Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

RENÉ MICHEL

Une inégalité intégrale concernant certaines fonctions Log-concaves

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 65-70

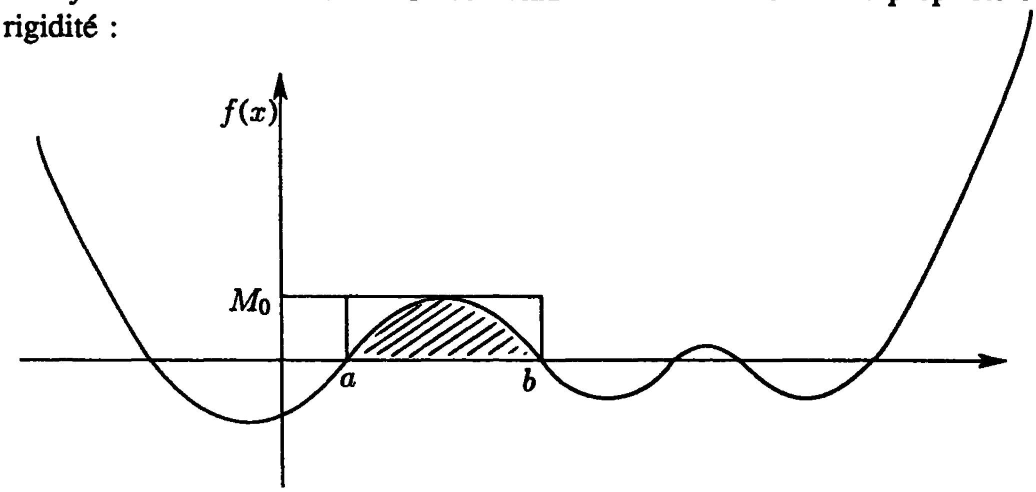
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__65_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1987–1988 (65–70)

UNE INÉGALITÉ INTÉGRALE CONCERNANT CERTAINES FONCTIONS LOG-CONCAVES

par *René MICHEL*

1. — Dans un article de 1939 aux Annals of Math., intitulé "*On polynomials with only real roots*" ERDÖS et GRÜNWALD montraient la curieuse propriété suivante de rigidité :



Soit, sur cette figure, le graphe d'un polynôme f dont toutes les racines sont réelles; a et b sont deux racines consécutives et $f(x) > 0$ sur $]a,b[$. Alors, si $M_0 = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$,

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \frac{2}{3}(b-a)\cdot M_0 \ . \qquad (1.1)$$

Si f est un polynôme du deuxième degré : $f(x) = A(x-a)(b-x)$ il y a égalité dans cette relation.

Cette propriété fut reprise et généralisée à une fonction entière d'ordre inférieur à 2 n'ayant que des racines réelles dans un bel article de S.K. IYENGAR en 1941 (même revue) par une méthode toute différente et très "compréhensive"; il en résulte en particulier que l'inégalité *(1.1)* n'est atteinte que par les polynômes du deuxième degré.

L'analyse de la preuve de IYENGAR montre que l'inégalité *(1.1)* se généralise dans $\mathbf{R}^n$ Euclidien, lorsque f vérifie une propriété de concavité et s'annule sur le bord de la sphère S_{n-1} d'une boule Euclidienne B_n , par la formule :

$$\int_{B_n} f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n \leqslant \frac{2}{n+2}\,\mathrm{Vol}(B_n)\cdot \sup_{x\in B_n} f(x)\,. \tag{1.2}$$

Ici encore la constante est optimale et l'égalité est obtenue seulement pour le polynôme p_0 tel que :

$$p_0(x) = M_0(R^2 - \|x-a\|^2)$$

avec $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x-a\|^2 < R^2\}$ et $M_0 > 0$, constant. La notation Vol désigne le volume Euclidien.

