Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

COLETTE ANNÉ

Principe de Dirichlet pour les formes différentielles

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 61-64

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__61_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1987–1988 (61–64)

PRINCIPE DE DIRICHLET POUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES

par *Colette ANNÉ*

Le but de ce texte est de compléter l'article de Duff et Spencer [DS] qui énoncent un principe d'existence et d'unicité du prolongement harmonique à partir de la valeur au bord pour les formes différentielles (Theorem 1 p.137) en démontrant l'unicité :

THÉORÈME. *Soit (X, g) une variété riemannienne à bord Y, si ω est une p-forme différentielle harmonique sur X dont la valeur est nulle en chaque point de Y, alors ω est nulle.*

Pour ce faire on prouve une inégalité du type Carleman, en suivant la méthode développée par Aronszajn [A] et qui permit à Aronszajn, Krzywicki et Szarski [AKS] de montrer qu'une forme harmonique infiniment nulle en un point était identiquement nulle. Nous avons choisi de faire une démonstration autonome, plutôt que d'utiliser cet article difficile, espérant ainsi éclairer par l'utilisation de la dérivée covariante cette méthode si féconde. Je remercie ici Josef Dodziuk qui m'a indiqué cet article peu connu.

Démonstration. — Montrons d'abord que ω est nulle dans un voisinage tubulaire du bord. Dans les coordonnées normales au bord, si t est la distance au bord, la métrique s'écrit $dt^2 + g(t)$ et définit ainsi une famille C^∞ au voisinage de 0 de métriques sur Y; ω s'écrit $\omega_1 + dt \wedge \omega_2$ et par hypothèse ω_1 et ω_2 sont identiquement nulles en $t = 0$. Donc d'après la formule de Stokes ω est fermée et cofermée, ce qui signifie, si $'$ désigne la dérivation par rapport à t, d_Y la différentielle extérieure de Y et $*_t$ l'opérateur de Hodge de la métrique $g(t)$:

$$\mathrm{d}_Y\omega_1 = 0, \quad \omega_1' = \mathrm{d}_Y\omega_2, \quad \mathrm{d}_Y *_t \omega_2 = 0, \quad (*_t\omega_2)' = (-1)^p \mathrm{d}_Y *_t \omega_1.$$

On voit alors que ω est nulle à l'ordre ∞ en $t = 0$: posons $u = \int_0^t \omega_2 ds$, ainsi $\omega_1 = du$ et $u' = \omega_2$ et u vérifie

$$\mathrm{d}_Y *_t u' = 0, \quad \left(*_t u'\right)' = (-1)^p \mathrm{d}_Y *_t \mathrm{d}_Y u.$$

L'équation en ω est elliptique donc u est de classe C^∞ et admet un développement limité en t, mais $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$, la deuxième équation entraîne donc que u est nulle à l'ordre infini en $t = 0$ et aussi ω.

On peut alors utiliser les méthodes de Aronszajn, notre résultat découle d'une inégalité du type Carleman :

LEMME. — *Soit α une p-forme à support dans le voisinage tubulaire $[0, t_0]$ de Y et nulle à l'ordre ∞ en $t = 0$, il existe une constante C, qui dépend de la géomètrie de X au voisinage de Y, telle que si t_0 est plus petit que C, α vérifie l'inégalité:*

$$\forall n \in N, \quad \int_X s^{-n-1} |\alpha(s)|^2 \leq \frac{1}{4} \int_X s^{-n+1} \left(|\mathrm{d}\alpha|^2 + |\delta\alpha|^2 \right).$$

Remarque. — Ici la norme des formes différentielles est celle canoniquement associée à la stucture riemannienne de X, l'opérateur différentiel d et son adjoint pour cette structure euclidienne δ agissent sur les formes de X.

Voyons d'abord comment ce lemme suffit à notre résultat. En multipliant ω par une fonction de t nulle pour $t > t_0$ et égale à 1 vers 0, on obtient une forme α dans les hypothèses du lemme et fermée et cofermée pour $0 \leq t \leq t_1 < t_0$. En multipliant l'inégalité du lemme par t_1^n on obtient à droite une expression bornée en n, donc $\int_{t<t_1} \left(\frac{s}{t_1}\right)^{-n} |\omega|^2$ doit être bornée, ce qui n'est possible que si ω est nulle sur ce petit tube.

