

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Empilements de cercles : convergence d'une méthode de point fixe

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 23-31

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__23_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EMPILEMENTS DE CERCLES : CONVERGENCE D'UNE MÉTHODE DE POINT FIXE

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

Soit (X, g) une surface riemannienne sans bord à courbure constante : un *cercle* de (X, g) est le bord d'un disque géodésique plongé, *i.e.* de rayon strictement inférieur au rayon d'injectivité de (X, g) en son centre. Un *empilement* \mathcal{E} de cercles est un ensemble de cercles de (X, g) (fini ou non) d'intérieurs 2 à 2 disjoints. Le graphe Γ de cet empilement est le graphe tracé sur (X, g) dont les sommets sont les centres des cercles de \mathcal{E} et ayant une arête (géodésique) entre deux sommets i et j si les 2 cercles correspondants sont tangents (extérieurement)

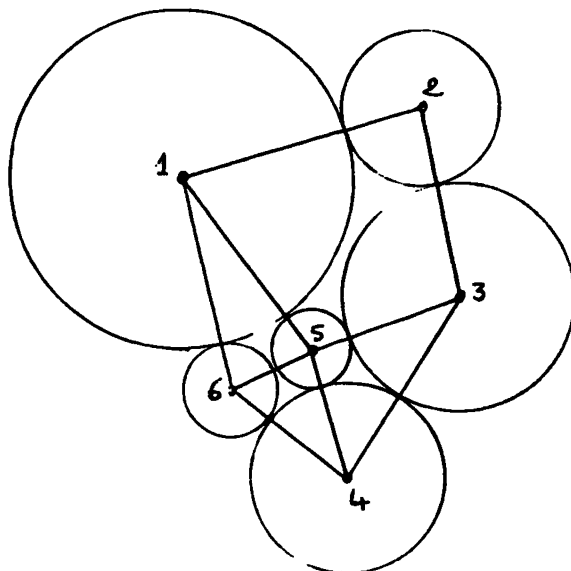


FIG. 1 : un empilement \mathcal{E} et le graphe Γ associé

La surface compacte X est donnée (sans métrique) ainsi qu'un graphe Γ tracé sur X . On cherche une métrique riemannienne g à courbure 0, +1 ou -1 sur X telle que Γ est le graphe d'un empilement de cercles, en particulier les arêtes de Γ sont géodésiques pour g . On peut toujours compléter Γ de façon qu'il soit le

1-squelette d'une triangulation de X .

On a le :

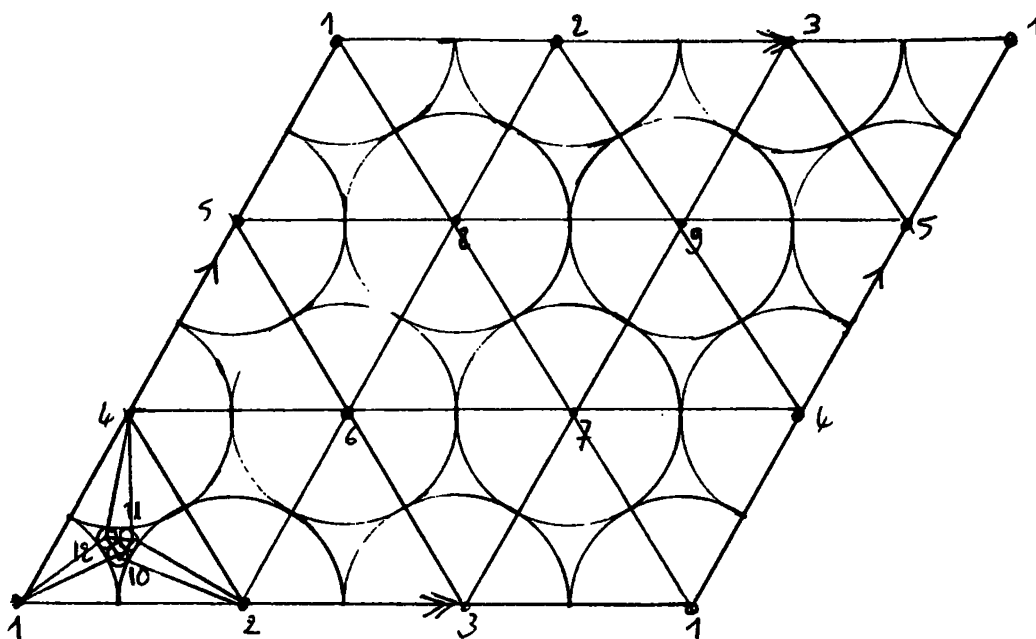
THÉORÈME (Andreev-Thurston). — Soit X une surface compacte et Γ un graphe plongé dans X qui est le 1-squelette d'une triangulation T de X . Alors il existe sur X une métrique g à courbure constante 0 , $+1$ ou -1 et un empilement de cercles \mathcal{E} sur (X, g) dont le graphe est Γ . Cette métrique est unique (à homothétie près si $K \equiv 0$).

