from differential topology*, Bull. London Math. Soc., **5** (1975), 147-150.
- [22] DONNELLY H. — *Eta invariant of a fibered manifold*, Topology, **15** (1976), 247-252.
- [23] DONNELLY H. — *Eta invariants for G-spaces*, Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), 899-918.
- [24] DOUGLAS R. — *Elliptic invariants for differential operators*, Proceedings in Pure mathematics, **48** (1988), 275-285.
- [25] DOUGLAS R., HURDER S., KAMINKER J. — *Toeplitz operators and the eta invariant : the case of S^1* , Index theory of elliptic operators, foliation and operator algebras, Contemporary mathematics, **70** (1988), 11-42.

- [26] DOUGLAS R., WOJCIECHOWSKI K. — *Spectral flow of families of elliptic boundary value problems and adiabatic limits of the η -invariants*, preprint, 0, .
- [27] GILKEY P. — *The residue of the local eta function at the origin*, Math. Ann., **240** (1979), 183-189.
- [28] GILKEY P. — *The residue of the global eta function at the origin*, Adv. in Math., **40** (1981), 290-307.
- [29] GILKEY P. — *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.
- [30] GILKEY P. — *The eta invariant and second characteristic classes of locally flat bundles*, Algebraic and differential topology, global differential geometry, Texte zur Math., Teubner, Leipzig, **70** (1984), 49-88.
- [31] GILKEY P. — *The eta invariant and the K-theory of odd dimensional spherical space forms*, Inv. Math., **76** (1984), 421-453.
- [32] GILKEY P. — *The eta invariant for even dimensional Pin_c -manifolds*, Adv. in Math., **58** (1985), 243-284.
- [33] GILKEY P. — *The eta invariant and KO of lens spaces*, Math. Zeitschrift, **194** (1987), 309-320.
- [34] GILKEY P., SMITH L. — *The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 85-132.
- [35] GILKEY P., SMITH L. — *The twisted index theorem for manifolds with boundary*, J. Differential Geo., **18** (1983), 393-444.
- [36] KASSEL . — *Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki)*, séminaire Bourbaki, (1989), .
- [37] KATASE K. — *Eta function on three-sphere*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **57** (1981), 233-237.
- [38] KOMURO M. — *On Atiyah-Patodi-Singer eta invariants for S^1 -bundles over Riemann surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math., **30** (1984), 525-548.
- [39] KRECK M., STOLZ S. — *A diffeomorphism classification of 7-dimensional homogenous Einstein manifolds with $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -symmetry*, Ann. Math., **127** (1988), 373-388.
- [40] LAZAROV C. — *Spectral invariants for foliations*, Michigan J. Math., **33** (1986), 231-243.
- [41] LAZAROV C. — *A relation between index and exotic classes*, Index theory of elliptic operators, foliation and operator algebras, Contemporary mathematics, **70** (1988), 125-144.
- [42] MAZZEO R., MELROSE R. — *The adiabatic limit, Hodge cohomology and the Leray's spectral sequence of a fibration*, preprint, (1988), .
- [43] MILLSON J. — *Closed geodesics and the eta invariant*, Ann. Math., **108** (1978), 1-39.
- [44] MOSCOVICI H., STANTON R. — *Eta invariants of Dirac operators on locally symmetric manifolds*, Inv. Math., **95** (1987), 629-666.
- [45] MÜLLER W. — *Signature defects of cusps of Hilbert modular surfaces and values of L-functions at $s = 1$* , J. Differential Geo., **20** (1984), 55-119.
- [46] MÜLLER W. — *Manifolds with cusps of rank one*, Lecture notes in Math. **1244**, 1987.
- [47] MÜLLER W. — *L^2 -index and resonances*, Lecture notes in Math., **1339** (1988), 203-211.
- [48] MÜLLER W. — *L^2 -index, eta invariants and values of L-functions*, A paraître dans Contemp. Math, 0, .
- [49] SINGER I. — *The η -invariant and the index*, Proc. Conf. on string theory, University of California at San Diego, 1986.
- [50] SMITH L. — *The e invariant and finite covering*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1975), 659-675.
- [51] STERN M. — *L^2 -index theorems on locally symmetric spaces*, Inv. Math., **96** (1989), 231-282.
- [52] WITTEN E. — *Global gravitational anomalies*, Commun. Math. Phys., **100** (1985), 197-229.

- [53] WODZICKI M. — *Local invariants of spectral asymmetry*, Inv. Math., **75** (1984), 143–178.
- [54] WODZICKI M. — *Non commutative residues I : Fundamentals. K-Theory, arithmetic and geometry*, séminaire, Moscou 1984-1986, Lecture notes in Math., **1289** (1987), 320–399.
- [55] WODZICKI M. — *Spectral asymmetry and zeta functions*, Inv. Math., **66** (1982), 115–135.
- [56] WOJCIECHOWSKI K. — *Spectral asymmetry, elliptic boudary value problem, cutting and pasting of elliptic operators*, , (), .
- [57] YOSHIDA T. — *The eta invariant of hyperbolic 3-manifolds*, Inv. Math., **81** (1985), 473–514.

Laurent GUILLOPÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)