Démonstration du lemme. — Soit $y \in Y$, au voisinage de ce point la forme volume de X s'écrit: $v(t, y) dt dy$, par ailleurs α étant nulle en 0 et t_0, on a $0 = \int \frac{\partial}{\partial s} \left(s^{-n} |\alpha(s)|^2 v(s, y) \right) ds$. Notons T le champ de vecteurs $\partial / \partial s$ et D la connexion de Levi-Civita de X, α vérifie donc :

$$\int_0^{t_0} n s^{-n-1} |\alpha(s)|^2 v(s, y) ds = 2 \int_0^{t_0} s^{-n} \langle D_T \alpha, \alpha \rangle v(s, y) ds + \int_0^{t_0} s^{-n} |\alpha(s)|^2 v'(s, y) ds.$$

Si M est un majorant de $|v'/v|$ sur un voisinage tubulaire de Y de longueur $\tau \geq t_0$ fixé on obtient par intégration sur Y puis avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left(\frac{n - M t_0}{2}\right)^2 \int_X s^{-n-1} |\alpha|^2 \leq \int_X s^{-n+1} |D_T \alpha|^2.$$

Regardons maintenant $I = \int_X s^{-n+1} \left(|\mathrm{d}\alpha|^2 + |\delta\alpha|^2 \right)$.

En décomposant α : $\alpha = \alpha_1 + dt \wedge \alpha_2$, si δ_t est l'adjoint de d_Y pour la métrique $g(t)$, c'est à dire que dans un repère orthonormé mobile $(T, e_1, \ldots, e_{d-1})$ on a les formules (voir [B], p.119 pour les détails) :

$$\mathrm{d}_Y = \sum_i e_i^* \wedge D_{e_i}. \quad \text{et} \quad \delta_t = - \sum_i D_{e_i} e_i^* \lrcorner. \quad ,$$

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}_Y\alpha_1 + dt \wedge (D_T\alpha_1 - \mathrm{d}_Y\alpha_2) \quad \text{et} \quad \delta\alpha = \delta_t\alpha_1 - D_T\alpha_2 - dt \wedge \delta_t\alpha_2.$$

Donc $I = \displaystyle\int_X t^{-n+1}\Big(|D_T\alpha|^2 + |\mathrm{d}_Y\alpha_1|^2 + |\delta_t\alpha_1|^2 + |\mathrm{d}_Y\alpha_2|^2 + |\delta_t\alpha_2|^2$

$$-2\big(\langle\delta_t\alpha_1, D_T\alpha_2\rangle + \langle D_T\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle\big)\Big)$$

$$\begin{aligned} A &= -2\int_X t^{-n+1}\left(\langle\delta_t\alpha_1, D_T\alpha_2\rangle + \langle D_T\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle\right) \\ &= -2\int_X t^{-n+1}\left(\langle\alpha_1, \mathrm{d}_Y D_T\alpha_2\rangle + \langle D_T\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle\right) \\ &= -2\int_X t^{-n+1}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\left(\langle\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle\right) + \langle\alpha_1, (\mathrm{d}_Y D_T - D_T\mathrm{d}_Y)\alpha_2\rangle\Big) \end{aligned}$$

Le défaut à ce que $(\mathrm{d}_Y D_T - D_T\mathrm{d}_Y)$ soit un terme de courbure, et donc un opérateur borné, est dans le repère mobile précédent, en $D_{[e_i,T]}$. On peut construire ce repère par transport parallèle le long des géodésiques normales à Y, alors $[e_i, T] = D_{e_i}T$ est toujours orthogonal à T et ce défaut est borné par la norme de l'opérateur de connexion de Levi-Civita intrinsèque à $(Y, g(t))$; en appliquant la formule de Weißenböck à cette connexion on obtient alors si r est une borne supérieure de l'opérateur de courbure sur $(Y, g(t))$ pour $0 \leq t \leq \tau$, qu'il existe une constante c_1 telle que

$$\int_{Y_s} |\langle\alpha_1, (\mathrm{d}_Y D_T - D_T\mathrm{d}_Y)\alpha_2\rangle|$$
$$\leq c_1\Big(\int_{Y_s}|\alpha_1|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_{Y_s}|\mathrm{d}_Y\alpha_2|^2 + |\delta_t\alpha_2|^2 + r|\alpha_2|^2\Big)^{1/2}$$