Dans le cas de la sphère, ce théorème est conséquence de résultats d'Andreev sur l'existence de polyèdres convexes dans l'espace hyperbolique de dimension 3 dont les angles dièdres sont donnés et sont $\leq \pi/2$. L'empilement de cercles s'obtient comme traces sur la sphère à l'infini des faces de ce polyèdre.

Le cas général est étudié par Thurston dans le chapitre 13 des notes de Princeton, "Geometry and topology of 3-manifolds".

Dans la suite, je me restreindrai au cas où X est un tore. Un empilement de cercles sur un tore plat est évidemment associé à un empilement périodique du plan euclidien, et réciproquement.

Le cas de la sphère peut facilement se réduire au cas du tore : par projection stéréographique, un graphe Γ (1-squelette d'une triangulation) tracé sur S^2 se transforme en un graphe de \mathbb{R}^2 intérieur à un triangle formé de 3 sommets et 3 arêtes de celui-ci.



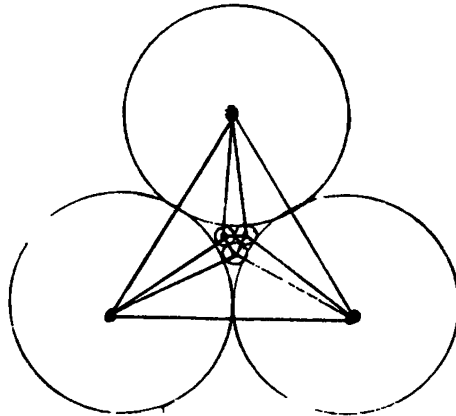


FIG. 2 : un empilement périodique et la projection stéréographique d'un empilement sphérique associé (octaèdre régulier)

Un tel graphe se complète aisément en un graphe Γ_0 périodique du plan (*i.e.* tracé sur un tore). Il est facile par projection stéréographique de reconstituer un empilement de cercles sur S^2 de graphe Γ à partir d'une partie de l'empilement plan périodique de graphe Γ_0 .

Réciproquement, tout empilement de cercles sur S^2 provient d'un empilement périodique de \mathbb{R}^2 par ce procédé : étant donnés 3 cercles sur S^2 tangents 2 à 2 extérieurement, il y a une projection stéréographique qui les transforme en 3 cercles égaux du plan.

Après avoir présenté la preuve donnée par Thurston de l'existence de ces empilements sur le tore, je prouverai la convergence d'un algorithme proposé par Thurston (voir appendice de [R-S]) pour calculer ces empilements.

1. Existence d'empilements de combinatoire donnée

Soit \mathcal{T} une triangulation finie du tore X , on note $\{1, 2, \dots, N\}$ l'ensemble des sommets de \mathcal{T} et $i \sim j$ désignera la relation de voisinage : i et j sont reliés par une arête.

Soit

$$\Delta = \left\{ \rho = (r_i) \in (\mathbb{R}^+ \setminus 0)^N \mid \sum_{i=1}^N r_i = 1 \right\};$$

à tout $\rho \in \Delta$, on associe une métrique riemannienne singulière g_ρ sur X qui est plate en dehors des sommets de \mathcal{T} et à singularité (éventuelle) conique aux sommets : cette métrique s'obtient en munissant chaque triangle $\{i, j, k\}$ de \mathcal{T} de la métrique euclidienne donnant aux côtés les longueurs $r_i + r_j$, $r_j + r_k$, $r_k + r_i$. Ces triangles se recollent bien le long des côtés. Aux sommets, le recollement est lisse si la somme des angles

vaut 2π , on introduit ainsi la courbure K_i de g_ρ au sommet i par : $K_i = 2\pi - \sum^i \alpha$ où $\sum^i \alpha$ désigne la somme des angles en i des triangles ayant i comme sommet. La formule de Gauss-Bonnet donne alors : $\sum_{i=1}^N K_i = 0$.