1.3. — Il est clair que l'on ne restreint pas la généralité en considérant dans la suite $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x\|^2 < 1\}$, c'est-à-dire en prenant $a = 0$ et $R = 1$.

2. — L'espace de fonctions considéré.

2.1. DÉFINITION. — *Soit $f : B_n \to R^+$ de classe C^2 . $f \in E \Longleftrightarrow \exists\varphi$ définie et continue sur $\overline{B}_n$, $\varphi > 0$, de classe C^2 sur B_n telle que* $\mathrm{Log}\,\varphi$ *est* concave *et* $f(x) = (1 - \|x\|^2)\cdot\varphi(x)$.

La propriété de Log-concavité est essentiellement utilisée ainsi : le Hessien de $\mathrm{Log}\,\varphi$ est en tout point une forme quadratique non positive :

$$\forall x \in B_n, \forall h \in \mathbf{R}^n\ , (\mathrm{Log}\,\varphi)''(x)(h,h) \leqslant 0\,.$$

2.2. PROPRIÉTÉ. — ***E est stable par addition, par multiplication et par passage à la limite ponctuelle qui conserve la régularité.***

Ces propriétés des fonctions Log-concaves sont classiques (voir par ex. [3]).

D'autre part puisque

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(1 - \|x\|^2) = -2\ ,$$

la fonction $1 - \|x\|^2$ est concave et positive; elle est donc aussi Log-concave, comme il est classique.

2.3. THÉORÈME. — ***$\forall f \in E$, l'inégalité (1.2) est vérifiée. L'égalité a lieu, si et seulement si, f est un polynôme du deuxième degré.***

2.4. Remarque. — Dans l'écriture $f(X) = (1 - \|X\|^2)\cdot\varphi(X)$ si φ n'est plus supposée Log-concave mais seulement Log-surharmonique la majoration (1.2) n'est plus nécessairement vérifiée; par exemple, si $n = 2$ et $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)e^{x^2-y^2}$ on voit rapidement que $\max_{B_2} f = 1$ et en calculant en coordonnées polaires :

$$\int\int_{B_2} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-u)(1+\sum_{k=1}^{\infty} u^k \cos^k 2\theta)dud\theta$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-u)(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{u^{2p}}{(2p!)}\cos^{2p} 2\theta)dud\theta > \frac{\pi}{2} .$$

3. — Démonstration de l'inégalité (1.2).

3.1. — Soit $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in B_n$ et $M_0 > 0$ fixés.

On considère le paraboloïde elliptique $\mathcal{P} \subset R^{n+1}$, tangent en (x_0, M_0) au plan $x_{n+1} = M_0$ et qui s'appuie sur la sphère S_{n-1} d'équation $\|x\| = 1$, $x_{n+1} = 0$. Soit alors $p : B_n \to R^+$ définie par la condition :

$$\{(x, p(x))/x \in B_n\} \subset \mathcal{P}$$

i.e. : le graphe de p est contenu dans le paraboloïde $\mathcal{P}$.

3.2. PROPOSITION. — *Si $x^0 \neq 0$ on a :*

$$p(x) = (1 - \|x\|^2)\cdot\frac{1}{v(x)}$$

où $v : B_n \to R_+^*$ est une fonction strictement concave sur B_n .

Cette proposition sera prouvée plus loin. Remarquons que si $x^0 \neq 0$ la fonction p n'appartient pas à E : en fait $1/v$ est strictement convexe comme $\mathrm{Log}\, 1/v$.

Notons que par définition de E , f atteint son maximum dans B_n .

La proposition *3.2* a la conséquence suivante :

3.3. PROPOSITION. — *Soit $f \in E$ telle que :*

$$\sup_{x\in B_n} f(x) = f(x^0) = \sup_{x\in B_n} p(x) = p(x^0) = M_0 ;$$

si $x^0 \neq 0$ on a $f(x) < p(x)$ sur $B_n - \{x^0\}$
si $x^0 = 0$ on a $f(x) \leqslant p_0(x)$ sur B_n .