En intégrant par parties le premier membre de A on obtient :

$$-2(n-1)\int_X t^{-n}\langle\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle + 2\int_X t^{-n+1}\langle\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle(\frac{v'}{v})$$
$$= -(n-1)\int_X t^{-n}\langle\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle - (n-1)\int_X t^{-n}\langle\delta_t\alpha_1, \alpha_2\rangle + 2\int_X t^{-n+1}\langle\alpha_1, \mathrm{d}_Y\alpha_2\rangle(\frac{v'}{v})$$

On peut alors borner A ainsi (si $|\,|_t$ représente ici la norme intégrale sur $(Y, g(t))$ des formes différentielles) :

$$|A| \leq \big(n - 1 + 2t_0(c_1 + M)\big)\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_1|_t|\mathrm{d}_Y\alpha_2|_t + (n-1)\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_2|_t|\delta_t\alpha_1|_t$$
$$+2c_1 t_0\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_1|_t|\delta_t\alpha_2|_t + 2rc_1 t_0^2\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_1|_t|\alpha_2|_t$$

ce qui nous permet de minorer I :

$$I \geq \int_X t^{-n+1}|D_T\alpha|^2 - \Big(\big(\frac{n - 1 + 2t_0(c_1 + M)}{2}\big)^2 + c_1 t_0 + rc_1 t_0^2\Big)\int_X t^{-n-1}|\alpha_1|^2$$
$$-\Big(\big(\frac{n-1}{2}\big)^2 + rc_1 t_0^2\Big)\int_X t^{-n-1}|\alpha_2|^2.$$

En utilisant la minoration précédente de $\int_X t^{-n+1}|D_T\alpha|^2$ on en déduit l'existence d'une constante c_2 qui dépend de la géométrie de X sur le voisinage tubulaire de longueur τ de Y telle que :

$$\int_X t^{-n+1}\left(|\mathrm{d}\alpha|^2 + |\delta\alpha|^2\right) \geq \frac{2n(1-c_2t_0)-(1+c_2t_0)^2}{4}\int_X t^{-n-1}|\alpha|^2.$$

En choisissant t_0 on peut rendre cette constante supérieure à $1/4$, ce qui termine la démonstration du lemme.

Pour conclure il suffit alors de construire le double $\tilde{X}$ de X et de lisser la métrique sur un tube autour de Y où l'on est assuré que ω est nulle, par symétrisation de ω on obtient une forme harmonique nulle sur un ouvert, elle est donc partout nulle : considérons $\mathfrak{W} = \{U, \text{ ouvert de } \tilde{X}/\omega_{|U} = 0\}$ et $F = \bigcup_{U\in\mathfrak{W}} U$;
on a vu que $\mathfrak{W}$ était non vide; si F est différent de $\tilde{X}$, il existe dans F un point p dont la distance au complémentaire de F est inférieure au rayon d'injectivité de $\tilde{X}$. Définissons alors $R = \sup\{\rho/B(p,\rho) \in \mathfrak{W}\}$, R est inférieur au rayon d'injectivité, la sphère de rayon R autour de p est donc une sous-variété de $\tilde{X}$ sur laquelle, par continuité, ω étant nulle dans la boule ouverte de rayon R, ω est nulle. On peut donc refaire les calculs précédents sur la variété à bord $\tilde{X} \setminus B(p,R)$, il en résulte l'existence d'une boule de rayon $R_1 > R$ sur laquelle ω est nulle, ce qui contredit la définition de R; et donc $F = \tilde{X}$.

Références

[A] ARONSZAJN N. — *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, Journ. de Math., **XXXVI** (1957), 235–249.

[AKS] ARONSZAJN N., KRZYWICKI A., SZARSKI J. — *A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds*, Arkiv för Mat., **Bd 4 nr 34** (1962), 417–453.

[B] BÉRARD P. — *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes, 1986.

[DS] DUFF G.F.D., SPENCER D.C. — *Harmonic tensors on riemannian manifolds with boundary*, Annals of Math., **56** n^0 **1** (1952), 128–156.

Colette ANNÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)