On note

$$Z = \left\{ k = (K_i) \in \mathbf{R}^N \mid \sum_{i=1}^N K_i = 0 \right\}$$

et on désigne par $\varphi \cdot \Delta \rightarrow Z$ l'application qui à ρ associe la courbure de g_ρ . Thurston montre que φ est un difféomorphisme de Δ sur un polyèdre convexe P de Z , qu'il caractérise, et que P contient l'origine.

Donnons quelques détails :

LEMME 1. — *L'application $\varphi : \Delta \rightarrow Z$ est un difféomorphisme local, en particulier φ est ouverte et l'image de Δ est un ouvert de Z .*

Preuve du lemme 1. — Le calcul des dérivées partielles des K_i montre que $\frac{\partial K_i}{\partial r_i} > 0$, $\frac{\partial K_i}{\partial r_j} < 0$ si $i \sim j$ et bien sûr $\frac{\partial K_i}{\partial r_j} = 0$ si i et j ne sont pas voisins.

L'invariance par homothétie de la courbure, i.e. $\varphi(\lambda r) = \varphi(r)$, donne :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N r_j \frac{\partial K_i}{\partial r_j} = 0.$$

Si $(x_j) \in \text{Ker}(\varphi'(r_0))$, on a donc :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N \frac{\partial K_i}{\partial r_j} x_j = 0,$$

soit, avec $y_j = x_j/r_j$, $\sum_{j=1}^N \frac{\partial K_i}{\partial r_j} r_j y_j = 0$. Si on pose, pour $j \neq i$, $b_{ij} = -\left(r_j \frac{\partial K_i}{\partial r_j}\right) / \left(r_i \frac{\partial K_i}{\partial r_i}\right)$, on a :

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} = 1, \quad b_{ij} > 0 \text{ si } i \sim j \text{ et } y_i = \sum_{j \sim i} b_{ij} y_j.$$

Le vecteur (y_j) vérifie donc une propriété de la moyenne avec les poids (b_{ij}) ; la connexité de Γ montre, avec un raisonnement sur le maximum des y_i , que y_i est constant, donc le noyau des $\varphi'(r_0)$ est constitué des vecteurs colinéaires à $\sum_j r_j \frac{\partial}{\partial r_j}$ qui sont dans Δ : $\varphi'(r_0)$ est donc bijective.

A tout sous-complexe connexe complet (*) W de \mathcal{T} , on associe l'inéquation (E_W) dans Z définie par :

$$(E_W) \quad \sum_{i \in W_0} K_i > 2\pi \chi(W) - \pi \left(\sum_{i \in W_0} n_W(i) \right),$$

(*) *complet* signifie que W_1 est l'ensemble des arêtes de \mathcal{T} dont les extrémités sont dans W_0 et W_2 l'ensemble des triangles de \mathcal{T} dont les côtés sont dans W_0 .

où W_0, W_1, W_2 sont les simplexes de dimension 0, 1, 2 de W ; $\chi(W) = \#W_2 - \#W_1 + \#W_0$ et $n_W(i)$ le nombre de triangles de sommet i de \mathcal{T} n'ayant pas d'autre sommet dans W_0 .

LEMME 2. — Soit P le polyèdre convexe borné de Z défini par l'ensemble des inéquations (E_W) , alors

- a) $\varphi(\Delta) \subset P$;
- b) φ est propre de Δ dans P .

COROLLAIRE. — $\varphi(\Delta) = P$ et φ est un difféomorphisme de Δ sur P .

Preuve du lemme 2. —

a). — C'est une conséquence de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un petit voisinage tubulaire $N_\varepsilon(W)$ de W :

$$\sum_{i \in W_0} K_i = 2\pi\chi(W) - \int_{bN_\varepsilon(W)} \tau,$$

où τ est la courbure algébrique du bord de $N_\varepsilon(W)$: il est clair que τ est concentrée près des sommets i de W_0 qui sont sur la frontière de W .