Démonstration de 3.3. — Soit $j \in \mathbf{R}^n$, $\|j\| = 1$. Posons $\tilde{f}(t) = f(x^0 + jt)$ et $\tilde{p}(t) = p(x^0 + jt)$ avec $t \in]t_1, t_2[$ tel que $x^0 + jt \in B_n$.

Soit

$$\psi(t) = \mathrm{Log}\, \tilde{f}(t) - \mathrm{Log}\, \tilde{p}(t)$$
$$\psi(t) = \mathrm{Log}\, \psi(x^0 + jt) + \mathrm{Log}\, v(x^0 + jt)$$

d'après *3.2* et *2.1*.

On a :

$$\psi(0) = \operatorname{Log} \tilde{f}(0) - \operatorname{Log} \tilde{p}(0) = M_0 - M_0 = 0$$

de même

$$\psi'(0) = \frac{\tilde{f}'(0)}{\tilde{f}(0)} - \frac{\tilde{p}'(0)}{\tilde{p}(0)} = 0$$

puisque f et p sont maximum en x^0 .

D'autre part la concavité de $\operatorname{Log} \varphi$ et la stricte concavité de v impliquent, si $x^0 \neq 0$,

$$\forall t \in]t_1, t_2[\ , \ \psi''(t) < 0 \ .$$

Il en résulte : $\psi(t) < 0$, $\forall t \in [t_1, t_2] - \{0\}$ donc

$$\tilde{f}(t) < \tilde{p}(t) \ .$$

En faisant varier j on a $f(x) < p(x)$ sur $B_n - \{x^0\}$.

Si $x^0 = 0$ on a $p(x) = p_0(x) = M_0(1 - \|x\|^2)$ et v est constante. Dans ce cas les inégalités strictes sont remplacées par $\leqslant$ dans les raisonnements ci-dessus.

3.4. Encadrement de $\int_{B_n} p(X)dX_1 \cdots dX_n$. — L'application linéaire u définie par :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1^0 \cdot M_0^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2^0 \cdot M_0^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n^0 \cdot M_0^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3.4.1}$$

transforme le paraboloïde défini par :

$$p_0(x) = M_0(1 - \|x\|^2)$$

en le paraboloïde $\mathcal{P}$ contenant le graphe de p . D'autre part, on a :

$$\int_{B_n} p_0(x) dx_1 \cdots dx_n = \operatorname{Vol}(G_0) \tag{3.4.2}$$

avec $G_0 = \{(x, y) \in B_n \times \mathbf{R}^+ \ ; \ 0 \leqslant y \leqslant p_0(x)\}$.

On voit facilement que

$$u(G_0) \supset \{(X, y) \in B_n \times \mathbf{R}^+ \ ; \ 0 \leqslant y \leqslant p(X)\} \ .$$

Puisque $\operatorname{Det} u = 1$ on a

$$\operatorname{Vol}\big(u(G_0)\big) = \operatorname{Vol}(G_0) \tag{3.4.3}$$

et

$$\operatorname{Vol}\big(u(G_0)\big) \geqslant \int_{B_n} p(X) dX_1 \cdots dX_n \ . \tag{3.4.4}$$

Par un calcul simple on obtient :

$$(3.4.5) \qquad \int_{B_n} M_0(1-\|x\|^2)dx_1\cdots dx_n = \frac{2}{n+2}\cdot \mathrm{Vol}(B_n)\cdot M_0 = \mathrm{Vol}(G_0)\ .$$

D'autre part, d'après *(3.3)*, on a, si f n'est pas un polynôme du deuxième degré,

$$(3.4.6) \qquad \int_{B_n} f(x)dx_1\cdots dx_n < \int_{B_n} p(x)dx_1\cdots dx_n$$

et par conséquent d'après *(3.4.6)*, *(3.4.5)*, *(3.4.4)*, *(3.4.3)* il vient l'inégalité cherchée :

$$(1.2) \qquad \int_{B_n} f(x)dx_1\cdots dx_n < \frac{2}{n+2}\cdot \mathrm{Vol}(B_n)\cdot M_0\ .$$

Il y a égalité dans *(1.2)* si et seulement si

$$f(x) = M_0(1-\|x\|^2) = p_0(x)$$

d'après *(3.3)* et *(3.4.5)*.