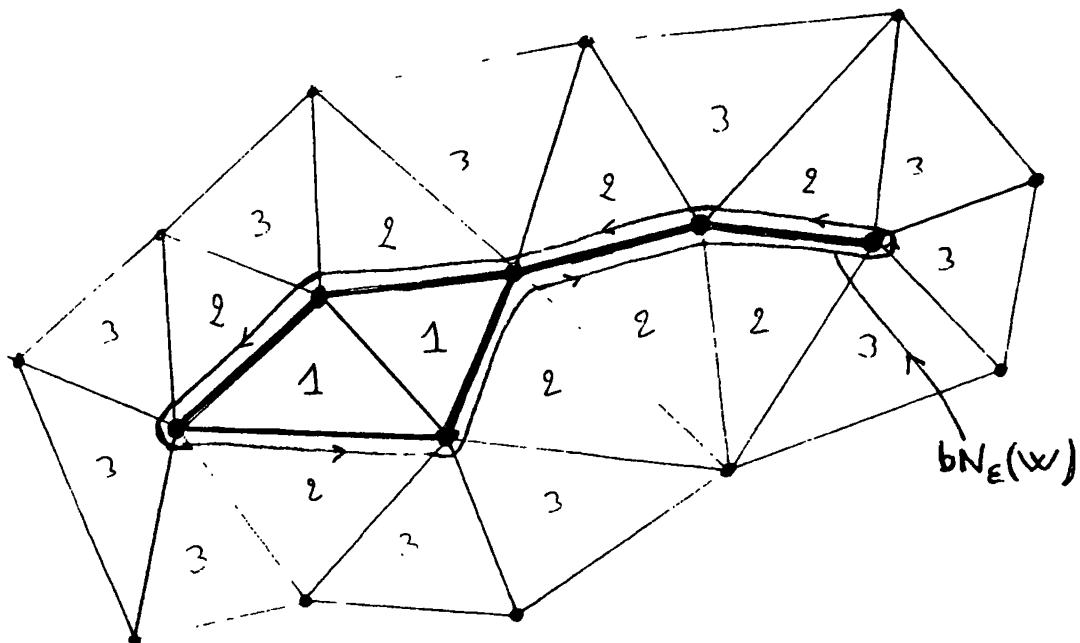


FIG. 3 : Sous-complexe W et classification des triangles voisins

L'intégrale dans la partie proche de i de τ vaut alors $\Sigma\beta - \pi$ où β sont les angles en i des triangles de \mathcal{T} non dans W_2 . On peut regrouper les triangles de \mathcal{T} de sommet

i en 3 types

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{type 1} = \text{triangles de } W_2 \\ \text{type 2} = \text{triangles ayant 1 côté dans } W_1 \\ \text{type 3} = \text{triangles n'ayant aucun côté dans } W_1 . \end{array} \right.$$

Il y a en chaque sommet i du bord de W , 2 triangles de type 1 et $n_W(i)$ triangles de type 3.

La somme de 2 angles consécutifs d'un triangle de type 2 est $< \pi$; les angles des triangles de type 3 sont $< \pi$; on en déduit (E_W) :

$$\int_{bN_e(W)} \tau = \sum_{i \in bW} \left(\sum_{(2)} \beta - \pi \right) + \sum_{i \in bW} \sum_{(3)} \beta$$

($\sum_{(2)}$ (resp. $\sum_{(3)}$) sont les sommes sur les triangles de type 2 (resp. 3)).

Les remarques précédentes montrent que $\int_{bN_e(W)} \tau < \pi \sum_{i \in W_0} n_W(i)$.

b). — Soit ρ_n une suite de Δ tendant vers l'infini de Δ et $k_n = \varphi(\rho_n)$. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que $\rho_n \rightarrow \rho_\infty \in b\Delta$ et $k_n \rightarrow k_\infty$; il faut montrer que $k_\infty \notin P$.

Soit \widetilde{W} le sous-complexe complet de \mathcal{T} tel que $\widetilde{W}_0 = \{i \mid \rho_\infty(i) = 0\}$ et W une composante connexe de \widetilde{W} . Montrons que, pour k_∞ , on a *égalité* dans (E_W) .

Lorsque $\rho_n \rightarrow \rho_\infty$, les triangles de type 2 ont leur angle non dans W qui tend vers 0, donc la somme des 2 angles restant tend vers π . Pour ceux de type 3, l'angle intéressant tend vers π . Pour montrer le théorème de Thurston, il reste à vérifier que $0 \in P$, c'est-à-dire que, pour tout sous-complexe W connexe complet de \mathcal{T} , on a

$$\sum_{i \in W_0} n_W(i) > 2\chi(W).$$

Or $\chi_W \leq 1$, il suffit donc de regarder les cas $\chi(W) = 0$ et $\chi(W) = 1$.

(i) $\chi(W) = 0$: s'il n'y avait aucun triangle de type 3, il est facile de voir qu'on aurait $\chi(\mathcal{T} \setminus W) =$ nombre de composantes connexes de $X \setminus \widetilde{W}$ et donc est strictement > 0 : on a donc contradiction avec $0 = \chi(X) = \chi(W) + \chi(\mathcal{T} \setminus W)$.

(ii) $\chi(W) = 1$: s'il n'y avait que 2 triangles de type 3, il est facile de voir que leur côté sans sommets dans W serait commun et donc $\chi(\mathcal{T} \setminus W) = n_2 + n_3 - (n_2 + n_3 + 1) + 2 = 1$; on termine comme en a) : $0 = \chi(X) = 1 + 1$; d'où contradiction.

2. Convergence de l'algorithme de Thurston

Description de l'algorithme. — Il s'agit d'une méthode de point fixe, utilisant une transformation $G : \Delta \rightarrow \Delta$. Il est préférable de remplacer l'invariance par

homothétie par une invariance par translation en prenant comme inconnues les $t_i = \log(r_i)$ et d'introduire alors une application $F : \mathbb{R}^n/D \rightarrow \mathbb{R}^n/D$, où $D = \{(t, \dots, t) | t \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de \mathbb{R}^N . Pour définir F , on a besoin du :

LEMME. — Soit $V \geq 3$ donné, $(r_1, \dots, r_V) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^V$ donnés, il existe $r_0 > 0$, unique tel que la somme des angles en 0 des N triangles $(0, i, i+1)$, $(1 \leq i \leq V; V+1=1)$ de côtés $(r_0 + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r_0)$ vaille 2π ; si on recolle ces triangles euclidiens, on obtient une métrique lisse en 0.

Remarque. — Cela correspond à une famille de cercles $(C_i)_{0 \leq i \leq V}$, où chaque C_i , $(i \geq 1)$ est tangent extérieurement à C_0 , C_{i+1} à C_i et C_1 à C_V , les rayons étant les r_i . Il se peut que C_i et C_j , $(|i-j| \geq 2)$ se recoupent.

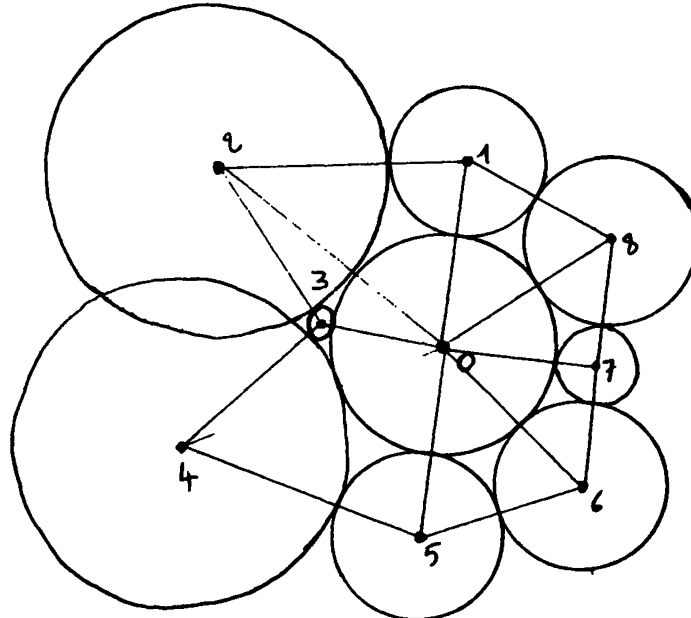


FIG. 4 : Choix de r_0 ; les cercles C_2 et C_4 se recoupent!

Preuve du lemme. — Soit $K(r) = 3\pi - \sum_{i=1}^V \alpha_i$, où α_i est l'angle en 0 du triangle $(0, i, i+1)$ euclidien de côtés $(r + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r)$. Le calcul des dérivées montre que $K(r)$ est une fonction strictement croissante de r et $K(0^+) = (2 - V)\pi$, $K(+\infty) = 2\pi$. On conclut aisément par le théorème des valeurs intermédiaires.