4. — Vérification de la proposition *3.2*.

On transforme par $u \in S\ell(n+1,\mathbf{R})$ le graphe de $p_0(x) = M_0(1-\|x\|^2)$ définie sur B_n; on obtient, en posant $Y_{n+1} = \frac{1}{M_0}\cdot X_{n+1}$, l'équation du graphe de p :

$$Y_{n+1} = 1-(X_1-x_1^0\cdot Y_{n+1})^2-\cdots-(X_n-x_n^0\cdot Y_{n+1})^2$$

ou encore

$$(4.1) \qquad \|x^0\|^2\cdot Y_{n+1}^2+(1-2\langle x^0,X\rangle)\cdot Y_{n+1}+\|X\|^2-1=0\ .$$

Posons $q(X) = \frac{1}{M_0}p(X)$, $X \in B_n$.

La racine positive dans *(4.1)* est $q(X)$; notons $W(X)$ la racine négative. On a donc

$$(4.2) \qquad q(X)\cdot W(X) = \frac{\|X\|^2-1}{\|x^0\|^2}$$

$$(4.3) \qquad q(X)+W(X) = \frac{-1}{\|x^0\|^2}+\frac{2\langle x^0,X\rangle}{\|x^0\|^2}\ .$$

Puisque x^0 est quelconque, il suffit pour vérifier la concavité de dériver en un point X quelconque, dans la direction de X_1 par exemple.

En dérivant dans *(4.2)* et *(4.3)* il vient :

$$(4.4) \qquad \partial_1 q\cdot W+q\cdot\partial_1 W = \frac{2X_1}{\|x^0\|^2}$$

$$(4.5) \qquad \partial_1 q+\partial_1 W = \frac{2x_1^0}{\|x^0\|^2}$$

$$(4.6) \qquad \partial_1\partial_1 q+\partial_1\partial_1 W = 0$$

$$\partial_1\partial_1 q \cdot W + 2\partial_1 q \cdot \partial_1 W + q \cdot \partial_1\partial_1 W = \frac{2}{\|x^0\|^2} \ . \tag{4.7}$$

On en déduit facilement

$$\partial_1\partial_1 q \cdot (W - q) = 2\left(\partial_1 q - \frac{x_1^0}{\|x^0\|^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\|x^0\|^2 - (x_1^0)^2}{\|x^0\|^4}\right) \ .$$

Puisque $W(X) - q(X) < 0$ d'après *(4.2)* on a

$$\partial_1\partial_1 q < 0 \quad \text{et} \quad \partial_1\partial_1 W > 0 \quad \text{sur} \quad B_n \ . \tag{4.8}$$

En fait, on voit rapidement que ces inégalités sont nécessairement strictes.

En posant $v(X) = -\frac{\|x^0\|^2}{M_0} \cdot W(X)$ et en tenant compte de *(4.2)* et *(4.8)* on obtient la proposition *3.2*.

Références

[1] ERDÖS P. and GRÜNWALD T. — *On polynomials with only real roots*, Ann. of Math., 40 (3) (1939), 537-548.

[2] IYENGAR K. — *A property of integral functions of order less than two with real roots*, Ann. of Math., 42 (4) (1941), 823-828.

[3] ROBERTS A.W. et VARBERG D.E. — *Convex functions*, Academic Press, 1973.

René MICHEL
UNIVERSITÉ D'AVIGNON
Département de Mathématiques
33, rue Pasteur
84000 AVIGNON