On a alors la description de $\tilde{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui donne F par passage au quotient. Pour chaque i , $\tilde{F}_i(t_1, \dots, t_N)$ est $\log(r_0)$ où r_0 est déterminé par le lemme précédent appliqué à l'étoile du sommet i dans \mathcal{T} ($V =$ valence de i) et les rayons r_j , $(j \sim i)$ donnés par $r_j = e^{t_j}$. Autrement dit $\log(r_i^*) = F_i(\log r_1, \dots, \log r_N)$ est donné implicitement par :

$$K_i(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i^*, r_{i+1}, \dots, r_N) = 0,$$

où K_i est la courbure en i de la métrique g_ρ avec $\rho = (r_1, \dots, r_{i-1}, r_i^*, \dots, r_N)$.

Preuve de la convergence. — Soit $E = \mathbb{R}^N/D$, on note $[t]$, $t \in \mathbb{R}^n$, la classe

de t et on munit E de la distance associée à la norme quotient de la norme ℓ^∞ , on a :

$$\|[t]\| = \frac{1}{2} (\sup_i t_i - \inf_i t_i) ,$$

on a alors le

LEMME. — Soit $A \in L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ de matrice (a_{ij}) telle que $\forall i, \sum_j a_{ij} = 1$ et $\forall i, j, a_{ij} \geq \alpha > 0$, alors $A(D) \subset D$ et si $\hat{A} : E \rightarrow E$ est obtenu par passage au quotient de A , on a :

$$\|\hat{A}\| \leq 1 - 2\alpha < 1 .$$

Preuve du lemme. — $\sum_j a_{ij} x_j = x'_i$ est barycentre des (x_j) avec des poids $a_{ij} \geq \alpha > 0$. Il est clair que :

$$(1 - \alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j \leq x'_i \leq (1 - \alpha) \sup x_j + \alpha \inf x_j .$$

On en déduit le résultat.

Le calcul des dérivées de $K_i(t_1, \dots, t_N)$, montre que $\frac{\partial K_i}{\partial t_i} > 0$ et $\frac{\partial K_i}{\partial t_j} < 0$ (si $j \sim i, i \neq j$); le théorème des fonctions implicites montre alors que les dérivées $\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_i}{\partial t_j} / \frac{\partial K_i}{\partial t_i}$ sont > 0 si $i \sim j$ et nulles sinon. De plus, on a évidemment :

$$\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 1 , \text{ car } K_i(t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_N + c) = K_1(t_1, \dots, t_N) .$$

On en déduit que la matrice jacobienne de F^k pour $k \geq \text{diam}(\Gamma)$ vérifie les hypothèses du lemme précédent avec un α uniforme sur tout compact de E .

Donc, par application du théorème des accroissements finis, si $a_i = \log b_i$, $a = (a_i)$ est l'empilement cherché, on a :

$$\forall k \geq \text{diam}(\Gamma) , \forall t \in \mathbf{R}^N , d([a], F^k[t]) < d([a], [t]) = D .$$

Donc, il existe $K, 0 < K < 1$ tel que :

$$d([a], F^n[t]) \leq C \cdot K^n .$$

Cela prouve la convergence de l'algorithme.

Références

- [A 1] ANDREEV E.M. — *On convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces*, Mat. USSR Sbornik, **10** (1970), 413-440.
- [A 2] ANDREEV E.M. — *On convex polyhedra of finite volume in Lobačevskiĭ spaces*, Mat. USSR Sbornik, **12** (1970), 255-259.
- [B-F-P] BARANY I., FÜREDI Z. et PACH J. — *Discrete convex functions and proof of the six circle conjecture of Fejes Toth*, Can. J. Math., **36** (1984), 569-576.
- [R] RODIN B. — *Schwarz's lemma for circle packings*, Inventiones Math., 1987.
- [R-S] RODIN B. et SULLIVAN D. — *The convergence of circle packings to the Riemann mapping*, J. diff. geom., **26** (1987), 349-360.
- [T] THURSTON W. — *The geometry and topology of three manifolds*, Princeton Notes, Chap. 13.

Yves COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)